ARTIGOS

O pensamento conceitual de fração: o modo de organização do ensino davydoviano

Daiane de Freitas[1]
ORCID: 0000-0002-9200-6033
Ademir Damazio[1]
ORCID: 0000-0002-6755-3377

Resumo

Este artigo se apresenta no contexto de organização do ensino numa perspectiva materialista histórica e dialética. Mais especificamente, sua referência é o ensino desenvolvimental, proposto por Davýdov e seus colaboradores. A delimitação se expressa na seguinte questão de pesquisa: quais as manifestações do movimento do pensamento conceitual de fração nas tarefas particulares do livro didático e de orientação ao professor, quando a referência é o modo davydoviano de organização do ensino? Nesta pesquisa bibliográfica, os dados de análise tomam como amostra cinco tarefas particulares extraídas do livro didático do 5º ano, baseadas na proposição de Davýdov, acompanhadas pelo livro de orientação ao professor. As três primeiras tarefas explicitam o movimento de redução do concreto ao abstrato; as demais revelam o movimento do pensamento de ascensão do abstrato ao concreto. O estudo revela que os processos de redução e ascensão direcionam o pensamento para a apropriação das relações essenciais que constituem o conceito de fração. A essência se manifesta no problema de medição, gerador da necessidade de subdivisão da unidade de medida, que constituirá a unidade intermediária. Os dois movimentos se caracterizam por processos mediados que levam o pensamento à abstração e à generalização das conexões internas constituintes da lei e da causa do conceito.

Palavras-chaves

Fração – Proposição davydoviana – Movimentos do pensamento.

1- Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, SC, Brasil. Contatos: daydfreitas@hotmail.com; addamazio71@gmail.com

https://doi.org/10.1590/S1678-4634202248236913por

Conceptual thinking of fractions: the Davydovian mode of teaching organization

Abstract

This article was produced in the context of teaching organization from a historical and dialectic perspective. More specifically, its main reference is the developmental teaching proposed by Davýdov and his collaborators. The specification can be expressed in the following research question: what are the manifestations of the movement of conceptual thinking of fractions in the particular tasks in textbooks and teacher's guides, when their reference is the Davydovian mode of teaching organization? In this bibliographical research, the analyzed data represents a sample of five particular tasks taken from the 5th Year textbook, based on Davýdov's proposal and accompanied by the teacher's guide. The first three tasks reveal the movement of reduction from the concrete to the abstract; the remaining tasks reveal the movement of thought as an ascension from the abstract to the concrete. This study reveals that the processes of reduction and ascension direct thinking towards the acquisition of the essential relations constituting the concept of fractions. Essence manifests in the measurement problem which creates the need for a division of the unit of measurement that will establish an intermediary unit. Both movements are characterized by mediated processes leading thinking into the abstraction and generalization of the inner connections constituting the law and cause of the concept.

Keywords

Fraction – Davydovian proposal – Thought movements.

Introdução

Este estudo trata do movimento do pensamento expresso na proposição de ensino de Davýdov[2] e colaboradores, para a apropriação do sistema conceitual de fração. Está vinculado a um projeto mais amplo que tem como enfoque o modo de organização do ensino para a formação e apropriação dos conceitos matemáticos, fundamentado na teoria histórico-cultural. Entre os estudiosos que se dedicaram à organização do ensino, a referência é Davýdov, psicólogo e educador russo, que se preocupou com a objetivação dos pressupostos teóricos do materialismo histórico e dialético em uma proposta de ensino. Ele e uma equipe interdisciplinar de colaboradores dedicaram mais de 40 anos a pesquisas, com vistas à formulação da "teoria do ensino desenvolvimental", para propiciar aos estudantes o desenvolvimento do pensamento teórico (LIBÂNEO; FREITAS, 2013). Suas conclusões evidenciaram que tanto o conteúdo quanto o método, que compõem o currículo de seu país, a Rússia, não atendiam às condições necessárias para o desenvolvimento intelectual

2- Utilizaremos a grafia Davýdov, porém, quando se tratar de referência, será preservada a escrita original.

teórico dos estudantes. O ensino desenvolvido até aquele momento se fundamentava nos princípios didáticos da escola tradicional[3], que buscava cultivar nos estudantes um tipo de pensamento, o empírico. Tal apropriação segue a lógica formal e tem por base o caráter visual, cujos processos de abstração e de generalização se inferem da percepção empírica do objeto, por via da observação imediata do material concreto dado visualmente e captado sensorialmente (DAVÍDOV, 1988).

Na busca pela superação do pensamento empírico, Davýdov (1982) apresenta uma proposta de ensino orientada para o desenvolvimento da atividade de estudo, cujo conteúdo se volta para a formação do pensamento teórico dos estudantes. Essa forma de pensamento exige, por parte deles, a elaboração de abstrações e generalizações teóricas, formadas mediante a apropriação dos conceitos científicos.

Conforme Davídov (1988), o processo de apropriação incide no desenvolvimento dos movimentos de redução do concreto ao abstrato e de ascensão do abstrato ao concreto. O movimento de redução atua como ponto de partida, uma vez que, propicia no processo de cognição a elevação do pensamento – por via de abstrações e generalizações teóricas – do concreto sensível para sua base universal (abstrata). Tendo revelado a base universal, o pensamento segue da definição abstrata para a reprodução da diversidade dos fenômenos concretos (ROSENTAL, 1962).

É nesse âmbito conceitual que se define o objeto de investigação deste estudo: o movimento do pensamento – de redução e de ascensão – para a apropriação do sistema conceitual de fração, com base nas tarefas propostas nos livros em análise. A justificativa está na ausência de estudos – realizados na mesma perspectiva teórica histórico-cultural – que tratam do movimento de ascensão do abstrato ao concreto no ensino do referido conceito.

Elementos tangenciais estão nas pesquisas de Amorim (2007), que desenvolveu uma sequência de tarefas para estudar o modo como os estudantes se apropriam do sistema conceitual de fração e suas operações; de Santos (2017), que estudou o movimento conceitual de fração fundamentado na lógica dialética, a partir de uma situação desencadeadora de aprendizagem; de Romeiro (2017), que tratou do movimento do pensamento teórico de professores sobre o conceito de fração, tendo como referência os sentidos que eles atribuem aos materiais didáticos na atividade de ensino; de Isidoro (2019), que pesquisou o que revelam as manifestações das acadêmicas de um curso de pedagogia sobre o modo de organização do Ensino Desenvolvimental, tendo como objeto de estudo a apropriação do conceito de fração, a partir do estudo de Santos (2017) e Freitas (2016). Como se observa nenhum desses estudos de mesma base teórica trataram, em sua centralidade, do movimento do pensamento (redução e ascensão) na análise de tarefas particulares proposta nos livros didáticos do sistema de ensino davydoviano para a apropriação do conceito de fração.

É nesse contexto, que ocorre a delimitação para o seguinte problema de pesquisa: quais as manifestações do movimento do pensamento conceitual de fração nas tarefas

3- Davídov (1987, p. 143) entende escola tradicional como o "sistema relativamente único de educação europeia, que, em primeiro lugar, se formou no período do renascimento e florescimento da produção capitalista e a qual serviu; que, em segundo lugar, foi fundamentada nos trabalhos de Ya Komenski, I. Pestalozzi, A. Diesterweg, K. Ushinski e outros pedagogos principais daquele período e que, em terceiro lugar, conservou até agora seus princípios iniciais como base para a seleção do conteúdo e os métodos de ensino na escola atual".

particulares do livro didático e de orientação ao professor, quando a referência é o modo davydoviano de organização do ensino? Para tanto, estabelecemos como objetivo geral: investigar possíveis manifestações dos referidos movimentos do pensamento para a apropriação das ideias introdutórias do conceito de fração, tendo como referência tarefas particulares de livros didáticos do sistema de ensino davydoviano.

Quanto à atualidade da proposição davydoviana, citaremos as revelações de autores como, entre muitos, Schmittau (2011) e Zuckerman *et al.* (2017).

Considerações metodológicas

O pressuposto neste estudo é o de que o processo de apropriação de conceito contempla o movimento que expressa a lógica de sua formação. Em outras palavras, não se busca simplesmente a reprodução do fenômeno tal como ele se apresenta. Em vez disso, a finalidade consiste na interpretação das leis de transição de um modelo teórico a outro, a fim de descobrir as leis gerais e universais que promovem o movimento do pensamento teórico (KOPNIN, 1978).

Vale enfatizar que a investigação se volta para a possibilidade de manifestação do movimento do pensamento conceitual no modo de ensino davydoviano, referente à introdução do conceito de fração. Para tanto, a referência para a análise foi o livro didático do 5º ano (ГОРБОВ *et al.*, 2011), especificamente o capítulo VIII, intitulado "Fração ordinária", por trazer um conjunto de "tarefas particulares" – denominação de Davídov (1988) – que explicitam a necessidade de um novo método de medição para a introdução do referido conceito. Além disso, aparece no livro de orientação ao professor (ГОРБОВ *et al.*, 2006), correspondente ao 5º ano, um detalhamento de como conduzir o processo de resolução das tarefas para a apropriação, por parte dos estudantes, do conteúdo essencial.

Foram demarcadas cinco tarefas para análise, por apresentarem as características substanciais do conceito de fração, que revelam a essencialidade do objeto da pesquisa: o movimento do pensamento de redução e de ascensão do abstrato e concreto. Elas traduzem a essência dos conceitos matemáticos que, segundo Davídov (1988), é a relação de medição entre grandezas. Especificamente, o conceito de fração trata da medição de uma grandeza quando nela a unidade de medida não cabe uma quantidade de vezes inteira.

Os dois livros mencionados estão escritos no idioma russo, assim, tornou-se necessária a tradução para a língua portuguesa por uma equipe de tradutores oficiais[4]. Após a tradução, realizou-se o estudo das tarefas, que possibilitou a identificação de características peculiares ao movimento conceitual.

