

Tipo de artículo: Artículo original

Concepción del desarrollo del pensamiento matemático avanzado en estudiantes de formación ingeniera

Conception of the development of advanced mathematical thinking in students of engineering formation

William Rafael Raymondi Lomas^{1*} , <http://orcid.org/0000-0001-5008-7480>

Edison Luis Cruz Navarrete² , <http://orcid.org/0000-0001-5008-7480>

¹ Magister en sistemas de información mención en inteligencia de negocios, Ingeniero en networking y telecomunicaciones. Universidad de Guayaquil, Guayaquil, Ecuador. Email: william.raymandil@ug.edu.ec.

² Magister en administración de empresas mención en gestión de las pymes; ingeniero en sistemas computacionales. Universidad de Guayaquil, Guayaquil, Ecuador. Email: edisoncruz.na@gmail.com

* Autor para correspondencia: william.raymandil@ug.edu.ec

Resumen

En este artículo se presentan los principales resultados de una concepción para el desarrollo del pensamiento matemático avanzado (PMA), en la formación inicial de profesionales de la ingeniería. Mediante la utilización de métodos como la sistematización, el análisis documental, el hipotético-deductivo y el sistémico-estructural funcional, se realiza una sistematización de algunas concepciones teóricas sobre dicho tipo de pensamiento hasta llegar a su definición y caracterización en términos didácticos; posteriormente, se describe la relación que existe entre el desarrollo de las características esenciales del PMA y la creatividad matemática.

Palabras clave: pensamiento matemático avanzado, creatividad matemática.

Abstract

This article presents the main results of a conception for the development of advanced mathematical thinking (PMA), in the initial training of engineering professionals. Through the use of methods such as systematization, documentary analysis, hypothetical-deductive and systemic-structural functional, a systematization of some theoretical conceptions about this type of thought is carried out until reaching its definition and characterization in didactic terms; Subsequently, the relationship between the development of the essential characteristics of the PMA and mathematical creativity is described.

Keywords: *pensamiento matemático avanzado, creatividad matemática.*

Recibido: 22/02/2022

Aceptado: 11/07/2022

En línea: 21/07/2022



Esta obra está bajo una licencia *Creative Commons* de tipo **Atribución 4.0 Internacional**
(CC BY 4.0)

Introducción

El uso de las matemáticas en Ingeniería es de vital importancia, debido a la construcción de modelos con aplicaciones reales en Electrónica, Robótica, procesos productivos e industriales, entre otras. Los estudiantes deben ser capaces de desarrollar habilidades matemáticas y tecnológicas que les permitan competir a nivel nacional e internacional, proponiendo métodos que proporcionen soluciones a problemas sociales y económicos, tales como la innovación de nuevas tecnologías o la creación de nuevos instrumentos que permitan a las industrias mejorar sus procesos de producción.

Así, en términos generales, el objetivo de la Ingeniería está en la optimización del uso de los recursos naturales mediante la aplicación de las matemáticas, y particularmente el cálculo, las cuales deben constituirse en un instrumento de trabajo para lograr que su carácter práctico y reflexivo prevalezca sobre divagaciones teóricas y abstractas. Por ello, su aprendizaje y enseñanza deberían estar principalmente en potenciar el desarrollo de habilidades relacionadas a pensar cómo hacer las cosas, cómo resolver problemas y cómo optimizar recursos. (García, 2014, p.7)

Esto justifica la indispensable inserción de la Disciplina Matemática en el currículo base del plan de estudio para la formación inicial del ingeniero. Los contenidos de dicha disciplina giran en torno al importante concepto de límite funcional cuyo adecuado aprendizaje imprime una visión holística del cálculo diferencial e integral.

Sin embargo, es tendencia histórica que los estudiantes presenten dificultades en el aprendizaje de los contenidos de la Disciplina Matemática. Esto se evidencia, principalmente, en el bajo rendimiento académico de los estudiantes en las evaluaciones sistemáticas, trabajos de control parcial y exámenes finales.

A partir de la problemática anterior, en Nieves (2020) se realizó un estudio exploratorio inicial donde se concluye que los estudiantes presentan insuficientes niveles de abstracción, dificultad al hacer analogías y transferencias necesarias de las matemáticas elementales a las superiores, así como debilidades en la estructuración y organización lógica de saberes para la dirección racional de la actividad matemática relacionada con contenidos del Cálculo.

