Serie Científica de la Universidad de las Ciencias Informáticas
Vol. 13, No. 11, Mes Noviembre, 2020
ISSN: 2306-2495| RNPS: 2343
Pág. 65-83
http://publicaciones.uci.cu

Tipo de artículo: Artículo original
Temática: Enseñanza de la Ciencias Informática
Recibido: 26/07/2020 | Aceptado: 24/08/2020 | Publicado: 01/11/2020

Propuesta de secuenciación de contenidos del Cálculo Integral para la carrera Ingeniería en Ciencias Informáticas

Proposal for the sequencing of the contents of the Integral Calculus for the Computer Science Engineering career

Antonio Rey Roque [1]

[1] Profesor del departamento de Matemática de la Universidad de Ciencias Informáticas. Ave 31 entre 40 y 42, San Antonio de los Baños, Artemisa. antrey@uci.cu

---

Resumen

La enseñanza y consecuentemente el aprendizaje de los principios del Cálculo es problemática, es coincidente en las investigaciones realizadas por varios años que se puede enseñar a efectuar cálculos de forma más o menos mecánica de límites, derivadas e integrales, incluso resolver algunos tipos de problemas, pero realmente aparecen grandes dificultades para hacer que los estudiantes alcancen una comprensión satisfactoria de los conceptos involucrados en esta área de la Matemática, en particular, el concepto de integral definida o integral de Riemann. La historia de la enseñanza del Cálculo en la carrera de Ingeniería en Ciencias Informáticas y en otras ingenierías muestra dos tendencias relacionadas con el orden en que se introducen los conceptos de integral definida y de integral indefinida y además hacen énfasis en los cálculos por encima de lo conceptual. La práctica docente del autor por más de treinta años en esta materia y el estudio minucioso y amplio del trabajo de los principales investigadores nacionales y foráneos en educación matemática, propiciaron elaborar una secuenciación de contenidos para el tema de Cálculo Integral la cual ha sido aplicada por varios cursos. El resultado principal en correspondencia con el objetivo propuesto está en la adquisición significativa del concepto de integral definida y las generalizaciones que condicen a las integrales las múltiples y a las integrales vectoriales.

Palabras clave: Secuenciación de contenidos; Cálculo Integral; Integral definida; Integral indefinida

Abstract

The teaching and consequently the learning of the principles of Calculus is problematic, it is coincident in the investigations carried out for several years that it is possible to teach to perform calculations in a more or less mechanical way, of limits, derivatives and integrals, even solving some types of problems, but really great difficulties appear to make students reach a satisfactory understanding of the concepts involved in this area of Mathematics, in particular, the concept of definite integral or Riemann's integral. The history of the teaching of Calculus in the Engineering in Computer Science and other engineering courses shows two trends related to the order in which the *concepts of definite integral and indefinite integral are introduced and also emphasize calculations instead of conceptual lerning. The author's teaching practice for more than thirty years in this matter and the meticulous and extensive study of the work of the main national and foreign researchers in mathematical education, led to the elaboration of a sequencing of the contents for the subject of Integral Calculus which has been applied for several courses. The main result in correspondence with the proposed objective lays in the significant acquisition of the concept of definite integral and the generalizations that condition multiple integrals and vector integrals.*

Keywords: *sequence of contens; Integral calculus; Definite integral; Indefinite integral*

Introducción

La enseñanza tradicional del Cálculo, la cual prevalece aún en los programas de esta disciplina en no pocas carreras de ingeniería, tiende a centrarse en lo algorítmico y algebraico y en consecuencia a evaluar las habilidades adquiridas por estudiantes en este sentido. Basta revisar programas de Matemática, no solo en los planes D, también en la actual generación, los planes E, para constatar el predominio de las horas dedicadas a enseñar a calcular límites, derivadas e integrales. De acuerdo con Artigue (1995), la matemática no es algo que "está ahí y hay que descubrir", más bien tiene que ser construida por el matemático en función de sus necesidades. Es por eso necesario organizar la enseñanza aprendizaje alrededor de algunos problemas importantes y no de gran complejidad, equilibrar lo cuantitativo y lo cualitativo, apoyarse en situaciones sencillas y conocidas por el alumno como por ejemplo problemas geométricos y físicos y en lo adelante tomarlos como referencia y solo teorizar lo necesario de acuerdo al nivel que se pretende alcanzar en los estudiantes para finalmente llevar el aprendizaje a un enfoque más constructivo (Artigue, 1995).

Haciendo referencia a los criterios de la prestigiosa investigadora de la escuela francesa en educación matemática, Michel Artigue, Crisóstomo (2005) dice, lo cual subscribe el autor, que la enseñanza tradicional del Cálculo la cual conlleva un excesivo uso de lo algebraico, que resalta el predominio en la manipulación de fórmulas en lugar de las funciones; el cálculo de derivadas por encima de la interpretación conceptual y las aproximaciones lineales; el cálculo de primitivas (integral indefinida) en lugar de la búsqueda de significados de este concepto.

Los conceptos del Cálculo encuentran en los estudiantes muchas dificultades para su aprendizaje durante los estudios universitarios, en particular de ingeniería. El concepto de integral definida es uno de los más importantes que encontrará el estudiante por lo cual debe alcanzar un alto dominio del mismo. Serhan (2015) de acuerdo con varios investigadores del tema, indica que los estudiantes tienen tantas dificultades en la comprensión del concepto de integra definida como como en el de función, el límite o la derivada y que a mayor dificultad está en la capacidad de establecer la conexión entre lo procedimental y lo conceptual.