Todo o processo analítico das tarefas para o movimento do pensamento conceitual estabeleceu um diálogo com a base teórica, mais especificamente os fundamentos: filosóficos (ROSENTAL, 1956; 1962; KOPNIN, 1958; 1978) e psicológicos e didáticos (DAVÍDOV, 1987, 1988). Nessa base teórica, o estudo do pensamento traz uma concepção materialista histórica e dialética, com o entendimento de que o movimento do pensamento – redução e ascensão – é pertinente à apreensão da realidade. É para o referido movimento

4- Tradução realizada por um grupo de professores russos, residentes em São Paulo, que fazem parte do Clube Eslavo. Para mais informações acesse: http://www.cursorusso.com.br/.

que se volta a análise das tarefas particulares propostas no modo davydoviano de organização do ensino.

Análise do movimento do pensamento nas tarefas particulares davydovianas sobre conceito de fração

Antes de focarmos na análise das tarefas particulares, importa dizer que ela traz como fundamento a lógica dialética materialista, que reconhece o princípio do reflexo, ou seja, a atividade prática sensorial, como "a base imediata do surgimento de todas as faculdades intelectuais, inclusive do próprio pensamento" (KOPNIN, 1978, p. 50).

Contudo, Rosental (1956, p. 60) chama a atenção para a limitação das percepções sensoriais no processo de apreensão do objeto, uma vez que refletem apenas o fenômeno em seus aspectos isolados. O conhecimento tomado isoladamente pode conduzir ao erro no momento de determinar "sua característica principal, essencial". No conhecimento sensível, não se esgota a apreensão de tal aspecto que determina a existência do objeto/fenômeno. O entendimento é de que, no processo de apropriação, o pensamento se move na busca pela apreensão das propriedades internas, mediante os processos de redução e ascensão do abstrato ao concreto. Alguns traços característicos concernentes a esses movimentos se expressam nos respectivos conceitos: concreto e abstrato, análise e síntese, essência e fenômeno, abstração e generalização.

O concreto se reflete duas vezes: como concreto sensível e como concreto pensado. Por decorrência, existe um movimento do pensamento que promove a superação do primeiro pelo segundo. O concreto sensível consiste na "percepção sensível e imediata" do conhecimento e dirige o pensamento para a apropriação das propriedades e características externas de determinado objeto (KOPNIN, 1958, p. 316, tradução nossa). O concreto pensado manifesta a imagem ideal do objeto, como reflexo captado na forma sensorial-material. Porém, não como simples cópia do objeto, e sim como síntese das múltiplas relações estabelecidas entre o aspecto externo e interno, que expressam sua essência na forma de conceito (KOPNIN, 1958). Ele resulta no conhecimento revelador do movimento de desenvolvimento do objeto, o qual, por meio do processo de apropriação, possibilita a apreensão das relações internas que conduzem à revelação de sua essência.

Segundo Rosental (1962), a revelação da essência ocorre no procedimento analítico de investigação – processo de redução – tanto para mostrar as características e propriedades externas apresentadas no objeto quanto para expressar as contradições internas que o constituem. No processo de redução, a relação essencial se constitui em abstração inicial/substancial e manifesta tanto a essência do fenômeno quanto a causa de seu desenvolvimento. Também, se apresenta como ponto de partida do movimento posterior do processo de apreensão – ascensão do abstrato ao concreto. O movimento de ascensão investiga, por via do processo de síntese, o modo como determinada base se manifesta na concreta diversidade de suas partes e propriedades. O procedimento de síntese segue o movimento da abstração inicial para a diversidade dos fenômenos para chegar à generalização do conceito (ROSENTAL, 1962).

Os procedimentos de análise e síntese apresentam movimentos distintos. A análise parte da investigação dos fenômenos e da experiência para alcançar a abstração inicial. A síntese segue o caminho oposto, pois provém dessa abstração para explicar a diversidade dos fenômenos concretos. No entanto, ambos são essenciais para a cognição, uma vez que possibilitam a reprodução do objeto e o sistema de suas relações (ROSENTAL, 1962).

Tais ideias conceituais referentes ao movimento do pensamento, em relação à apropriação dos nexos internos do conceito, é que subsidiam o processo de análise introdutória das tarefas particulares do conceito de fração, propostas no modo de organização do ensino de Davýdov. Sua proposição de ensino tem a finalidade de colocar o estudante em atividade de estudo. Davídov (1987) entende que a referida atividade pressupõe a apropriação dos procedimentos que possibilitam a realização das transformações dos objetos, a fim de modelar e recriar as propriedades internas que se convertem em conceito. Seu modo de organização de ensino tem a seguinte estrutura: tarefas de estudo, que são desenvolvidas por seis ações de estudo que, por sua vez, requerem um sistema de tarefas particulares. As tarefas de estudo, "ligadas à generalização substancial, levam o escolar a dominar as relações generalizadas da área de conhecimentos estudados e a dominar novos procedimentos de ação" (DAVÍDOV; MÁRKOVA, 1987, p. 324, tradução nossa).

A tarefa de estudo para a apropriação do conceito de fração consiste na apreensão de um novo método de medição[5], com base em situações de análise em que a unidade de medida não cabe na grandeza quantidades de vezes inteiras (DAVÍDOV, 1988). Para tanto, é proposto um sistema de tarefas particulares para cada uma das seis ações de estudo[6]:

> 1) transformação dos dados da tarefa a fim de revelar a relação universal, geral, do objeto estudado; 2) modelação da relação universal na unidade das formas objetal, gráfica ou por meio de letras; 3) transformação do modelo da relação [universal] para estudar suas propriedades em "forma pura"; 4) construção do sistema de tarefas particulares para resolver por um procedimento geral; 5) controle sobre o cumprimento das ações anteriores; 6) avaliação da assimilação do procedimento geral como resultado da solução da tarefa de estudo dada. (DAVÍDOV, 1988, p. 181, tradução nossa).

As tarefas particulares, dados de análise desta investigação, estão entre aquelas que possibilitam a elaboração do modelo universal do conceito de fração e revelam a manifestação de sua essência. São apresentadas cinco tarefas particulares, das quais as três primeiras (1, 2, 3) explicitam o movimento de redução do concreto ao abstrato, que contempla a primeira e a segunda ação de estudo. No desenvolvimento das ações, os estudantes abstraem a relação essencial do objeto investigado, mediante a análise da transformação dos dados apresentados nas tarefas. A abstração de tal relação revelada nos modelos – objetal, gráfico e literal – fixa as propriedades internas do conceito e as generalizam na forma de modelo universal (DAVÍDOV, 1988).

5- A palavra método diz respeito ao procedimento de medição das grandezas. No decorrer do texto, os termos *método antigo* e *método novo* são fiéis à tradução. O método antigo se refere ao procedimento de medição para a apropriação dos conceitos de número, multiplicação e divisão. O método novo diz respeito ao processo de medição a ser ainda apropriado sobre o conceito de fração.

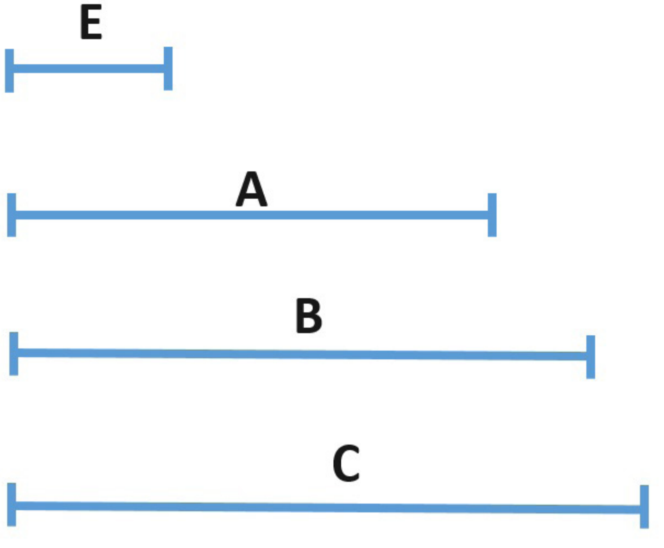
6- A quinta e a sexta ação de estudo, estão contempladas no desenvolvimento das quatro primeiras ações (DAVÝDOV, 1982).

As tarefas particulares 4 e 5 manifestam o movimento de ascensão do abstrato ao concreto, para a apropriação do sistema conceitual de fração. Elas contemplam a terceira e quarta ações de estudo. Com a revelação do modelo universal, a organização das tarefas possibilita que o estudante transforme o modelo para estudar suas propriedades.

A resolução da primeira tarefa particular requer a medição de segmentos, base dos conceitos teóricos da matemática (DAVÍDOV, 1988). Está organizada para que os estudantes percebam a impossibilidade de medição de um segmento ao recorrerem a procedimentos até então adotados por eles em situações parecidas.

A Tarefa 1 consiste em medir o comprimento de A, B e C com a unidade de medida E, como indica a Figura 1 (ГОРБОВ *et al*., 2006).

Figura 1 – Dados referentes à Tarefa 1



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Горбов *et al.* (2011).

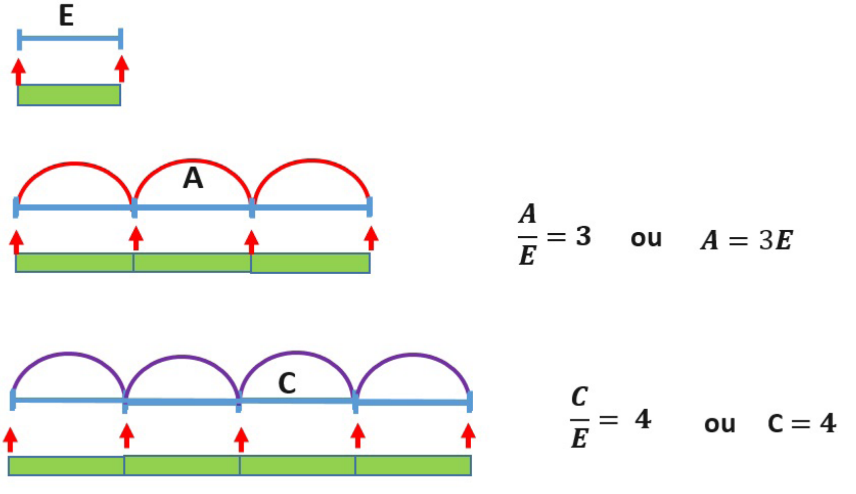
Para determinar o aspecto quantitativo do número, que corresponde à medida de cada segmento, propõe-se a adoção de um instrumento de medida (recorte de cartolina). Tal procedimento torna-se indispensável, pois a simples observação dos dados da tarefa não possibilita a apreensão dos nexos essenciais – multiplicidade e divisibilidade – entre grandezas. O pressuposto é de que, para chegar ao conhecimento da essência, requer-se um procedimento que apreenda as contradições internas do fenômeno, pois elas constituem a fonte de seu desenvolvimento (ROSENTAL, 1962).