Las insuficiencias anteriores tienen que ver con procesos cognitivos-instrumentales como la representación, abstracción, analogías, trasferencias y razonamiento a un nivel superior, condicionados por la complejidad que implica el aprendizaje de los contenidos relacionados con el concepto de límite. De este análisis preliminar se puede afirmar que dichas insuficiencias están muy vinculadas con el desarrollo del pensamiento matemático avanzado.

Además, como resultado de la revisión bibliográfica realizada, también se pudo determinar que existe una limitada concepción didáctica y metodológica para el Proceso de Enseñanza-Aprendizaje (PEA) de contenidos relacionados con el Cálculo. Dicha concepción debe aportar la necesaria claridad sobre las vías para potenciar el nivel de



abstracción para la comprensión de conceptos matemáticos, la significatividad del aprendizaje desarrollador de contenidos con paso al límite y el desarrollo de habilidades lógicas.

Fundamentado en lo anterior, se considera pertinente, exponer una concepción del desarrollo PMA que deje la necesaria claridad sobre cómo potenciar la creatividad matemática y mejorar el rendimiento académico de los estudiantes en la disciplina Matemática, de las carreras de ingeniería, en la Universidad de Pinar del Río, Cuba.

Materiales y métodos

Con el fin de obtener una concepción del desarrollo PMA se empleó como base metodológica, la teoría Dialéctico-Materialista para el estudio de los enfoques sobre el desarrollo del PMA y su relación con el PEA de la Matemática; así como la determinación de los componentes y relaciones dialécticas de una concepción didáctica que permita potenciar la creatividad matemática desde el desarrollo del PMA. En consecuencia, se utilizaron los siguientes métodos de investigación:

Sistematización: se empleó en la búsqueda de referentes teóricos sobre el desarrollo del pensamiento matemático avanzado, en el establecimiento de relaciones entre conocimientos científicos en el tema y en la determinación de dimensiones e indicadores a partir del trabajo con las definiciones.

Análisis documental: se realizó una revisión de la normativa cubana vigente en relación con la formación inicial del ingeniero, haciendo énfasis en la dirección del PEA de la disciplina Matemática, así como en la estructuración del contenido.

Hipotético-deductivo: se aplicó en la construcción de supuestos hipotéticos y en la determinación de regularidades y características esenciales del desarrollo del PMA, desde el proceso de enseñanza-aprendizaje de la disciplina Matemática.

Sistémico-estructural funcional: se utilizó en la estructuración de los componentes, las funciones y las relaciones que se establecen en la concepción didáctica, con el fin de obtener una adecuada representación del desarrollo del PMA, desde la disciplina Matemática.

Resultados y discusión

En los análisis de los distintos planes de estudio de las carreras de ingeniería, se reconoce la necesidad de potenciar el pensamiento matemático donde se unifique pensamiento crítico, analítico y reflexivo en la formación inicial del ingeniero. De este modo se contribuye a formar estudiantes con actitudes, habilidades y valores necesarios para tener ingenieros con oportunidades de éxito en su formación académica y en su vida profesional (Espartaco, 2020, p.278).



Para hacer referencia al término pensamiento matemático avanzado (PMA), Azcárate y Camacho (2003), ponen de manifiesto que el pensamiento matemático avanzado posee, por su naturaleza, procesos característicos entre los que destacan el nivel de abstracción, la formalización del conocimiento, la representación, la definición de los conceptos y la demostración (p.136). Además, según Aldana (2013), el PMA “tiene que ver con los procesos mentales propios de las matemáticas superiores que se enseñan y se aprenden en los últimos años de bachillerato y en especial en el ámbito universitario” (p.58).

En este sentido, luego de hacer un análisis de varias caracterizaciones sobre el PMA, dadas por expertos e investigadores en el tema, Herlina (2015) plantea que este: “es el proceso del pensar matemático que comprende procesos de representación, abstracción, pensamiento matemático creativo y la prueba matemática” (p.2). En este caso se expresa el pensamiento matemático avanzado como un conjunto de procesos cognitivos, que intervienen en la enseñanza-aprendizaje de la Matemática.

Al describir el desarrollo del PMA, Cantoral (2016), afirma que:

... tendríamos que considerar que este suele interpretarse de distintas formas; por un lado se le entiende como una reflexión espontánea que los matemáticos realizan sobre la naturaleza de su conocimiento y sobre la naturaleza del proceso de descubrimiento e invención en matemáticas. Por otra, se entiende el pensamiento matemático como parte de un ambiente científico en el cual los conceptos y las técnicas matemáticas surgen y se desarrollan en la resolución de tareas; finalmente, una tercera visión considera que el pensamiento matemático se desarrolla entre todos los seres humanos al enfrentar cotidianamente múltiples tareas. (pp. 60-61)

A partir de la sistematización y el análisis documental realizado, se define el desarrollo del PMA como el accionar didáctico del profesor para dirigir la actividad cognoscitiva de los estudiantes en el campo de la Matemática, con la finalidad de lograr avances progresivos en el nivel de abstracción, la definición de conceptos, la formalización del conocimiento, la representación conceptual y la demostración matemática.