No pocos programas de la disciplina que incluyen el Cálculo inician el estudio del Cálculo Integral por la integral indefinida, incluso el autor en sus inicios siguió esa tendencia producto de su inexperiencia docente y débil conocimiento aún sobre esta materia y también porque en el programa se presentaba de esta forma. El estudio, la investigación, el cotejo con los resultados de investigadores relevantes en educación matemática y sobre todo por el propio convencimiento y evolución académica, justifican que se presente una fundamentación científicamente avalada, de una secuenciación de contenidos en que el orden en la introducción del concepto de integral definida ocupe el lugar que le corresponde. Además, se pretende y logra en esta secuencia que los cálculos sean los mínimos necesarios en un siglo donde la evolución tecnológica y científica no justifica que los estudiantes de ingeniería pasen un tiempo desproporcionado aprendiendo y realizando cálculos numéricos y gráficos, manualmente.

Materiales y métodos

Los resultados del presente trabajo de investigación se derivan de dos fuentes principales, la primera es la práctica docente del autor, con formación inicial de licenciatura en educación, imparte matemática en el nivel universitario desde 1984 a carreras como Economía, Contabilidad y Finanzas, Mecánica, Industrial y en los últimos 19 años a Informática, no solo impartiendo Cálculo, también Modelación Matemática, Estadística, Análisis Numérico, Álgebra Lineal, Investigación de Operaciones entre otras. En particular, desarrollar la docencia en los temas del Cálculo Infinitesimal por más de 25 cursos permitió evolucionar desde la enseñanza tradicional con un *calculismo* elevado, hasta una enseñanza conceptual basada en los significados de los conceptos y su aplicabilidad, hasta donde los programas y documentos normativos de la disciplina lo han permitido. La otra fuente está en el estudio amplio, exhaustivo de la literatura disponible sobre el tema, comenzando por los trabajos de la escuela francesa y su Ingeniería Didáctica, los trabajos de David Tall sobre el pensamiento matemático avanzado en la década de los 90, hasta los investigadores de matemática educativa más contemporáneos.

La secuencia a presentar ha sido incluida en varios de los programas de Matemática en la asignatura que incluye el cálculo integral, en todas las ocasiones en que han sido elaborados y dirigidos por el autor desde el trabajo en la carrera de Ingeniería Mecánica en la Universidad “Carlos Rafael Rodríguez” de Cienfuegos, en la carrera de

Serie Científica de la Universidad de las Ciencias Informáticas
Vol. 13, No. 11, Mes Noviembre, 2020
ISSN: 2306-2495| RNPS: 2343
Pág. 65-83
http://publicaciones.uci.cu

Ingeniería de Ciencias Informáticas (ICI) de la universidad homónima, en la carrera de licenciatura en educación, especialidad Matemática del Instituto de Ciencias de la Educación de Cuanza Sul, Angola. En proyección, para el programa de Matemática II del Plan E de la carrera ICI. Antes de presentar la secuenciación de contenidos, es importante, aunque de manera sucinta, exponer aspectos sobre el surgimiento y desarrollo del cálculo integral y su evolución en la enseñanza.

El origen del Cálculo integral

Respondiendo a la necesidad de resolver los problemas geométricos que surgían, lo que conocemos hoy como cálculo integral, emergió tres siglos antes de nuestra era, las primeras evidencias de uso de lo que conocemos hoy como cálculo integral, fueron los trabajos de Arquímedes de Siracusa (287-212 Ac) quien usando el método exhaustivo de Eudoxo (408-355, Ac) aproximó el área del círculo e incluso de segmentos parabólicos, también el volumen de una esfera, entre otros (Ríbnikov, 1991), dividiendo estas figuras en otras para las cuales se conocía cómo calcular el área.
Simon Stevin (1548-1620) revivió el interés por tales métodos para resolver algunos problemas físicos, en particular relacionados con el cálculo de centros de gravedad, pero lo sustituyó por un método directo dando un paso importante hacia el concepto matemático de límite. Arquímedes basaba su cálculo, por ejemplo, del área de un segmento de parábola, demostrando que esa magnitud buscada Q era igual a otra B probando que las proposiciones Q<B y B>Q eran absurdas; Stevin establecía que A=Q si su diferencia se podía hacer menor que cualquier cantidad arbitrariamente pequeña (Ríbnikov, 1991), procedimiento más cerca de lo que después fue la teoría de límites.

Veinte siglos después de Arquímedes, la Matemática tuvo un auge vertiginoso, quizás aupada por los avances y descubrimientos científicos y tecnológicos del momento que necesitaban de herramientas que permitieran su evolución, incrementó el interés de los matemáticos por dar pruebas rigurosas, este afán logró el avance necesario hacia el desarrollo del Cálculo Infinitesimal (Ríbnikov, 1991).

Inició el siglo XVII Kepler (1561-1630), interesado en problemas del cálculo de volúmenes y el estudio del movimiento de los planetas que lo condujo a un método para encontrar el área de sectores de una elipse mediante sumas de polígonos con base infinitamente pequeñas. La relación de "gigantes" sobre cuyos hombros se apoyó Isaac Newton, al decir del propio genio, sigue con Galileo Galilei (1571-1630) primero

Serie Científica de la Universidad de las Ciencias Informáticas
Vol. 13, No. 11, Mes Noviembre, 2020
ISSN: 2306-2495| RNPS: 2343
Pág. 65-83
http://publicaciones.uci.cu

en relacionar el área bajo la curva tiempo-velocidad con la distancia, su discípulo Bonaventura Cavalieri (1598-1647) con la idea basada en las de Kepler, de que un área está formada por segmentos indivisibles. Pierre de Fermat(1601-1665) también trabajó de manera similar el cálculo de áreas entre curvas, grandes aportes también hicieron Grégoire de Saint-Vicent (1584-1667), Marin Mercenne (1588-1648), John Wallis (1616-1703) e Isaac Barrow (1630-16779) quien llegó a mostrar una forma geométrica de lo que después llegó a ser el teorema fundamental del cálculo (Ríbnikov, 1991), la fórmula que se usa en este teorema para el cálculo de integrales definidas se conoce usualmente como “fórmula de Barrow”:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad \text{con} \quad F'(x) = f(x)$$