Segundo Rosa (2012), no processo de medição, o número se apresenta como propriedade numérica da grandeza. Em outras palavras, ele expressa o resultado da medição que se obtém a partir da relação – de multiplicidade e de divisibilidade – entre a unidade e a grandeza a ser medida. Trata-se, pois, da relação essencial, genética do conceito de número que, segundo os livros didáticos, é introduzido desde o primeiro ano.

No entanto, a Tarefa 1 traz algumas contradições geradoras da necessidade de um novo procedimento de medição que, segundo Горбов *et al.* (2006) se manifestam, aos estudantes, como limitações conceituais. Isso porque os conhecimentos adquiridos até então dão conta de resolver algumas situações de medição e outras não, de modo que os números carecem de novos significados e representações.

As situações análogas àquelas desenvolvidas em anos anteriores consistem em determinar a quantidade de vezes que a unidade cabe (divisibilidade) ou se repete (multiplicidade) na grandeza a ser medida sem deixar restos. Isso ocorre na medição dos segmentos A e C, uma vez que a unidade de medida E cabe uma quantidade de vezes inteira, 3 e 4, nos respectivos segmentos (Figura 2).

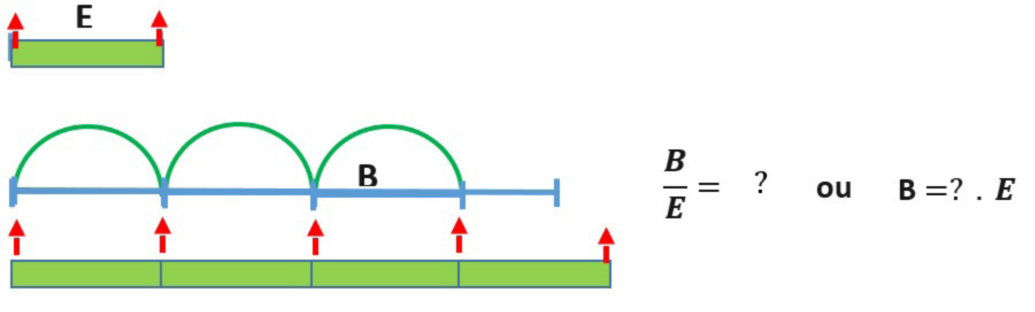
Figura 2 – Processo de medição em relação aos segmentos A e C



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Горбов *et al.* (2006).

Quando a referência é o segmento B, Горбов *et al.* (2006) preveem que os estudantes se colocam diante de situações totalmente novas, pois verificam que a unidade de medida E não cabe uma quantidade de vezes inteira no segmento a ser medido, conforme a Figura 3.

Figura 3 – Processo de medição em relação ao segmento B



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Горбов *et al.* (2006).

Na proposição davydoviana, situações desconhecidas são propostas com o propósito de colocar o estudante em constante ação investigativa, condição imprescindível no ensino desenvolvimental. Conforme Rosa (2012, p. 70), a ação investigativa é imperativa no movimento de redução do pensamento, pois proporciona que o estudante desenvolva “a capacidade de estruturar autonomamente e transformar de modo criador sua própria atividade de estudo”.

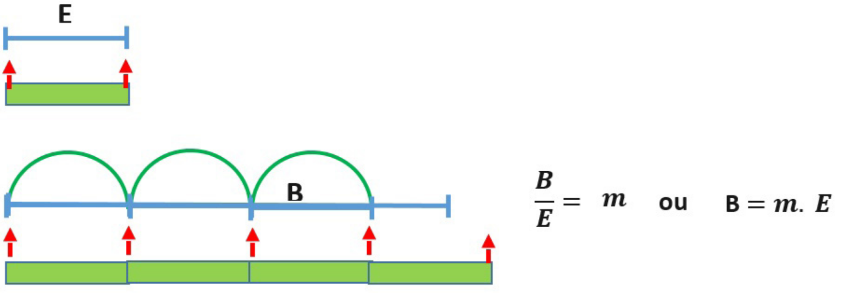
No processo de medição do segmento B, a análise dos dados (na forma objetal), permitirá a constatação de que a adoção da unidade de medida E torna impossível a obtenção do comprimento do segmento B, uma vez que a razão $\left(\frac{B}{E}\right)$ não resulta em um número inteiro. A abstração – medidas não inteiras – colocará o estudante diante de duas revelações. Uma delas é a expressão de conhecimento já apropriado, no qual o domínio de um procedimento de medição contempla todas as características e relações necessárias para expressar uma singularidade numérica, o natural. Em termos de desenvolvimento do pensamento, as abstrações $\frac{A}{E}=3$ e $\frac{C}{E}=4$, obtidas a partir da medição dos segmentos A e C, traduzem um concreto pensado, pois resultam de um processo de medição apropriado pelos estudantes desde o primeiro ano escolar (ГОРБОВ *et al.*, 2006). Tais abstrações expressam a imagem cognitiva do conceito de número, em unidade de seus nexos e propriedades, “[...] como um todo composto de diferentes aspectos, qualidades e relações” (KOPNIN, 1958, p. 298, tradução nossa). No entanto, elas tornam-se apenas ponto de partida para análise do referido conceito, pois expressam a fragilidade dos conhecimentos diante de novas situações de medição.

A outra revelação se caracteriza como um desconhecimento, que colocará o estudante diante de uma nova necessidade: a busca de outro procedimento de medição que permite a expansão do campo numérico (ГОРБОВ *et al.*, 2006). Essa situação específica (mediação de B pela unidade E) objetiva uma ampliação do processo de medição que extrapole as medidas exatas. Os diferentes tipos de números (natural, racional, irracional, negativo) surgem a partir de uma mesma base universal que expressa o geral: a relação entre as grandezas. O novo processo de medição traduz outra possibilidade de representação da unidade de medida para além do número natural, o número racional (DAVÍDOV, 1988).

A inter-relação entre o conhecido e o desconhecido gera o concreto caótico no pensamento, expresso como conhecimento difuso por não traduzir a relação essencial do novo processo de medição e, por consequência, de outra singularidade numérica. A questão manifestada diante desse momento incerto diz respeito ao aspecto quantitativo presente no processo de medição do segmento B com a unidade de medida E, por se tratar de um número desconhecido. Por isso, Горбов *et al.* (2006) sugerem a representação por uma letra qualquer $\left(\frac{B}{E}=m\right)$ ou B=*m*.E, conforme mostra a Figura 4.

As representações (objetal, gráfica e literal) fazem parte do processo de aprendizagem do estudante desde o primeiro ano escolar. Elas propiciam a revelação do modelo universal expresso na forma de lei (DAVÍDOV, 1988). No entanto, a lei apresentada na primeira tarefa $\left(\frac{B}{E}=m\right)$ não traduz de imediato as relações internas do conceito de fração, mas manifesta o ponto de partida para sua apreensão: relações de multiplicidade e divisibilidade entre grandezas.

Figura 4 – Representação (literal) da medida do segmento B



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Горбов *et al.* (2006).

Em síntese, a Tarefa 1 está organizada de modo a manifestar a contradição – surgimento de medidas não inteiras – gerada quando a unidade de medida não cabe uma quantidade de vezes inteira na grandeza, sem resto. Nessa contradição, surge a necessidade de um novo método de medição que supere as dificuldades apresentadas no processo de resolução.

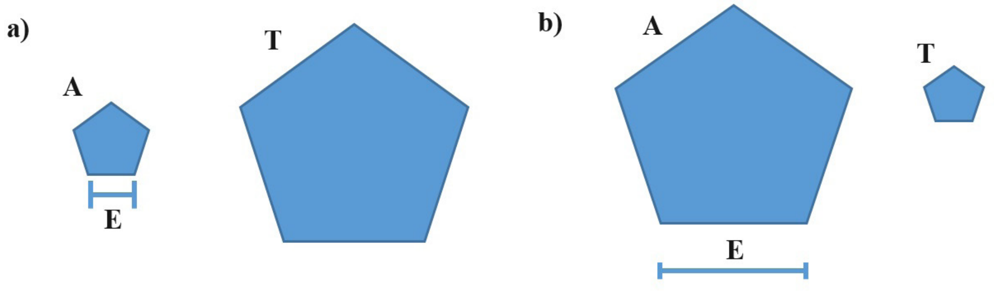
Para Горбов *et al.*, a impossibilidade de medição apresentada na resolução da Tarefa 1 é geradora de necessidades conceituais que surgem pelas limitações:

> [...] em nossos conhecimentos primários, associados à capacidade limitada de medição, a medição de quantidades. [...] Portanto, para conhecer novos números, é preciso abrir (inventar) novas formas de medir valores em situações quando a unidade não cabe no valor medido sem deixar resto. (ГОРБОВ *et al.*, 2006, p. 122).

A Tarefa 2 (Figura 5) cumpre o propósito anunciado pelos autores de propiciar aos estudantes a apropriação de um novo método de medição. Sua finalidade é a introdução da modelação gráfica (esquema com setas) por meio das relações de multiplicidade e divisibilidade entre as grandezas, que requisita duas unidades: básica e intermediária.

No enunciado da Tarefa 2, há a seguinte instrução: “adote a medida E, desenhe segmentos de comprimento igual ao perímetro de A e T, pentágonos regulares” (ГОРБОВ *et al.*, 2006, p. 31).

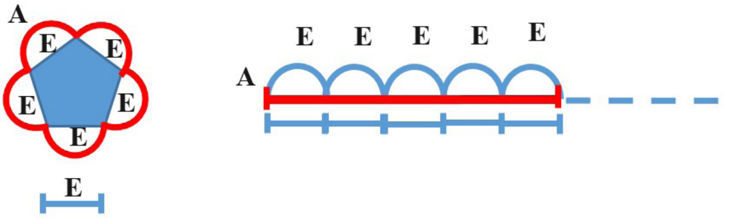
Figura 5 – Situações a e b da Tarefa 2



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Горбов *et al.* (2011).