A continuación, se presenta una concepción las dimensiones de la definición anterior.

Dimensión 1: Accionar didáctico del profesor para dirigir la actividad cognoscitiva de los estudiantes, en el trabajo con las características esenciales del PMA.

Dicha dimensión manifiesta en el sistema de acciones que el profesor planifica y pone en práctica durante el PEA de la disciplina Matemática, ellas son:

Acciones para potenciar el nivel de abstracción



- ✓ *Reactivación del sistema de conocimientos necesarios.* Se manifiesta cuando el profesor reactiva en los estudiantes, mediante procedimientos heurísticos, los conocimientos necesarios y cualidades esenciales de un sistema de conceptos, para el desarrollo de actividades matemáticas.
- ✓ *Utilización del principio de analogía.* Se manifiesta en las acciones del profesor para orientar a los estudiantes a que establezcan similitudes de razonamientos y equivalencia entre procedimientos, durante el desarrollo de actividades matemáticas.

Acciones para potenciar la definición de conceptos

- ✓ *Aproximación formal en la definición de conceptos.* Se manifiesta en las acciones que realiza el profesor para conducir a los estudiantes en la definición de conceptos, desde el trabajo con definiciones propias intuitivas hasta la definición formal institucionalizada.
- ✓ *Precisión en la utilización de definiciones.* Se evidencia en la utilización precisa y eficaz de las definiciones para elaborar y clasificar objetos matemáticos, así como en la determinación de procedimientos de trabajo para el desarrollo de tareas matemáticas.

Acciones para potenciar la formalización del conocimiento

- ✓ *Utilización de la terminología convencional para la definición de conceptos.* Se manifiesta en las acciones que realiza el profesor para que el estudiante se apropie del sistema de signos convencionales para denotar ideas matemáticas.
- ✓ *Representación de un mismo contenido en lenguajes diferentes.* Se manifiesta en las acciones que realiza el profesor para presentar un mismo contenido a los estudiantes en diferentes formas y lenguajes.

Acciones para potenciar la representación conceptual

- ✓ *Utilización de esquemas conceptuales para modelar el contenido matemático.* Se manifiesta en las acciones que utiliza el profesor para representar, esquematizar y modelar contenidos matemáticos o el desarrollo de tareas matemáticas.
- ✓ *Utilización de mapas conceptuales para la visualización de relaciones y propiedades.* Se manifiesta en las acciones del profesor dirigidas a la elaboración de mapas conceptuales para orientar la actividad racional de los estudiantes y que estos visualicen relaciones entre conceptos.

Acciones para potenciar la demostración matemática

- *Utilización de procedimientos heurísticos en la búsqueda de una demostración.* Se manifiesta en las acciones del profesor para lograr un clima de descubrimiento, que los estudiantes formulen hipótesis y establezcan relaciones.



- *Rigurosidad en la representación de la demostración.* Se manifiesta en la generalidad, solidez, precisión, argumentación, fundamentación y formalización con la que el profesor trabaja y presenta la demostración.

Dimensión 2: actividad cognoscitiva de los estudiantes, relacionada con las características esenciales del PMA.

Dicha dimensión se aprecia a partir del desarrollo cualitativo y de las variaciones que, en función del contenido del pensamiento, experimentan los estudiantes en la comprensión de los procesos de su pensamiento y en la organización de su manifestación hacia un fin determinado; en el incremento de una apropiación cada vez más amplia y más hábil de los conocimientos, lo que incluye el componente conceptual teórico y práctico, así como la formación y desarrollo de habilidades relacionadas con el nivel de abstracción, la definición de conceptos, la formalización del conocimiento, la representación conceptual y la demostración matemática.

El nivel de abstracción

- *Determinación de características esenciales en los análisis que se realizan durante el desarrollo de actividades matemáticas.* Se manifiesta en la habilidad de los estudiantes para determinar lo que es esencial y obviar lo no esencial, así como de sintetizar lo esencial durante el desarrollo de tareas matemáticas.
- *Coherencia en las argumentaciones.* Se manifiesta en la habilidad de los estudiantes para comunicar con coherencia, de forma oral o escrita, las ideas esenciales que sustentan los razonamientos realizados.