En el último cuarto del siglo XVII, sobre los hombros de tales “gigantes”, Isaac Newton (1642-1727), inglés y Gottfried Leibniz (1646-1716), alemán, trabajando en paralelo, pero de manera independiente, descubrieron o sería mejor decir, crearon, lo que conocemos hoy como el “Cálculo Infinitesimal”. Definieron los conceptos de derivada e integral, establecieron las primeras reglas de derivación y mostraron que ambos procesos eran inversos. Newton creó reglas para resolver problemas de tangentes, cuadraturas, máximos y mínimos, introdujo los conceptos de fluente (variable en función del tiempo) y fluxión (derivada en función del tiempo), Leibniz publicó sus resultados primero y tiene el mérito adicional de que la notación que introdujo es la que se utiliza hasta hoy (Ríbnikov, 1991).

Matemáticos de la talla de Johann Bernoulli (1667-1748), primero en escribir un curso de cálculo integral y utilizarlas para resolver exitosamente muchas ecuaciones diferenciales y Leonard Euler (1707-1783), quien logró llevar las técnicas de integración a niveles similares a los actuales estableciendo muchos de los métodos para determinar primitivas tales como los conocemos hoy, hicieron que el Cálculo adquiriera en el siglo XIX además con los trabajos de Augustin Louis Cauchy (1789-1857) una más adecuada fundamentación a partir del desarrollo de los límites, estableciendo la integral como el límite analítico, no geométrico de sumas parciales.

Bernhard Riemann (1826-1866) se encargó de formalizar rigurosamente la integración para todas las funciones acotadas, aún con discontinuidades, en un intervalo acotado, empleando límites. Posteriormente el cálculo integral ha tenido un desarrollo ascendente en el que se consideraron funciones más generalmente definidas para las cuales es aplicable la definición de Riemann, dando lugar a otras definiciones de integral (Ríbnikov, 1991).

¿Por qué el ingeniero en ciencias informáticas debe aprender cálculo integral?

La pregunta más general estaría relacionada con la Matemática y no solo con el Cálculo Integral, en este sentido cabe preguntar si la enseñanza de esta ciencia está actualmente a la altura de los desafíos que enfrenta la ingeniería del siglo XXI. No hay duda alguna en los investigadores del tema que el Cálculo Infinitesimal es imprescindible en la formación de un ingeniero, dentro del cual se encuentra el cálculo integral, objeto de este trabajo. Mas, ¿cuál es la apreciación sobre el interés de los estudiantes de ingeniería sobre este asunto?

De acuerdo con Loch y Lamborn, (2016), los estudiantes de ingeniería de los primeros años se muestran más interesados en los asuntos que tienen que ver con la ingeniería que con la matemática y en los estudiantes de Informática esta cuestión se acentúa debido a las motivaciones que generalmente los llevan a escoger esta carrera, debido al auge y popularidad de estas tecnologías. A esta situación contribuye el hecho de que los profesores de matemática frecuentemente “piensan matemáticamente”, no presentan con acierto la importancia y aplicaciones de esta ciencia para la ingeniería, informática en este caso. Históricamente, el propósito de integrar la matemática a la ingeniería ha sido un tema de arduo trabajo y desarrollo de ideas para la forma de hacerlo, dos tendencias han prevalecido, una que lleva al profesor de matemática al estudio de las materias ingenieriles y el otro en que los profesores de las disciplinas ingenieriles aplican los contenidos matemáticos, lo cual presupone un problema si los profesores de matemáticas no son ingenieros y si los profesores ingenieros no se encuentran bien preparados en los temas matemáticos. Otra solución es que desde el currículo se integre más la matemática al resto de las disiciplinas. El autor coincide con Cardella, (2008) y Schoenfeld (1992) en que la enseñanza de la matemática, en este caso, el cálculo integral, debe moverse hacia el desarrollo del “pensamiento matemático” más que al desarrollo de habilidades de cálculo y la acumulación de procedimientos para resolver ejercicios. El desarrollo del pensamiento matemático no solo involucra el contenido matemático, también las estrategias para resolver problemas, procesos metacognitivos, creencias, afectos y prácticas (Cardella, 2008). Las fórmulas y procedimientos de cálculo se olvidan rápidamente, son memorizadas generalmente para tener éxito en los exámenes, que usualmente miden prevalentemente esas habilidades.

Serie Científica de la Universidad de las Ciencias Informáticas
Vol. 13, No. 11, Mes Noviembre, 2020
ISSN: 2306-2495| RNPS: 2343
Pág. 65-83
http://publicaciones.uci.cu

Marta de Melo (2003, p.54), asume la definición de ingeniero como una profesión en que “los conocimientos matemáticos … se aplican con juicio para desarrollar diversas formas de utilizar, de una forma económica, las fuerzas y materiales de la naturaleza …”. El *ingeniero en ciencias informáticas* es un profesional que aplica sus conocimientos en el proceso de transformación digital de las organizaciones, para lo cual ejecuta acciones como la mejora de procesos organizacionales, que conlleva entre otras tareas la toma de decisiones y la racionalización u optimización de estos procesos y los recursos asociados (Plan de Estudio E, 2019). Para el desarrollo de tales habilidades es imprescindible el estudio de ciertos tópicos de matemática.