A situação a coloca o estudante diante de duas possibilidades de medição. Uma delas trata da relação entre A (pentágono) e E (unidade). A abstração que moverá o pensamento dos estudantes, em processo de redução, é a relação de igualdade entre a medida do lado do pentágono A e a unidade de medida E (l_A = E). Para a construção do segmento necessário, correspondente ao perímetro do pentágono A, a unidade de medida E se repetirá cinco vezes (Figura 6).

Figura 6 – Construção do segmento: perímetro do pentágono A



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Горбов *et al.* (2006).

Nesse primeiro caso, adota-se um método de medição, aquele referente à obtenção do conceito de número, na qual se verifica que a unidade de medida cabe uma quantidade de vezes inteira na grandeza sem deixar restos, isto é, $\left(\frac{A}{E} = 5\right)$ ou A = 5 E. Tais relações estabelecidas são representadas pelo esquema (Figura 7). Sua evidenciação nessa tarefa cumpre um dos seus objetivos: a fixação de procedimentos apropriados até então (ГОРБОВ *et al.*, 2006).

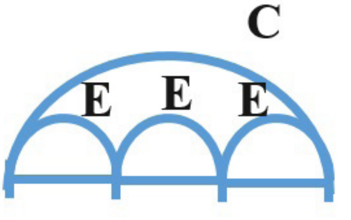
Figura 7 – Esquema da medição do segmento A

Fonte: Elaboração conforme as orientações de Горбов *et al.* (2006).

Ainda na situação a, observa-se que o comprimento da unidade de medida E não é igual ao lado do pentágono T ($l_T \neq$ E). A resolução dessa situação colocará o pensamento dos estudantes diante de uma outra abstração de teor visual: a desigualdade de grandezas (relação maior ou menor), que substancia a identificação da limitação do processo de medição anterior. Ou seja, para a construção do segmento correspondente ao perímetro de T, a adoção da unidade E torna-se inviável, pois ela é menor que o lado de T (E, < l_T).

Segundo Горбов *et al.* (2006), a orientação é a adoção de uma nova unidade de medida, a intermediária, obtida na relação entre os conceitos de multiplicação e divisão. Tal unidade é construída pelo agrupamento da unidade básica para agilizar o processo de medição das grandezas e permite o controle de quantidades muito extensas (MADEIRA, 2012). No caso, a nova unidade (intermediária C) corresponde ao comprimento do lado do pentágono T, logo l_T = C = 3E (Figura 8).

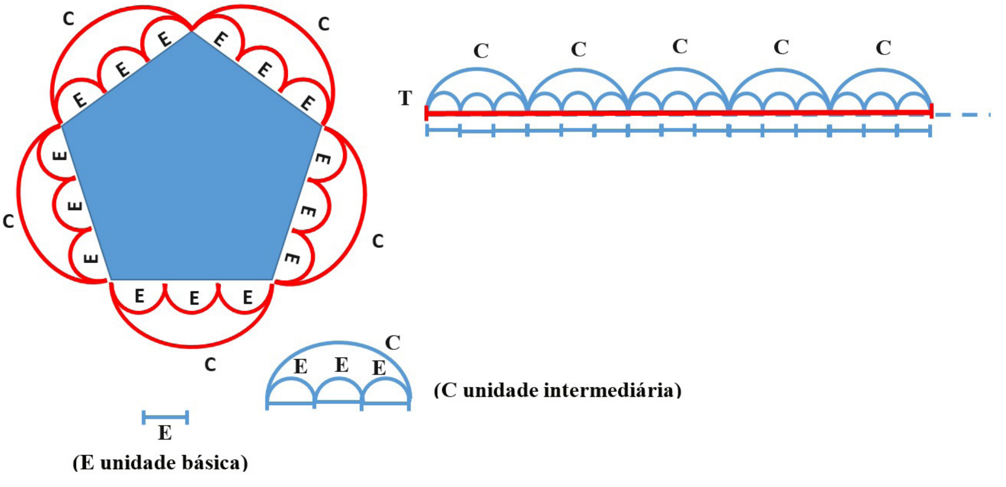
Figura 8 – Unidade intermediária C



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Горбов *et al.* (2006).

Na construção do segmento (Figura 9), referente ao perímetro do pentágono T, a unidade de medida intermediária C se repetirá cinco vezes.

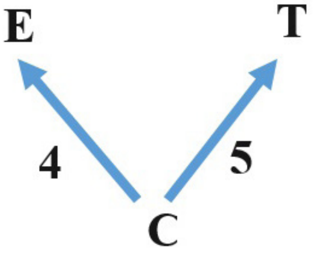
Figura 9 – Construção do segmento: perímetro do pentágono T



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Горбов *et al.* (2006).

Esse método de medição, segundo Горбов *et al.* (2006), também se representa por meio de um esquema (Figura 10).

Figura 10 – Esquema de medição: segmento T



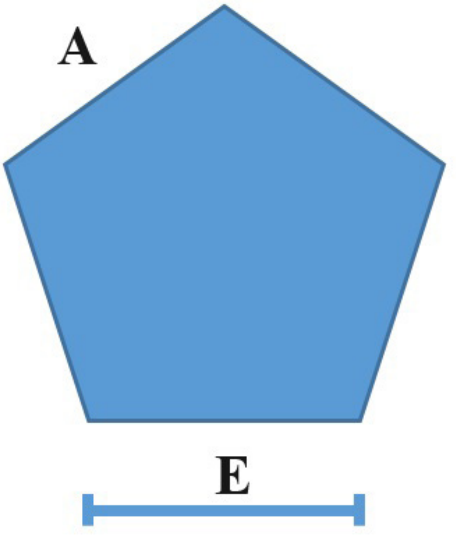
Fonte: Elaboração conforme as orientações de Горбов *et al.* (2006).

O esquema indica que a unidade básica (E) se repete três vezes, o que resulta na unidade intermediária (C = 3E), reproduzida cinco vezes, a fim de se obter o perímetro do pentágono T, isto é, T=15E. A construção do segmento representativo do perímetro do pentágono T pela unidade básica E só é possível por meio da unidade intermediária C, que se constitui em elemento mediador no processo de medição. Ela propiciará, aos estudantes, o desenvolvimento do pensamento teórico multiplicativo, que supera a contagem um a um própria do pensamento empírico (MADEIRA, 2012).

A análise dos métodos de medição – adotados na situação a – mostra que há algo em comum entre eles: a relação de multiplicidade e divisibilidade entre as grandezas. A diferença está na quantidade das referidas relações. No primeiro caso, é direta: E → A. No segundo, ao se adotar a medida intermediária como unidade base, a relação E → T deixa de ser direta para ser mediada por outras duas: E → C e C → T (MADEIRA, 2012). O estabelecimento de relações mediatizadas – repetição da unidade básica e da unidade intermediária – possibilita o surgimento de abstrações teóricas. Segundo Davýdov (1982, p. 338, grifo do autor), “estas permitem formular as exigências para a definição abstrata *inicial*”. Por meio dos processos mediados, o pensamento abstrato visa não apenas à separação dos indícios essenciais dos não essenciais, como também à manifestação das conexões internas intrínsecas ao objeto, que não podem ser apreendidas no simples olhar direto dos fenômenos.

Outra situação referente ao processo de medição, tendo por base de análise os pentágonos A e T, é apresentada com a mesma finalidade da anterior, ou seja, construir um segmento de mesmo comprimento do perímetro das referidas figuras (Figura 11).

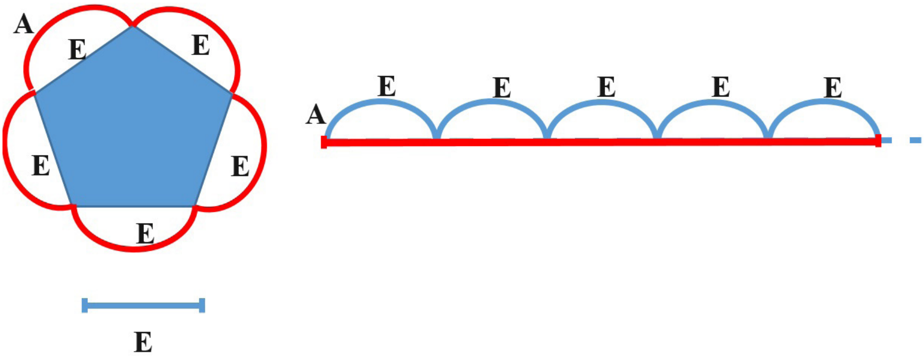
Figura 11 – Medição com base nos pentágonos A e T



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Горбов *et al.* (2011).

A situação b também envolve dois processos de medição. Um deles é análogo àquele desenvolvido na situação a, pois os estudantes verificam que a medida da unidade E é igual ao comprimento do lado do pentágono A. Nesse caso, o segmento a ser construído medirá cinco vezes a unidade E (Figura 12).

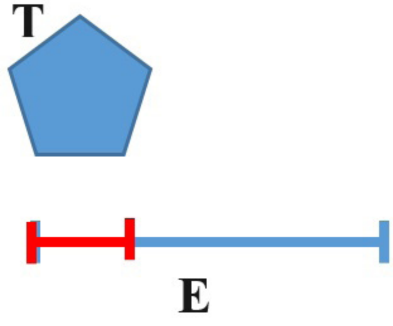
Figura 12 – Construção do segmento: perímetro do pentágono A



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Горбов *et al.* (2006).

No caso descrito a seguir, a unidade de medida E não é igual à medida do lado do pentágono T ($E \neq l_T$). Novamente, apresenta-se ao estudante a relação de desigualdade entre as grandezas. Porém, a unidade de medida E é maior que o comprimento do lado do pentágono T ($E > l_T$). Ocorre a impossibilidade de se construir uma nova unidade intermediária a partir do agrupamento da medida básica E. Isso se evidencia ao se propor medir o l_T com a unidade de medida E, visto que ela não cabe nenhuma vez (inteira) no l_T (Figura 13).