La definición de conceptos

- *Significatividad en la relación concepto-definición.* Se manifiesta en el nivel de precisión y valoración que realizan los estudiantes sobre las relaciones esenciales entre el concepto y su definición durante el desarrollo de la actividad matemática.
- *Utilización correcta de definiciones.* Se manifiesta en la habilidad del estudiante para expresar y utilizar las cualidades esenciales del concepto, así como para algoritmizar definiciones en la búsqueda de nuevos conocimientos y soluciones a tareas matemáticas.

La formalización del conocimiento

- *Conversión del lenguaje común al lenguaje técnico de la matemática.* Se manifiesta en la habilidad del estudiante para expresar ideas del lenguaje común al lenguaje técnico de la matemática.
- *Identificación de un mismo concepto en formalizaciones diferentes.* Se manifiesta en la habilidad del estudiante para identificar proposiciones equivalentes en distintos lenguajes, para reformular tareas matemáticas y para buscar vías de solución.



La representación conceptual

- *Utilización de esquemas gráficos de apoyo a la racionalización del trabajo mental.* Se manifiesta en la habilidad del estudiante para crear y utilizar esquemas gráficos o dibujos auxiliares, que le permitan la comprensión y el análisis en el desarrollo de tareas matemáticas.
- *Representación de un concepto en diferentes registros semióticos.* Se manifiesta en la habilidad del estudiante para expresar, interpretar, manipular o identificar un mismo objeto matemático o idea matemática en diferentes registros semióticos.

La demostración matemática

- *Logicidad en la búsqueda de la demostración.* Se manifiesta en un adecuado razonamiento lógico en la búsqueda de la vía de demostración.
- *Formalización en la representación de la demostración.* Se manifiesta en la coherencia de la demostración, en una adecuada fundamentación y utilización correcta de la terminología matemática.

A continuación se discuten los resultados anteriores a la luz de la creatividad matemática que debe caracterizar a los estudiantes de ingeniería, para ello se explica la manifestación de cada una de las características esenciales del PMA durante la solución flexible, original e independiente de tareas matemáticas. Esta es una de las formas de dar solución a la problemática planteada por Fernández (2019) sobre la necesidad de implementar “dinámicas especializadas que puedan dar un matiz diferente a la clase de matemática superior desde la perspectiva de los elementos que componen los enfoques epistemológicos y fundamentos básicos de la disciplina” (p.12).

El desarrollo del PMA como proceso, contribuye a la fluidez, la flexibilidad y la originalidad. En el caso de la resolución de problemas, por ejemplo, la fluidez se asocia con el número de respuestas correctas que un estudiante da a un problema; la flexibilidad, está asociada a la cantidad de estrategias de resolución de problemas y la originalidad, está asociada al número de soluciones propuestas que muy pocos o nadie ha propuesto antes (Sánchez y Font, 2017, p.5).

En este sentido la creatividad matemática se manifiesta en la capacidad del estudiante para realizar tareas matemáticas de forma flexible, original e independiente. Es efecto de la integración y desarrollo adecuado de las características esenciales del PMA, las cuales se conciben como:

- *El nivel de abstracción:* se manifiesta en la capacidad del estudiante para articular de forma creativa las cualidades esenciales y obviar las no esenciales, a cualquier nivel de profundidad, según la jerarquización de los conceptos implicados en el desarrollo de una tarea matemática.



- *La representación conceptual*: la imagen de conceptos representados y relacionados gráficamente, flexibilizan la actividad racional de los estudiantes. Además, potencian la originalidad en la búsqueda de soluciones a problemas matemáticos.
- *La definición de conceptos*: para el desarrollo de la creatividad matemática es necesario una adecuada formación de conceptos de forma que el estudiante pueda hacer uso eficiente de las definiciones. En tal caso, resulta importante la identificación de términos o formas proposicionales que aparecen tanto en el definiendum (lo que debe definirse), como en el definiens (lo que define).
- *La formalización del conocimiento*: determina el nivel de originalidad alcanzado por el estudiante, en tanto constituye la forma en que el estudiante expresa sus ideas en el lenguaje formal de la Matemática. Además, la creatividad se expresa en la capacidad del estudiante para concretar situaciones problemáticas en un modelo matemático.
- *La demostración matemática*: constituye un medio por excelencia para el desarrollo de la creatividad matemática, en tanto demanda del estudiante persistencia, laboriosidad, flexibilidad, independencia y originalidad, en la elección y desarrollo del método más adecuado para la demostración matemática.