De acuerdo con los campos de acción descritos en el Plan de Estudios E (2019), la esencia en su formación está en las disciplinas *Ingeniería y Gestión de Software* que incluye las Bases de Datos, *Técnica de Programación de Computadoras*, *Inteligencia Computacional*, *Sistemas Digitales* y la disciplina integradora *Práctica Profesional*, el resto de las disciplinas contribuyen a la formación ingenieril. En el plan E elaborado y aprobado en 2019 se recoge la aspiración de que el futuro ingeniero adquiera una sólida formación en las ciencias básicas, dentro de las cuales está la Matemática en general y el Cálculo en particular, además incluye como en planes anteriores la interdisciplinaridad y la *transdisciplinaridad*, que entendidas correctamente lleva a la conclusión de que esta formación *fuerte* en las ciencias básicas no es solo tarea de las disciplinas que las incluyen. Si quiere lograrse la esencialidad pretendida en una carrera que en su periodo lectivo cuenta con solo siete semestres, teniendo en cuenta que el octavo semestre se dedica al ejercicio de culminación de estudios, entonces las ciencias básicas como la Matemática deben proveer las bases conceptuales y procedimentales que en las disciplinas específicas tienen que ser desarrolladas, en el caso de la Matemática, como se ha asumido antes, debe prevalecer el desarrollo del *pensamiento matemático*. Habilidades declaradas en el Plan de Estudios E (2019), tales como, “… tomar decisiones basadas en datos y gestionar conocimiento.” y “… racionalizar u optimizar sus procesos y recursos, …” necesariamente precisan del empleo de un pensamiento matemático.

En referencia al concepto de integral de Riemann, si el alumno comprende bien este concepto y su caracterización geométrica, esto es, su relación con el área de figuras planas, cuando estudie en las clases de *Programación* el análisis de algoritmos podrá comprender con más facilidad el uso de integrales para acotar el tiempo de ejecución de estos, pero el profesor de programación tiene que saber hasta donde el estudiante tiene conocimientos sobre esa temática, cómo fue el proceso de enseñanza aprendizaje y dar continuidad al mismo, usualmente se critica al estudiante cundo no recuerda la regla para el cálculo, en este caso de la integral, cuando lo importante es que recuerde y se le recuerde

Serie Científica de la Universidad de las Ciencias Informáticas
Vol. 13, No. 11, Mes Noviembre, 2020
ISSN: 2306-2495| RNPS: 2343
Pág. 65-83
http://publicaciones.uci.cu

la interpretación del ente matemático en cuestión. En el libro de texto básico para la disciplina Técnicas de Programación de computadoras se describe, entre las técnicas para acotar las sumas que sirven para estimar el tiempo de ejecución de un algoritmo, una que emplea integrales, en particular la interpretación geométrica de la integral definida como área de una figura plana bajo una curva, llevando a lo *continuo* un problema discreto.

Desde la disciplina de Matemática también se contribuye al desarrollo de habilidades declaradas en casi todas las disciplinas como las que tienen que ver con el uso de las tecnologías de la información y comunicaciones, procesamiento de la información, desarrollo del pensamiento lógico y algorítmico, lo investigativo, expresión oral y escrita, modelación, resolución de problemas, entre otros.

La disciplina Matemática, dentro de la cual se encuentra la temática objeto de este trabajo, el cálculo integral, está dentro del dominio de lo continuo, pero es conocido que las computadoras son objetos finitos, ellas tratan con números enteros, con una cantidad finita de ellos, en lugar de números reales, trabajan con números de punto flotante (Franklin, 2017). Los temas relacionados con la matemática discreta, ahora incluidos en la disciplina Inteligencia Computacional (Plan E, 2019), aparecen en cualquier búsqueda de las matemáticas necesarias para la computación, entre ellas teoría de conjuntos y relaciones binarias, sistemas de numeración, lógica, combinatoria, grafos y relaciones de recurrencia, pero también aparecen algunos temas de las matemáticas "continuas", en particular del Cálculo Diferencia e Integral. El desarrollo de las computadoras digitales hizo más claro ver que los procesos continuos pueden ser realizados a través de aproximaciones discretas, para eso fueron inventadas, Franklin (2017, p. 363), resume en su obra que "… el continuo es más fácil de imaginar y de probar los resultados, pero lo discreto es inevitable cuando viene con los cálculos". Esta razón sería suficiente para comprender que en la ingeniería informática es imprescindible el estudio de temas tales como el cálculo integral.

El proceso de enseñanza aprendizaje del Cálculo Integral

El desarrollo de este trabajo se concentrará en tres líneas, fundamentación del orden en la presentación de la integral definida con respecto a la integral indefinida, la prevalencia de los cálculos, uso de fórmulas y métodos de integración frente a un aprendizaje conceptual y con predominio cualitativo en los análisis gráficos y numéricos, y la secuencia misma para la enseñanza del tema Cálculo Integral en la carrera de ingeniería en ciencias informáticas en general.

Serie Científica de la Universidad de las Ciencias Informáticas
Vol. 13, No. 11, Mes Noviembre, 2020
ISSN: 2306-2495| RNPS: 2343
Pág. 65-83
http://publicaciones.uci.cu

Si tener presente la historia y evolución del conocimiento, en este caso del cálculo integral, es importante, también resulta cierto que en el proceso de enseñanza aprendizaje no siempre es conveniente seguir linealmente esa evolución. El predominio manifiesto en casi todos los libros clásicos de Cálculo y en muchos programas universitarios, de la comenzar con el estudio de la integral indefinida y solo después introducir la integral definida tiene su origen nada menos que con Newton y Leibniz, que con el teorema fundamental del cálculo que relaciona la derivada con la integral, redujeron el cálculo de la integral definida a la búsqueda de primitivas (Fernández, 2011).