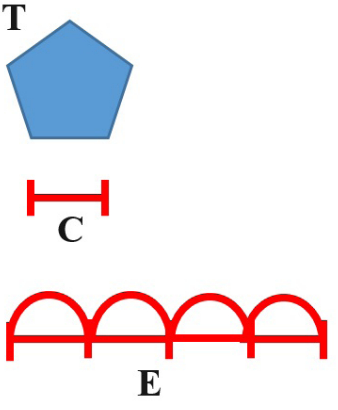
Figura 13 – Impossibilidade de medição do 1_T com a unidade E



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Горбов *et al.* (2006).

Inicia-se o processo de busca de um procedimento que conduzirá para a determinação de uma nova unidade de medida com característica de intermediária, porém com significado ainda desconhecido. Conforme Горбов *et al.* (2006), a orientação se volta para a relação inversa, isto é, o l_T cabe uma quantidade de vezes inteiro na unidade de medida E (Figura 14).

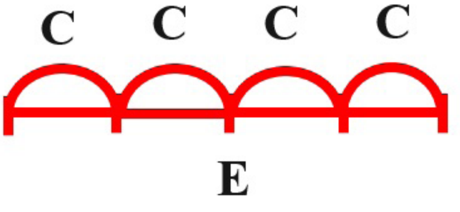
Figura 14 – Processo de medição da unidade básica E



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Горбов *et al.* (2006).

A medição permitirá a constatação de que o comprimento da unidade de medida E é quatro vezes maior que o lado do pentágono T, podendo ser expressa por E = 4C (Figura 15).

Figura 15 – Comprimento da unidade básica E



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Горбов *et al.* (2006).

A medição promove o surgimento de uma nova abstração, a subdivisão da unidade, em estado caótico no pensamento. Complexifica-se o processo, pois “a unidade não cabe quantidade de vezes inteira na grandeza, o que leva à necessidade de dividi-la em partes iguais, com a utilização de uma das partes como nova unidade” (ГОРБОВ *et al.*, 2006, p. 121). Vale reafirmar, de acordo com Aleksandrov, Kolmogorov e Lavrentyev (1973, p. 44), que a impossibilidade de medição é que faz surgir “a necessidade de fracionar [dividir] a unidade de medida para poder expressar a grandeza com maior exatidão em partes da unidade”.

O processo de constituição da medida intermediária passa a ser representado pelo esquema (Figura 16):

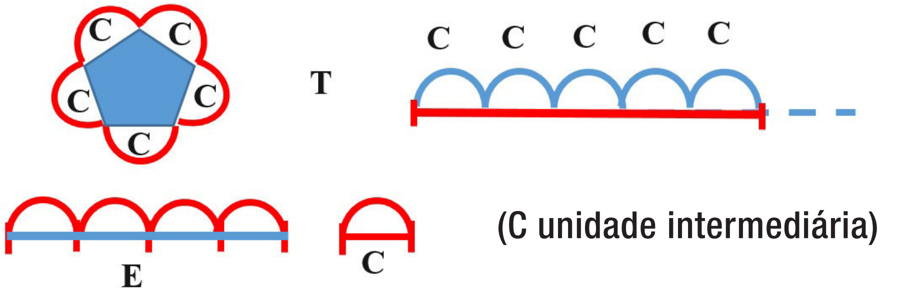
Figura 16 – Esquema do processo de medição da medida E

Fonte: Elaboração conforme as orientações de Горбов *et al.* (2006).

O esquema aparece com a indicação contrária do que é proposto no modelo abstrato, para apropriação dos conceitos de multiplicação e divisão. Conforme Madeira (2012), isso ocorre porque, no esquema, a seta representa a relação de multiplicidade, que segue da grandeza menor para a grandeza maior.

Na situação a, a unidade intermediária para medir T era múltipla da unidade básica com a representação da relação, que era E → C. Na nova situação, a unidade intermediária C é submúltiplo da unidade básica, sendo representada pela relação E ← C, indicadora de que C é menor que a unidade básica E. A relação expressa pelo esquema para a construção do segmento (Figura 17), referente ao perímetro do pentágono T, indica que a unidade E deve ser dividida em quatro partes iguais. Uma delas é a unidade de medida intermediária (C), que se repete cinco vezes.

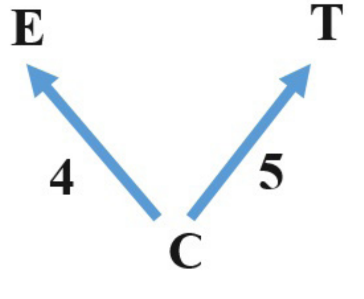
Figura 17 – Construção do segmento: perímetro do pentágono T



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Горбов *et al.* (2006).

Todo esse processo passa a ser registrado no esquema de setas (Figura 18):

Figura 18 – Esquema de medição: segmento T



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Горбов *et al.* (2006).

Com o apoio do esquema, é possível a elaboração da síntese: “o valor de uma nova unidade [intermediária], pode ser obtido, não só pelo múltiplo da unidade básica [agrupamento], mas pela sua divisão em partes iguais” (ГОРБОВ *et al.*, 2011, p. 124). Segundo Rosental (1962), o processo de síntese ocorre mediante o desenvolvimento do processo de análise e vice-versa.

A análise e a síntese tornam possível, na resolução da tarefa, a revelação da relação essencial – subdivisão da unidade de medida – que desempenha o papel de abstração inicial na via ascendente do abstrato ao concreto para a reprodução do sistema conceitual de fração. A abstração inicial “reflete a essência, a lei dos fenômenos, de maneira abstrata, em seu aspecto puro” (ROSENTAL, 1962, p. 493).

Tal abstração surge no processo de construção da medida intermediária, com a apresentação de uma nova qualidade: submúltiplo da unidade básica, abstraído pela análise da transformação dos dados da tarefa. A subdivisão da unidade se constitui em um elemento mediador para a revelação do novo método, que expressa a obtenção dos números racionais/fracionários. Trata-se da explicitação das relações internas – multiplicidade e divisibilidade – entre as grandezas: unidade básica e unidade intermediária.

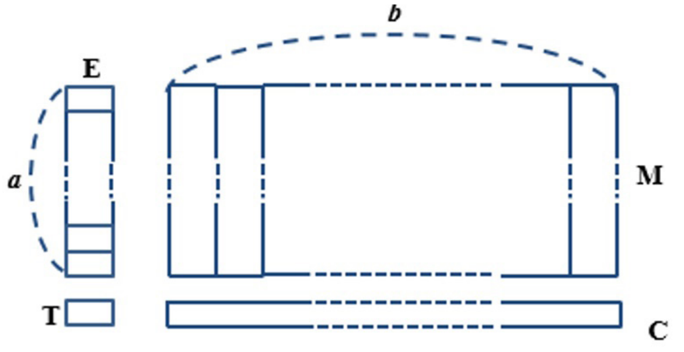
O movimento de revelação da relação essencial ocorre pela análise do processo de medição da grandeza comprimento, representada por meio de segmentos. Eles são apresentados, inicialmente, na forma objetal-sensorial, o que possibilita a abstração das primeiras relações gerais: $l_A = E$ (relação do lado do pentágono A com a unidade E); $l_T \neq E$, $l_T > E$ e $l_T < E$ (relação do lado do pentágono T com a unidade E), em ambas as situações. Contudo, é na abstração da relação $l_T < E$ que surge a constatação da insuficiência da adoção da unidade E para medição do perímetro de T. Ao se propor a relação inversa entre os dois comprimentos (l_T e E), a verificação de quantas vezes o l_T cabe na unidade E possibilita a construção de uma nova unidade intermediária, a ser obtida pela subdivisão em partes iguais da unidade básica.

Portanto, a Tarefa 2 explicita em seu processo de desenvolvimento o movimento de redução, mediado por abstrações e generalizações teóricas, que direcionam o pensamento para a apropriação da relação universal do conceito de fração, a partir da apreensão de um novo método de medição. Para Rosental (1962), a relação universal se manifesta mediante a revelação da essência, que é um procedimento complexo, pois ela não está dada de imediato no objeto analisado. Além disso, a simples observação e contemplação dos indícios externos não possibilitam a apreensão dos nexos internos que constituem o objeto, visto que o interno consiste nas contradições que geram o seu desenvolvimento. Promover a abstração da relação essencial constitui, nessa tarefa, o foco principal por conduzir à revelação da base universal (a lei que expressa o desenvolvimento do conceito de fração).

A Tarefa 3 traz como finalidade a generalização teórica do novo método de medição, condição para a apropriação do conceito de fração, que se caracteriza pela reprodução das relações internas manifestadas no modelo universal. Conforme Davídov (1988), a modelação da relação universal, a lei, se revela gradativamente pela modelação objetal, gráfica e literal.

Na Tarefa 3, “o desenho mostra, esquematicamente, como a grandeza de área C é medida com a unidade E, a partir da adoção da [Figura 19]: 1) medida intermediária T; 2) medida intermediária M” (ГОРБОВ *et al.*, 2011, p. 37-38).

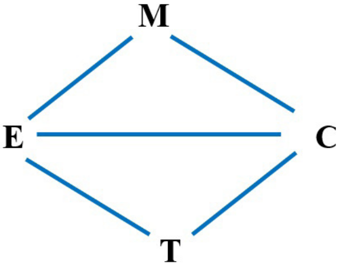
Figura 19 – Representação geométrica: relação de comutatividade



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Горбов *et al.* (2006).

A tarefa (Figura 20) também propõe: “descrever as duas formas de construir um esquema” (ГОРБОВ *et al.*, 2011, p. 38).

Figura 20 – Esquema a ser completado na Tarefa 3



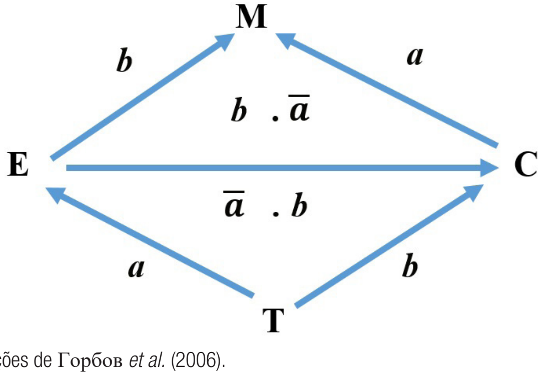
Fonte: Elaboração conforme as orientações de Горбов *et al.* (2011).