Además, esta concepción fundamenta la propuesta hecha por Robaina (2018), sobre la necesidad de contribuir, desde la disciplina Matemática, a la formación de un profesional creativo en su desempeño, para lo cual debe trabajarse en función de lograr la independencia cognoscitiva de los estudiantes y el desarrollo de un pensamiento lógico y flexible, que propicie dar soluciones originales a problemas profesionales (p.4).

Conclusiones

Las principales deficiencias en el rendimiento académico de los estudiantes de las carreras de ingeniería en la disciplina Matemática están muy relacionadas con el desarrollo del PMA. Esto se evidencia en los insuficientes niveles de abstracción, dificultad al hacer analogías y transferencias necesarias de las matemáticas elementales a las superiores, así como debilidades en la estructuración y organización lógica de saberes para la dirección racional de la actividad matemática relacionada con contenidos del Cálculo.

Se elabora una concepción para el desarrollo del PMA desde la didáctica, en la cual se tiene en cuenta, tanto el desempeño metodológico del profesor, como la actuación cognitiva de los estudiantes; estos constituyen actores fundamentales en el PEA de la disciplina Matemática. Para ello, se identifican como características esenciales del PMA: el nivel de abstracción, la definición de conceptos, la formalización del conocimiento, la representación conceptual y la demostración matemática.



Existe un estrecho vínculo entre el desarrollo de las características esenciales del PMA y el desarrollo de la creatividad en los estudiantes de las carreras de ingeniería. A partir de un adecuado desempeño didáctico del profesor, se puede fortalecer dicho vínculo y lograr que los estudiantes tengan éxito en el aprendizaje de la Matemática y en el desarrollo de habilidades tecnológicas para la construcción de modelos con aplicaciones.

Conflictos de intereses

Los autores no poseen conflictos de intereses.

Contribución de los autores

1. Conceptualización: William Rafael Raymondi Lomas, Edison Luis Cruz Navarrete.
2. Curación de datos: Edison Luis Cruz Navarrete.
3. Investigación: William Rafael Raymondi Lomas.
4. Metodología: William Rafael Raymondi Lomas.
5. Recursos: Edison Luis Cruz Navarrete.
6. Software: Edison Luis Cruz Navarrete.
7. Supervisión: William Rafael Raymondi Lomas.
8. Validación: William Rafael Raymondi Lomas.
9. Visualización: William Rafael Raymondi Lomas.
10. Redacción – borrador original: William Rafael Raymondi Lomas, Edison Luis Cruz Navarrete.
11. Redacción – revisión y edición: William Rafael Raymondi Lomas, Edison Luis Cruz Navarrete.

Financiamiento

La investigación no requirió fuente de financiamiento externa.

Referencias

- Azcárate, C. y Camacho (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. X, No. 2 135-146.
- Aldana, E. (2013). Una didáctica de la matemática para la investigación en pensamiento matemático avanzado. Revista Científico Pedagógica “Atenas”, Vol.4 Nro. 23, 2013 ISSN: 1682-2749 pp. 56-69.



- Cantoral, R. (2016). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa*. Ciudad de México, México. Gedisa, S.A. (segunda edición).
- Espartaco, L. (2020). Estrategias de enseñanza de la matemática en la formación de profesionales de la ingeniería. *Dominio de las Ciencias*, ISSN: 2477-8818 Vol. 6, núm. 3, pp. 273-285.
- Fernández, Y. (2019). Factores que inciden en la enseñanza/aprendizaje de la matemática superior en la ingeniería. Universidad Politécnica Estatal del Carchi. Disponible en:
<https://www.researchgate.net/publication/330790214>
- García, J. (2014). Ingeniería, matemáticas y competencias. *Revista Electrónica "Actualidades Investigativas en Educación"* E-ISSN: 1409-4703.
<https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=44729876015>
- Herlina, E. (2015). Advanced Mathematical Thinking and the Way to Enhance IT. *Journal of Education and Practice*. ISSN 2222-1735 (Paper) ISSN 2222-288X(Online). Vol.6, No.5.
- Nieves, S. (2020). El desarrollo del pensamiento matemático avanzado desde la disciplina Análisis Matemático. Tesis doctoral. Instituto Central de Ciencias Pedagógicas (ICCP). Cuba.
- Robaina, I. (2018). Modo de actuación creativo en la formación inicial del profesor de matemática. Tesis en opción al grado científico de doctor en ciencias pedagógicas. Universidad de Pinar del Río.
- Sánchez, A. y Font, V. (2017). Reflexión sobre los futuros profesores de matemáticas y fomento de la creatividad en sus alumnos. *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en: foqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html.