De acuerdo con Fernández (2011), este autor considera que no debe ser así. Si bien una vez conocido el cálculo diferencial y el cálculo de la derivada de una función como *operación*, puede ser introducido el concepto de *antiderivada*, en un sentido similar al que puede ser *antilogaritmo* o *antimultiplicación*, es decir, una operación inversa, introducir la integral indefinida como operación para el cálculo de primitivas, esto es, *antiderivadas*, presupone un obstáculo para la asimilación del concepto de integral definida, pues el estudiante y peor, el profesor, tenderá a reducir el trabajo con tan importante concepto, al cálculo aplicando la regla de Barrow. Comenzar con la integral indefinida presupone introducir el operador $\int$ que tiene su origen en que se usa para la integral definida, precisamente para establecer la relación entre ambas.

Introducir el concepto de integral definida para iniciar el estudio del Cálculo integral, partiendo de problemas geométricos y físicos permitirá que el aprendizaje se centre en la interpretación del concepto desde lo numérico, lo geométrico y lo analítico en el proceso de análisis de límite de sumas. Aun cuando ya es introducido el teorema fundamental del cálculo, el profesor no debe apurarse en comenzar los cálculos de primitivas, este autor considera y ha aplicado por muchos años en su práctica docente, que primero de afianzarse el concepto, resolviendo problemas geométricos y físicos, de manera similar a como debe ser enseñado y aprendido el concepto de derivada. La necesidad de realizar el cálculo de primitivas debe subyacer durante ese tiempo en que el estudiante, mediante la resolución de problemas en los que se aplica el concepto de integral, asimila hasta un nivel de comprensión alto este concepto, lo cual conlleva pasar por sus propiedades, condiciones de existencia y unicidad, interpretación geométrica, física y en este caso también computacional. Mientras, el profesor cuando sea necesario para resolver determinado problema, puede proveer las primitivas necesarias o utilizar con este fin el mismo asistente matemático que ya debe estar empleando en todo el proceso anterior. La integral indefinida, más que como operador de cálculo de primitivas debe presentarse en su interpretación como familia de funciones que tienen como derivada a otra función, llevarlo a la interpretación de la derivada, de la solución de ecuaciones diferenciales.

En los libros de texto usualmente empleados como textos básicos o complementarios en las asignaturas de la matemática para ingeniería hay una evolución hacia la variante de comenzar con los problemas que llevan al concepto de integral definida y solo posteriormente a la introducción del teorema fundamental del cálculo se presenta la integral indefinida, por ejemplo, así ocurre con el libro que usa la carrera de ingeniería en ciencias informáticas y otras ingenieras en Cuba, Cálculo con Trascendentes Tempranas de James Stewart, en el cual, después incluso del capítulo dedicado a las principales aplicaciones de la integral definida incluye uno dedicado a las técnicas de integración. En este libro, aunque hay una cantidad considerable de problemas que implican aplicar la interpretación de los conceptos y sus propiedades, todavía prevalece un alto nivel de técnicas de cálculo y uso de fórmulas (Stewart, 2002). En los libros de Cálculo que se consideran clásicos, de autores como Frank Ayres, Demidovich, Piskunov, Apostol, Kudriavsev, Krasnov, entre otros, prevalece la variante de comenzar con la integral indefinida y también prevale el espacio dedicado a explicar profusamente las técnicas de cálculo, estos textos conservan su valor teórico y de rigor matemático, son útiles para consultar, profundizar, pero el autor considera que están desactualizados para ser empleados en cursos de ingeniería como texto principal o básico.

¿Hasta dónde es necesario desarrollar habilidades de cálculo manual en un estudiante de ingeniería?, el autor considera que la pregunta así formulada tiene un pequeño detalle a corregir y tiene que ver con la palabra “manual”, que indica el no uso de la tecnología computacional, pero ¿acaso podrá negarse el impacto de las tecnologías actuales en la docencia?, no, todo profesor lo reconoce, pero otra cuestión es aplicarlo. Cuando los planes de estudio E imponen que sea lo esencial de la materia, lo imprescindiblemente necesario lo que deba llevarse al pregrado de una carrera que en lo lectivo tiene solo siete semestres, los programas de matemática, en este caso las asignaturas que incluyen los temas del cálculo diferencial e integral, deben contemplar la prevalencia del empleo de medios de computo simbólico, numérico y gráfico en el proceso de enseñanza aprendizaje, de manera que el proceso de aprendizaje se concentre en lo esencial que significa centrarse en el aprendizaje conceptual y el desarrolle del pensamiento matemático.

Resultados y discusión

El resultado de este análisis y de la evolución académica del autor es una secuenciación de contenidos, empleada en los términos de Del Carmen (1996), para el tema de cálculo integral en la carrera de ingeniería en ciencias informáticas con las características fundamentales siguientes:

- El concepto de integral definida prevalece sobre el de integral indefinida, esta última es tratada principalmente como operador de cálculo, aunque se trata también su interpretación geométrica,
- Al concepto de integral definida se llega a partir de problemas geométricos y físicos,
- Los cálculos “manuales” pasan a un plano secundario, potenciando el uso de medios de computo a través de asistentes matemáticos que pueden emplearse no solo en computadoras personales y laptops, también en tabletas y teléfonos inteligentes,
- El escalamiento mediante la generalización del concepto de integral definida a integrales sobre el plano (Dobles), sobre curvas (de línea), sobre el espacio (triples),
- Prevalece el propósito de que prevalezca el desarrollo del pensamiento matemático a través del aprendizaje conceptual y la resolución de problemas.

PRIMERA ETAPA: La integral definida.