Горбов *et al.* (2006) propõem a análise geométrica (objetal), apresentada na Figura 19, como relação mediadora para a abstração da comutação dos fatores a e b, a serem representados no esquema (gráfica) (Figura 20), com o objetivo de introduzir a notação convencional para o novo método, expresso na forma literal. Para tanto, a centralidade é o movimento de redução do pensamento, voltado para abstração e generalização das relações internas, a fim de modelar a base universal do conceito.

A primeira relação a ser abstraída consiste em medir a grandeza C com a unidade E. As demais, fixadas no esquema, são abstraídas mediante a análise das grandezas, apresentadas na forma sensorial, o que torna possível verificar que a grandeza T é a menor de todas as áreas, revelando assim as abstrações E>T e C>T. Mas isso não é suficiente, pois a pretensão é o nível de pensamento teórico para o qual não basta identificar se uma grandeza é maior ou menor que a outra, deve-se buscar uma forma de representar suas quantidades. Portanto, conclama-se pela análise das relações E>T e C>T com fundamento na ideia essencial, a fim de se constatar que, respectivamente, T se repete *a* vezes em E e *b* vezes em C. Além disso, são estabelecidas outras relações ao se considerar a maior de todas as grandezas (M), isto é, M > E e M > C. Na primeira, o fator b corresponde à quantidade de vezes que E se repete em M. Na segunda relação, M > C, o fator a é representativo da quantidade de vezes que C se repete em M.

No entanto, ainda falta determinar a representação da relação direta entre a unidade E e a grandeza C, mediadas pelas unidades intermediárias T e M. Nesse caso, trata-se da análise da função e da ordem dos fatores. Quando a referência é a medida intermediária T, o fator a apresenta função de subdivisão da unidade E e b a de repetição de T em C. A relação direta (E → C) representa-se por: $\bar{a}.b$.[7] Por sua vez, quando o foco da análise é a medida intermediária M, as funções dos fatores são: b de repetição da unidade E e a de subdivisão da unidade M. A relação direta (E → C) é descrita por: $b.\bar{a}$. O esquema (Figura 21), representa essas abstrações.

Figura 21 – Resolução parcial da Tarefa 3



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Горбов *et al.* (2006).

O esquema dá subsídios para a observação de que a relação direta (E → C) possui duas representações: $\bar{a}.b$ e $b.\bar{a}$. Elas expressam a comutatividade dos fatores a e b, pois, ao mudar a ordem deles, não há alteração no resultado da medição da grandeza C. Isso é válido caso se leve em consideração a função de cada fator: $\bar{a}$ apresenta a função de divisão e b a de multiplicação, que implicam a modificação das etapas do processo de medição.

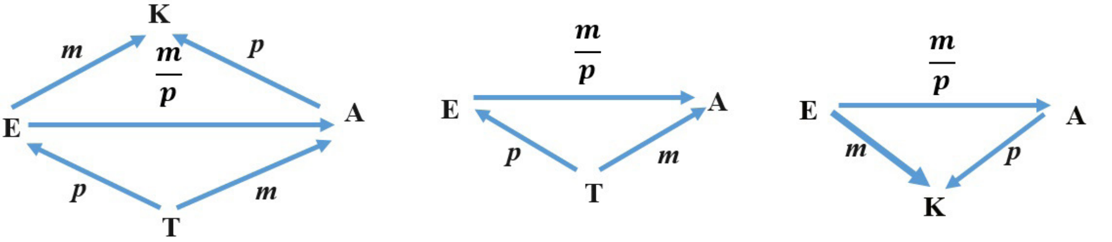
Após a representação no esquema da relação direta, a orientação de Горбов *et al.* (2006) consiste na adoção do seguinte registro: $\left(\frac{b}{a}\right)$.[8] Trata-se da representação literal, caracterizadora do número racional que se denomina fração ordinária (ГОРБОВ *et al.*, 2006). O registro $\left(\frac{b}{a}\right)$ representa não apenas o número em forma de fração (como resultado da medição de grandezas), mas também revela o novo método de medição. Em outras palavras, consiste na lei geral para a obtenção dos números racionais, que manifesta as

7 - Tal representação é introduzida por Горбов *et al.* (2006), em uma tarefa particular. Na resolução, o estudante cria um símbolo capaz de diferenciar as respectivas funções dos fatores *a* e *b*. A condição é que o símbolo corresponda ao fator que diferencia os procedimentos de medição, indicador da divisão das unidades.

8 - O registro indica a unificação dos fatores – $\bar{a}.b$ e $b.\bar{a}$ – de modo que se tornem apenas um $\left(\frac{b}{a}\right)$.

relações internas de seu desenvolvimento: a subdivisão e a repetição das unidades (básica e intermediária), conforme Figura 22, com a adoção de *m* e *p*, em vez de *a* e *b*.

Figura 22 – Modelo universal do conceito de fração



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Горбов *et al.* (2011).

As letras do esquema traduzem uma significação da relação entre cada grandeza:

> O número *p*, que se localiza abaixo do traço da fração, é chamado *denominador*. O denominador indica o valor da divisão (da unidade básica) em partes iguais. Ele mostra em quantas partes iguais se dividiu essa quantidade (E ou K). O número *m*, valor acima do traço, é chamado de *numerador*. O numerador indica o valor da repetição. Ele mostra o número de vezes que é necessário repetir o valor da parte T ou da unidade E. A linha de separação ou o traço entre o numerador e o denominador é *chamada barra*. (ГОРБОВ *et al.*, 2011, p. 38, grifo do autor).

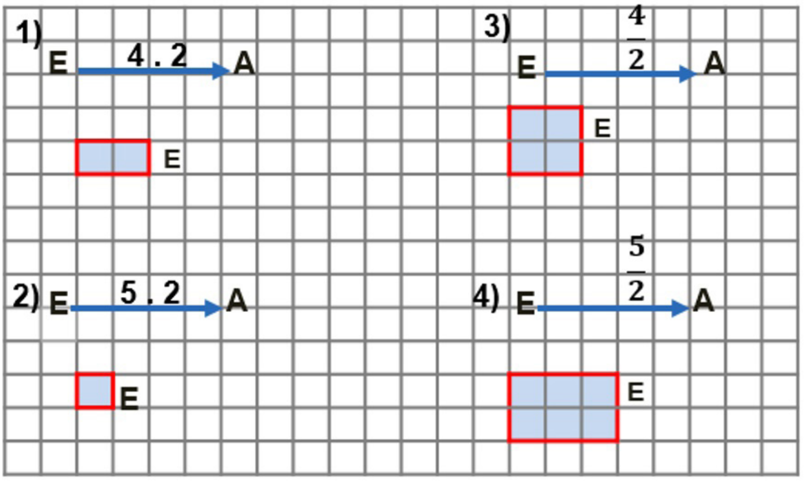
Desse modo, $\frac{m}{p}$ se traduz no modelo universal do conceito de fração. Ele reflete, no pensamento, o movimento – de abstração e de generalização – da essência, revelada durante o desenvolvimento do sistema de tarefas particulares. Conforme Davýdov (1982), o modelo universal traduz a inter-relação essencial de um determinado conceito em nível científico, base incondicional para o desenvolvimento do pensamento teórico.

Com a revelação da relação essencial em sua forma abstrata, $\frac{m}{p}$, o pensamento segue o movimento da abstração inicial para o estudo da diversidade dos fenômenos, a fim de alcançar a generalização do conceito de fração. De acordo com Rosa (2012, p. 51), isso ocorre com a identificação da “vinculação regular da relação principal [essencial] com suas manifestações particulares [...]”. No processo de resolução, a partir do procedimento geral, analisam-se as manifestações particulares, de modo a compreender as formas concretas de revelação da base universal. É para atingir tal finalidade que as tarefas particulares, apresentadas a seguir, estão organizadas.

A Tarefa 4 trata da generalização teórica do conceito de fração. Propõe a reflexão sobre o novo campo numérico, em consonância com a gênese do conceito de número.

A Tarefa 4 pede que se “construa a área A com o auxílio da unidade E” (ГОРБОВ *et al.*, 2011, p. 40), conforme os dados apresentados na Figura 23.

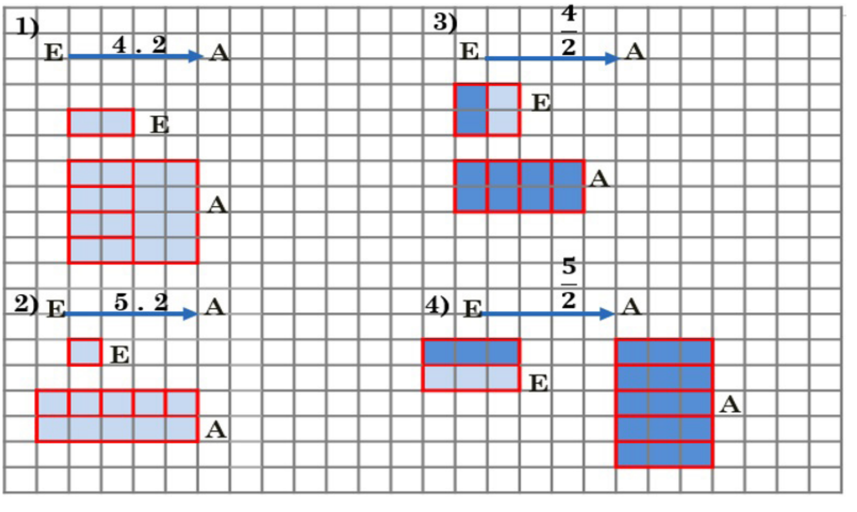
Figura 23 – Dados referentes à Tarefa 4



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Горбов *et al.* (2011).

A base de análise são os registros (Figura 24) para a execução dos processos de medição.

Figura 24 – Resolução da Tarefa 4



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Горбов *et al.* (2006).

No estágio de desenvolvimento da Tarefa 4, segundo Горбов *et al.* (2006), o pensamento se moverá mediado por abstrações articuladas com a análise dos esquemas, que manifestam a relação essencial do conceito de fração. Isso ocorrerá, segundo Rosa (2012, p. 104), porque o esquema "é representativo do movimento da relação entre as grandezas" que possibilita aos estudantes a elevação do plano objetal ao plano mental, mediado pela representação gráfica. A tarefa ainda propõe a representação do resultado pela fórmula $\frac{A}{E} = t$, correspondente à expressão literal do modelo universal do conceito de número (ГОРБОВ *et al.*, 2006).

A partir da análise dos dados (Figura 24) é possível constatar que as duas primeiras situações referem-se ao conceito de multiplicação, cujo registro expressa o produto dos fatores, isto é, a quantidade de vezes que a unidade intermediária (construída pelo agrupamento da medida básica E) se repete para a obtenção da área A. Os resultados obtidos nas respectivas situações são: $\frac{A}{E}=8$ e $\frac{A}{E}=10$. Na situação 3, apesar do registro na forma de fração, verifica-se que a unidade E cabe duas vezes em A, isto é, $\frac{A}{E} = 2$. Essas três primeiras situações trazem como resultado valores inteiros de medição (ГОРБОВ *et al.*, 2006).

No entanto, a situação 4 se configura entre aquelas que, num processo de ascensão do abstrato ao concreto, solicita a extrapolação de determinada imediatez, no caso, trata-se da medição com característica de número real em sua singularidade natural. Горбов *et al.* (2006) salientam que a quarta situação retoma o problema de medição, que resulta em medidas não inteiras, para a representação do novo número (fração).

A construção da grandeza de área A requer por parte dos estudantes a apreensão das relações internas que constitui o novo método de medição, abstraídas e generalizadas nas tarefas anteriores, mediante o processo de redução do concreto ao abstrato. De acordo com Rosental (1962, p. 485), somente após ter encontrado, por via da abstração, a relação "que constitui a base essencial e a unidade de todas as manifestações da coisa dada, começa o processo de ascensão que leva deste momento abstrato para o concreto". Kopnin (1958, p. 313, tradução nossa) entende que, no movimento de ascensão do abstrato ao concreto, "não se cria o objeto concreto mesmo, que já existia antes e independentemente de ser conhecido; o que surge é o conceito concreto dele".

Para Davídov (1988), só mediante a análise do conteúdo do fenômeno tomado em seu processo de desenvolvimento é que o pensamento pode manifestar sua essência, de modo que reflita os nexos essenciais intrínsecos ao processo de formação. Por consequência, a revelação da essência expressa a universalidade do fenômeno que leva o pensamento à reprodução do concreto em sua integridade. Essa revelação, no que diz respeito ao conceito de fração, ocorre nas relações intrínsecas ao modelo universal $\frac{m}{p}$ (correspondendo *p* à subdivisão da unidade básica e *m* à repetição da medida intermediária), pois subsidiam o processo de construção da área A. Ou seja, o registro $\frac{A}{E} = \frac{5}{2}$ indica que a unidade de medida E deve ser subdividida em duas partes iguais e uma delas se constitui na medida intermediária que, ao ser repetida cinco vezes, permite a obtenção da área A. O pensamento, nesse estágio de desenvolvimento, se move a partir das características e propriedades apreendidas no movimento de obtenção de um novo método de medição, que permite a verificação de que E cabe $\frac{5}{2}$ em A.

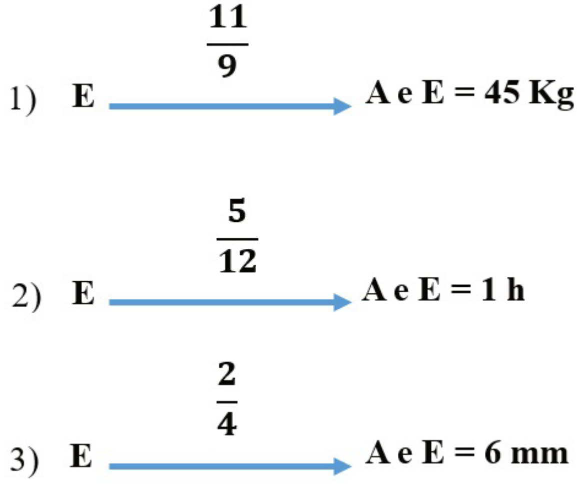
Após as representações, os processos de análise e de síntese da tarefa se voltam para os resultados das situações 3 e 4. O foco se dirige para o seguinte detalhe: a relação entre grandezas pode resultar em diferentes números (inteiros e fracionários). Emerge, então, a necessidade da generalização desses dois tipos de números, ou seja, o conjunto daqueles até então conhecidos pelos estudantes – os inteiros – passa a contemplar um novo método de medição que expande para outra singularidade numérica, as frações. Portanto, cria-se o conjunto dos números racionais, expresso por medidas inteiras e fracionárias, como é o caso de $\frac{4}{2}$ =2 (número inteiro) e $\frac{5}{2}$ (número fracionário).

Essa especificidade da Tarefa 4 – adoção de um novo método que cria a possibilidade de num mesmo processo de medição fazer emergir os dois tipos de números – revela mais uma característica do modo davydoviano de organização de ensino da matemática: a ascensão do pensamento ao concreto pensado envolve a superação de um método para expandi-lo a outro que unifica diferentes qualidades numéricas. Nesse processo, entende-se que o pensamento supera o trânsito galgado em definições extraídas da exterioridade do objeto, de modo imediato e contemplativo. Ascender ao concreto pensado faz com que o pensamento passe por conexões e relações tanto de ordem conceitual como de procedimentos, porém com a necessária e peculiar vinculação interna (KOPNIN, 1978).

A tarefa seguinte se assemelha à anterior, visto que propõe a obtenção da grandeza a partir da análise do esquema. Porém o foco de análise se volta para o aspecto numérico que corresponde à unidade de medida básica, ao invés do seu aspecto genérico – como unidade de área.

A Tarefa 5 pede ao aluno que: "encontre o valor de A", a partir dos dados demonstrados na Figura 25 (ГОРБОВ *et al.* 2011, p. 40).

Figura 25 – Dados referentes à Tarefa 5

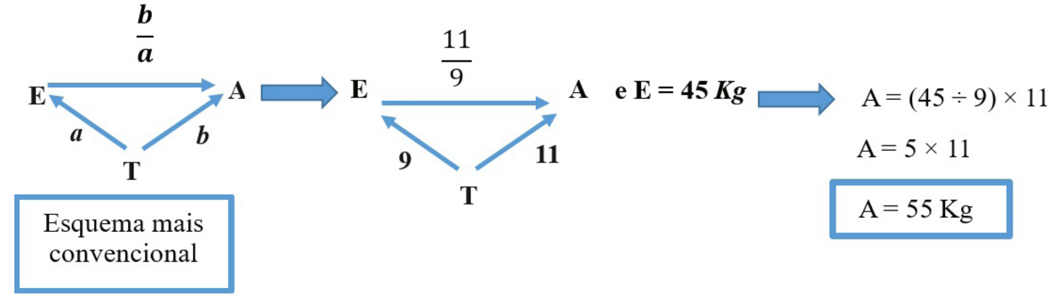


Fonte: Elaboração conforme as orientações de Горбов *et al.* (2011).

Observa-se na Figura 25 que, em cada situação, os estudantes terão à sua disposição os seguintes registros: quantidade de vezes que a unidade E cabe em A e o valor da unidade E. A adoção de unidades padronizadas permitirá aos estudantes a realização das operações – divisão e multiplicação – no plano mental, uma vez que não se faz necessária sua representação na forma sensorial. A tarefa consiste em expressar, por operações aritméticas, as manifestações do modelo universal.

Na primeira situação, a unidade adotada é uma particularidade da grandeza massa, o quilograma (kg). Nota-se que a unidade E é composta por 45 unidades dessa massa e a grandeza A corresponde a $\frac{11}{9}$ dessa composição. Para determinar o valor de A, será necessário que os estudantes adotem as operações pertinentes ao modelo universal de fração, abstraídas a partir da análise dos fatores – numerador e denominador. Uma dessas operações é a divisão de 45 por 9, pois acompanha o movimento de construção da unidade intermediária expressa no modelo. A outra operação é a repetição dessa nova unidade (resultado da divisão) em 11 vezes para a obtenção da grandeza A, conforme mostra a Figura 26.

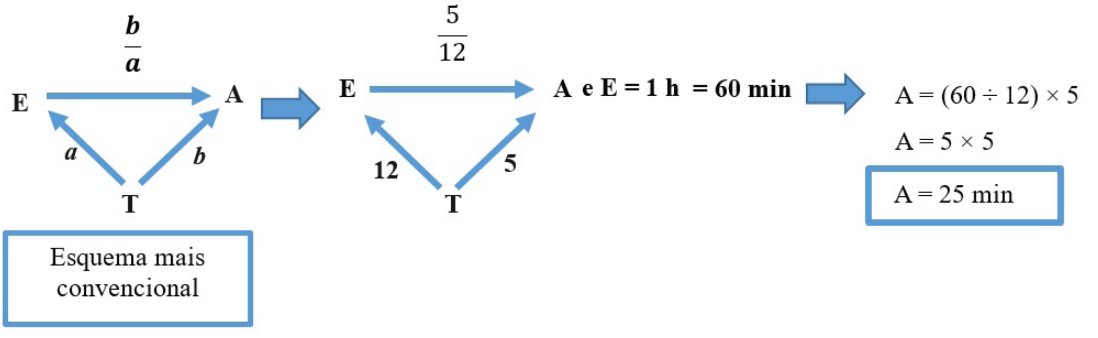
Figura 26 – Resolução da medição referente à situação 1



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Горбов *et al.* (2011).

As operações 45 ÷ 9 = 5 e 5×11 = 55 traduzem o movimento no plano mental para obtenção da quantidade de massa em quilogramas: A = 55 kg. O mesmo processo de abstração ocorre na situação 2 (Figura 27), para expressar a medida da grandeza por meio de unidades padronizadas.