Es la parte principal en el estudio de la integral de Riemann, es el momento donde se introduce el concepto de integral que después será *generalizado* a otros dominios, es decir, una vez comprendido el concepto de integral de una función real de una variable real, como el límite de una suma de Riemann, puede generalizarse a funciones reales de dos y tres variables reales y a funciones vectoriales en el plano y en el espacio. También a partir del concepto de integral definida pueden ser identificados otros problemas que se resuelven modelando con una suma de Riemann. Por otro lado, en esta etapa se establece la relación entre la diferenciación y la integración, lo cual abre aun más el espectro de aplicaciones del Cálculo Integral. No es d menos importancia el hecho de que para realizar el cálculo de cualquiera de los *tipos* de integrales de Riemann, se reduce el problema al cálculo de una integral definida o de varias integrales definidas sucesivas. Por estas razones se explicará esta etapa en varias fases.

Fase I: La preparación para la introducción del concepto de integral definida.

Comenzar por una breve introducción histórica sobre algunos de los problemas de *cuadraturas* (relacionados con el cálculo de áreas) y *curvaturas* (relacionados con el cálculo de volúmenes) planteados en la antigüedad y trabajados magistralmente por Arquímedes de Siracusa (285-212 a. C.), con el objetivo de familiarizar a los alumnos con los problemas que están en la génesis del Cálculo Integral. Estos problemas surgieron ante la necesidad de calcular el área de superficies, la longitud de curvas y el volumen de cuerpos utilizando figuras o cuerpos más simples de manera que el área o volumen de estos fuera equivalente a la de dados en el problema (Sánchez y Valdés, 2011).
Para profundizar al alumno debe orientársele investigar sobre eta etapa de lo que puede llamarse *protocálculo* integral.

Introducir el problema del cálculo del área de una región plana limitada por una curva que es la gráfica de una función y el eje de las abscisas en un intervalo cerrado. Se utiliza un problema simple como el ejemplo 1 de la página 360 (Stewart, 2014), el profesor motiva a los alumnos a presentar propuestas para resolver el problema del cálculo del área de esa región, decantándose por el uso de rectángulos inscriptos y circunscriptos. Se resolverán varios ejercicios de cálculo aproximado de áreas de este tipo de regiones. Así pude generalizarse la idea del uso de figuras más simples y pedir soluciones para resolver un problema similar para el cálculo de la longitud de un segmento de curva, el volumen de un cuerpo cilíndrico, etc.

Fase II: La introducción de las sumas de Riemann y del concepto de integral definida.

Una vez que los alumnos están familiarizados con la idea de aproximar el área de una región limitada superiormente por la curva de una función en un intervalo cerrado, el terreno queda preparado para introducir las sumas de Riemann:

Serie Científica de la Universidad de las Ciencias Informáticas
Vol. 13, No. 11, Mes Noviembre, 2020
ISSN: 2306-2495| RNPS: 2343
Pág. 65-83
http://publicaciones.uci.cu

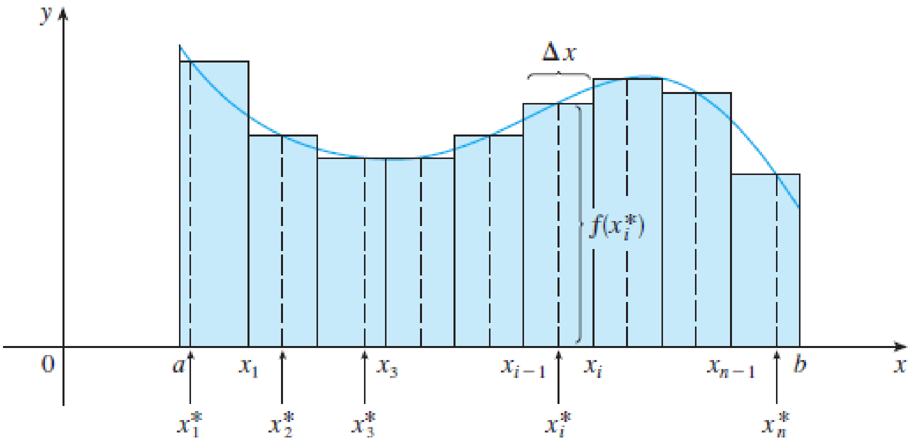

Figura 1. Área de una región segmentada en rectángulos

Fuente: Stewart, 2014, p. 365

La suma $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$ aproxima al área de la región por debajo de la curva que representa la función f, tiene como característica que en la medida que n es mayor, Δx tiende a ser menor, de hecho tiende a cero, es un infinitesimal cuando $n \to \infty$. Este tipo de sumas, para funciones continuas en un intervalo cerrado, se llaman *sumas de Riemann*. Es importante que se comprenda bien esta idea, el profesor debe utilizar medios que permitan presentar la imagen de este concepto de forma que clarifique la idea de que la suma de estos productos cuando su número tiende a infinito es un valor, que en este caso se corresponde con el área de la región dada. Solo así debe presentarse la definición de *integral definida*, según Riemann (Stewart, 2014, p. 372):

Si f es una función *continua* definida en el *intervalo cerrado* $[a, b]$, entonces la *integral definida* de f, desde a hasta b, es $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$.

Donde: $a = x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}, x_n = b$, $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$

La *integrabilidad* de una función depende entonces, según la definición, de que sea continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, más adelante, con el estudio de las propiedades de la integral definida se verá que esta condición se *suaviza* al hecho de que la función solo sea acotada, es decir, puede tener un número finito de discontinuidades de primera especie. A partir de las *anomalías* en las premisas de *integrabilidad*, se introducirán las llamadas *integrales*

Serie Científica de la Universidad de las Ciencias Informáticas
Vol. 13, No. 11, Mes Noviembre, 2020
ISSN: 2306-2495| RNPS: 2343
Pág. 65-83
http://publicaciones.uci.cu

impropias, esto es, si la función tiene un número finito de discontinuidades infinitas en $[a, b]$ o si el intervalo no es cerrado finito, es decir si al menos uno de sus extremos es infinito.

En esta fase se presentarán ejercicios y problemas que se resuelven directamente utilizando el concepto de integral definida y su interpretación geométrica y física.

Fase III: El Teorema Fundamental del Cálculo,

El Teorema Fundamental del Cálculo encierra el resultado más trascendental del estudio fundacional realizado en paralelo por Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Leibniz (1646-1716), ambos llegaron a la conclusión de que los problemas de cuadraturas de una curva y los problemas de determinación de tangentes, son uno inverso al otro, por lo que determinar el área de una región limitada por la curva de una función puede realizarse utilizando una primitiva de esa función (Sánchez y Valdés, 2011).

Con la primera parte del teorema, además de establecer la relación entre la derivada y la integral, se introduce una de las formas la llamada *integral indefinida*, menos reconocida como tal. Se trata de la función g definida como una integral con el límite superior variable, es decir, una función que representa del área de la región para valores variables del límite superior dentro del intervalo $[a, b]$, para f continua en ese intervalo, establece que (Stewart, 2014):

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt \text{ , con } x \in [a, b] \text{ es también continua en ese intervalo y derivable sobre } (a, b)$$

Mostrando la relación que realmente revolucionó el Cálculo: $g'(x) = f(x)$

No es difícil después demostrar la segunda parte del teorema donde se presenta la conocida fórmula que asombra por su aparente simpleza, para calcular una integral definida utilizando una de sus primitivas:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \text{ , donde } F'(x) = f(x)$$

En esta fase se resolverán ejercicios y problemas donde interviene la interpretación de la primera parte del teorema fundamental del cálculo y utilizando la fórmula de la segunda parte empleando funciones que a partir de las fórmulas de derivación en el Cálculo Diferencial, resulta fácil conocer de qué otra función es derivada, es decir, conocer una de sus primitivas, el resto es solo aritmética.

Fase IV: El cálculo de primitivas.

Esta fase es la de menos duración en cuanto al tiempo presencial. La exigencia de la formación moderna de ingenieros reclama el desarrollo del pensamiento matemático por encima del desarrollo de habilidades procedimentales de cálculo. Por esta razón la primera técnica para encontrar una primitiva de una función dada es preguntarse si se recuerda o se es capaz de hallar mentalmente de qué función es derivada, después enseñar cómo usar tablas para el caso en que no se cuente con un medio de computo digital. En esta fase también se aprenderá a utilizar algunos métodos sencillos para facilitar el cálculo de primitivas más con el objetivo de que los alumnos desarrollen habilidades en la aplicación de estrategias en la resolución de problemas que para el desarrollo mismo de la habilidad de cálculo en sí misma.

Fase V: Aplicaciones de la integral definida.

En esta fase se presentan para su resolución diversos problemas que se modelan y resuelven utilizando integrales definidas, geométricos, físicos, relacionados directa o indirectamente con la informática y de otras ramas de la ciencia. Se hará énfasis en que son problemas cuya estrategia de resolución se plantea como el límite de una suma de Riemann, también en la relación inversa de los procesos integrales y los procesos diferenciales.

SEGUNDA ETAPA: La integral doble

Una vez que el concepto de integral definida está incorporado al conocimiento de los alumnos, a continuación, solo hay que iniciar un proceso de generalización, para lo cual se presentarán problemas que impliquen un escalamiento en las condiciones ya conocidas. Por ejemplo, para introducir la integral doble se presenta el problema del cálculo del volumen de un cuerpo cilíndrico con base en una región limitada del plano y cuya *tapa* es parte de la superficie que representa el gráfico de una función rea de dos variables reales.

Serie Científica de la Universidad de las Ciencias Informáticas
Vol. 13, No. 11, Mes Noviembre, 2020
ISSN: 2306-2495| RNPS: 2343
Pág. 65-83
http://publicaciones.uci.cu

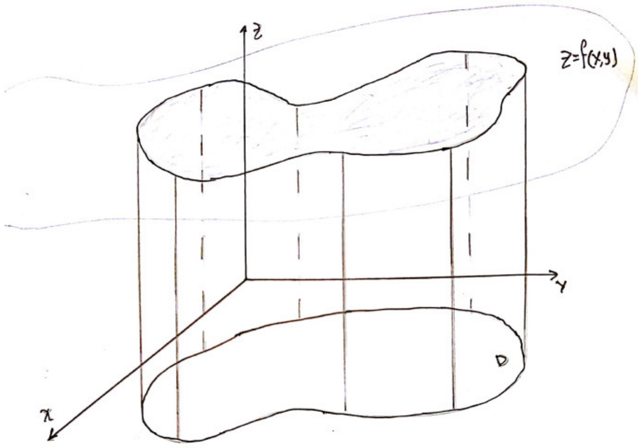

Figura 2. Cuerpo cilíndrico

Fuente: elaborado por el autor

Aplicando un *proceso integral* se plantea dividir el cuerpo en otros más simples como son los prismas rectangulares rectos, para aproximar el volumen del cuerpo basta con sumar el volumen de una cantidad $m \times m$ de estos prismas:

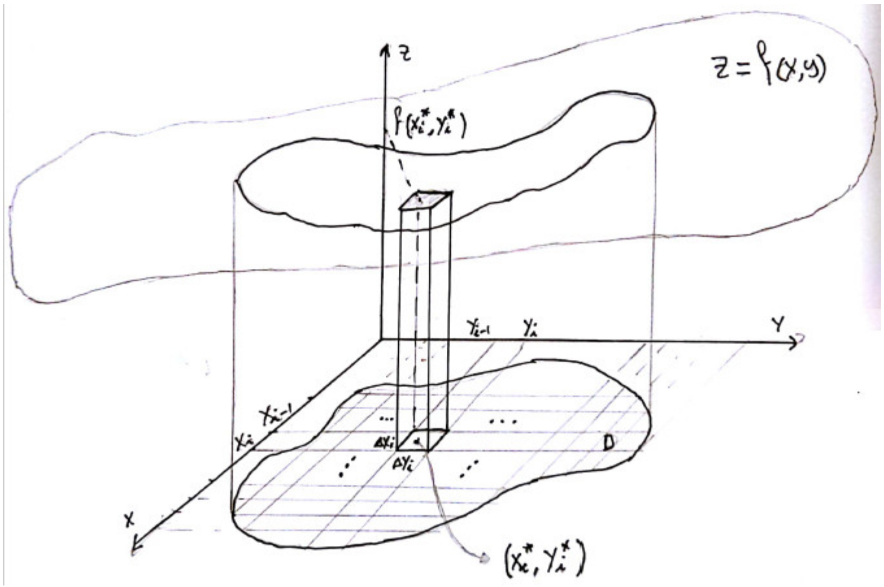

Figura 3. Volumen de cuerpo cilíndrico, segmentación en prismas rectangulares

Fuente: elaborado por el autor

Serie Científica de la Universidad de las Ciencias Informáticas
Vol. 13, No. 11, Mes Noviembre, 2020
ISSN: 2306-2495| RNPS: 2343
Pág. 65-83
http://publicaciones.uci.cu

La suma de Riemann obtenida es en realidad una suma doble $V \approx \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*)\Delta x_i \Delta y_j$, así puede definirse entonces a la *integral doble*: $\iint_D f(x,y)dxdy = \lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*)\Delta x_i \Delta y_j$, donde f es continua sobre la región cerrada D.

Se presenta el cálculo de las integrales dobles como una reducción al cálculo de integrales definidas sucesivas, que representan en el continuo la doble suma, los límites de estas integrales cubren todos y solo a los puntos de la región D. Una vez establecido el procedimiento de cálculo se introducen las aplicaciones relacionadas con la geometría, la física y otras, siempre teniendo en cuenta que la integral doble es una generalización de la integral definida y por tanto debe aprovecharse esta relación en el contexto de cada problema.

TERCERA ETAPA: Otras generalizaciones de la integral de Riemann

Debido a que el programa de la disciplina en el Plan E solo contempla llegar hasta las integrales dobles, el autor considera importante que los alumnos *cierren* el tema con un breve resumen sobre algunas otras generalizaciones de la integral de Riemann que en los textos referentes a este contenido se reconocen como otros *tipos de integrales*, estas son: la integral triple, las integrales de línea y de superficie (escalares) y las integrales vectoriales. El profesor puede decidir la modalidad en que serán introducidas, pero se recomienda utilizar el seminario.

Conclusiones

A partir del estudio realizado del programa de la disciplina de Matemática y la necesidad de estructurar dentro de la asignatura Matemática II el tema de Cálculo Integral, se logró una secuencia de los contenidos esenciales sobre la temática, la cual inserta elementos novedosos teniendo en cuanta las tendencias en la enseñanza del Cálculo y la experiencia del autor en el proceso de enseñanza aprendizaje de esta área de la matemática. Este resultado contribuye a garantizar en la disciplina y en específico en la asignatura Matemática II la esencialidad necesaria y la modernidad para que los alumnos adquieran las habilidades que se precisan en su formación como ingenieros en ciencias informáticas.

Referencias

ARTIGUE, M. La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En: Pedro Gómez (editor). Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. México: Grupo Editorial Iberoamericano, 1995, p. 97-140.

CARDELLA, M.Which mathematics should we teach engineering students? An empirically grounded case for a broad notion of mathematical thinking. Teaching Mathematics and its Applications, 2008. 27(3): p. 150-159.

CORMEN, Thomas, LEISERSON, Charles, RIVEST, Ronald y STEIN, Clifford. Introduction to Algorithms. Massachusetts, The MIT Press. 2009. p. 984

CRISOSTOMO, E. Reconstrucción del significado global de la integral definida. Investigación en Didáctica de la Matemática. En: Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén. 2005, pp. 125-166.

DEL CARMEN, Luís. El análisis y secuenciación de los contenidos educativos. Cuadernos de Educación, 1996, 21, Barcelona. Editorial Horsori. 1996. p. 207

FERNÁNDEZ, L. La historia como herramienta didáctica: el concepto de integral. Tesis de Maestría. Universidad de Cantabria. 2011.

FRANKLIN, J. "Discrete and Continuous: A Fundamental Dichotomy in Mathematics," Journal of Humanistic Mathematics, 7, (2), 2017, p.355-378. Disponible en: https://scholarship.claremont.edu/jhm/vol7/iss2/18

LOCH, Birgit y LAMBORN, Julia. How to make mathematics relevant to first-year engineering students: perceptions of students on student-produced resources, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 2016, 47 (1), p. 29-44

MELO DE ALONSO, Martha C. Las matemáticas en la ingeniería a través de la historia. Ciencia e Ingeniería Neogranadina [en linea]. 2003, (13), 53-60 [fecha de Consulta 18 de Junio de 2020]. Disponible en: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=91101306.

RIBNIKOV, K. Historia de las Matemáticas. Moscú. Editorial MIR. 1991. p. 487

SÁNCHEZ, C. y VALDÉS, C. Introducción al Análisis Mtemático. La Habana, Félix Varela, 2011. 269 p.

SCHOENFELD, A. H. Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sensemaking in mathematics, in Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning, D. Grouws, Editor 1992, MacMillan: New York. p. 334-370.

SERHAN, D. Students' understanding of the definite integral concept. En: International Journal of Research in Education and Science (IJRES), 2015, 1(1), 84-88.

STEWART, James. Cálculo con Trascendentes Tempranas. México. Cengage Learning. 2014. p. 1368.