Figura 27 – Resolução da situação 2

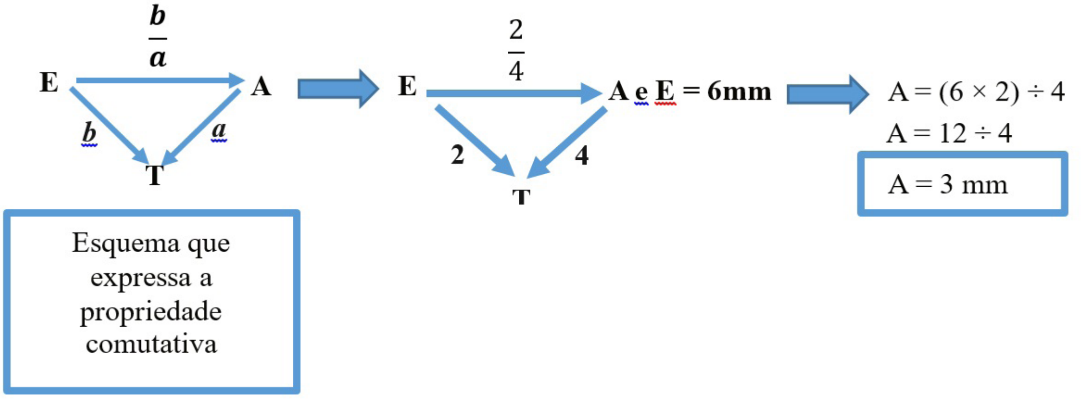


Fonte: Elaboração conforme as orientações de Горбов *et al.* (2011).

Conforme explicitado na Figura 27, a situação 2 incide na relação entre a unidade E e o registro $\frac{5}{12}$. Para sua resolução, o estudante deverá levar em consideração a transformação de unidades, isto é, 1 hora corresponde a 60 minutos. Isso porque, a divisão 1 por 12 (relação estabelecida com esquema convencional) não resultará em um número inteiro. A grandeza A, será obtida a partir das operações 60 ÷ 12 = 5 e 5×5 = 25, dadas no plano mental e mediadas pelo esquema com setas. Logo, $\frac{5}{12}$ h de E corresponderá a 25 min, valor referente à grandeza A.

No entanto, para a resolução da situação 3, se faz necessária a adoção da propriedade comutativa. De acordo com Горбов *et al*. (2006), ao invés de subdividir a unidade básica, opta-se inicialmente pela sua repetição para obtenção da unidade intermediária. Por sua vez, faz-se a subdivisão da unidade intermediária, em parte iguais, a fim de se obter a medida da grandeza A, que se constituirá de uma das partes (Figura 28).

Figura 28 – Resolução da situação 3



Fonte: Elaboração conforme as orientações de Горбов *et al.* (2011).

As operações 6 × 2 = 12 e 12 ÷ 4 = 3 traduzem no pensamento a apropriação da propriedade de comutatividade (expressa pelo esquema) para a obtenção da grandeza A, que corresponde a 3 mm de comprimento.

O processo de resolução da tarefa permite destacar dois aspectos concernentes ao movimento de ascensão do pensamento conceitual de fração. Um deles é o ponto de partida, que consiste na análise do modelo universal que se caracteriza como abstração inicial, substancial, pois reflete a essência, a causa do desenvolvimento do conceito de fração. O outro, o ponto de chegada, é revelador da apreensão dos processos de análise e de síntese mediados por abstrações e generalizações teóricas que, segundo Davídov (1988, p. 152), trata-se de duas ações cognitivas essenciais para o movimento do pensamento, pois "encontram sua expressão no conceito teórico que serve de procedimento para deduzir os fenômenos particulares e singulares de sua base universal".

Nesse âmbito, a Tarefa 5, em seu todo, traz a noção de que o processo de pensamento, de ascensão da abstração do conceito de fração à sua concretização (pensada), tem por base a revelação das relações internas em eventos singulares com determinadas especificidades. A medição se apresenta em uma unidade previamente definida: kg, h e mm. Tais especificações permitem operações mentais de cunho conceitual teórico, por meio do modelo universal. De acordo com Davídov (1988), elaborar e transformar um objeto mentalmente constitui sua própria compreensão e a revelação de sua essência. Por isso, a cada nova tarefa, Горбов *et al.* (2006) propõem a reprodução do conceito de fração no contexto de um sistema conceitual que envolve número, multiplicação, divisão, propriedade comutativa, medição de grandezas, entre outros.

Considerações finais

Este estudo trouxe a possibilidade de refletirmos – a partir da análise de um conjunto de tarefas particulares da proposição davydoviana – sobre os movimentos de redução e ascensão, para o desenvolvimento do pensamento teórico do conceito de fração. A partir do estudo da literatura, numa perspectiva dialética, pôde-se constatar que a base do desenvolvimento do pensamento consiste nos processos de abstração e de generalização, emergentes dos procedimentos de análise e síntese. As mediações ocorrem tanto no movimento de redução quanto no de ascensão. No processo de redução, o pensamento se volta à revelação da abstração inicial. Sobre esta base, está a essência que, como fonte única, determina as demais particularidades do todo (DAVÍDOV, 1988). Ao atingir o conhecimento da essência, o pensamento se move da definição abstrata para a reprodução do "sistema de nexos e relações característicos do objeto dado como integridade concreta" (ROSENTAL, 1962, p. 496, tradução nossa).

As possibilidades desse movimento do pensamento, na especificidade do conceito de fração, se revelaram nas cinco tarefas particulares analisadas. No que se refere à análise das três primeiras tarefas, o processo de redução do concreto ao abstrato se explicita ao revelar a relação essencial do conceito, que surge mediante o problema de medição. Tal relação se apresenta na situação em que a unidade não cabe uma quantidade de vezes inteira na grandeza a ser medida. A referida impossibilidade gera a necessidade de se desenvolver um novo método de medição, a ser modelado e apropriado, a partir da análise dos métodos até então adotados.

O novo método traz como característica essencial a subdivisão da unidade de medida, que se transforma em unidade intermediária. O movimento de transformação revela os nexos internos do conceito de fração: a divisão da unidade básica e a repetição da unidade intermediária e vice-versa, com a adoção da propriedade comutativa da multiplicação.

Com o surgimento dos nexos, o pensamento se volta à generalização do método. Trata-se da modelação da relação universal, com a adoção de sistemas de representação nas seguintes configurações: objetal, gráfica e literal. A modelação traduz a essência do conceito na forma de lei, que se revela em consequência do surgimento da necessidade de outras generalizações: a ordem e a função dos fatores. São elas que dão as condições para a identificação das operações (multiplicação e divisão) e a ordem de sua execução. Portanto, o modelo universal do conceito de fração é o mesmo do conceito de multiplicação e divisão de números inteiros, com a diferença de que a unidade intermediária se constitui como parte da unidade básica.

A partir da generalização das duas relações de medição, intrínsecas à propriedade comutativa, há a manifestação da lei, que expressa ambas as relações em um único registro literal: $\frac{m}{p}$. Este se constitui em ponto de partida para o movimento de ascensão do abstrato ao concreto, evidenciado nas Tarefas 4 e 5. Nesse caso, a abstração inicial, advinda do processo de redução no pensamento, caracteriza-se como um estágio em devir para a concretização do conceito. No entanto, como diz Davýdov (1982), não se trata de uma abstração do tipo empírica. Ela é concreta por possibilitar a busca da revelação das conexões produzidas historicamente, bem como das contradições e das conexões essenciais que caracterizam o conceito.

Com a revelação da relação essencial em sua forma abstrata, o pensamento segue o movimento da abstração inicial para o estudo da diversidade dos fenômenos, a fim de alcançar a generalização do conceito de fração. No movimento de ascensão, o pensamento se move na busca de evidências que caracterizam o aparecimento de suas especificidades. No processo de generalização do conceito, surge o indício de que é possível a representação de um número inteiro por meio de uma fração. Isso ocorre, desde que a quantidade de divisões seja de submúltiplos da quantidade de repetições $\left(\frac{4}{2} = 2\right)$. A evidência dessa relação permite que o pensamento ascenda ao conjunto dos números racionais: inteiros e fracionários.

Observa-se que, mesmo partindo do concreto sensível (figuras geométricas), por meio de processos mediados, o pensamento busca a abstração e a generalização das conexões internas que constituem o conceito de fração. As tarefas analisadas dão indícios para a afirmação de que elas manifestam as possibilidades de desenvolver, nos estudantes, o movimento do pensamento conceitual dialético: redução do concreto ao abstrato e ascensão do abstrato ao concreto.

Chegar a esse nível de desenvolvimento do pensamento conceitual requer, segundo Davídov (1988), não só tarefas com fortes vínculos entre si como também a colaboração do professor com orientações pertinentes para que se crie as condições de apropriação das ações e a aquisição das correspondentes capacidades que possibilitam a sua execução.

Referências

ALEKSANDROV, Aleksandr Danilovich; KOLMOGOROV, Andrey; LAVRENTYEV, Mikhail Alekseevich. **La matemática:** su contenido, métodos y significado. Madrid: Alianza Universidad, 1973.

AMORIM, Marlene Pires. **Apropriação de significações do conceito de números racionais:** um enfoque histórico-cultural. 2007. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2007.

DAVÍDOV, Vasili. Análisis de los principios didácticos de la escuela tradicional y posibles principios de enseñanza en el futuro próximo. *In:* SHUARE, Marta (org.). **La psicología evolutiva y pedagógica en la URSS**. Moscú: Progreso, 1987. p. 143-155.

DAVÍDOV, Vasili. **La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico:** investigación psicológica teórica y experimental. Moscú: Progreso, 1988.

DAVÍDOV, Vasili; MÁRKOVA, Aelita. La concepción de la actividad de estudio de los escolares. *In*: SHUARE, Marta (org.). **La psicología evolutiva y pedagógica en la URSS**. Moscú: Progreso, 1987. p. 316-337.

DAVÝDOV, Vasily Vasilyevich. **Tipos de generalización en la enseñanza.** 3. ed. Habana: Pueblo y Educación, 1982.

FREITAS, Daiane de. **O movimento do pensamento expresso nas tarefas particulares propostas por Davýdov e colaboradores para apropriação do sistema conceitual de fração**. 2016. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2016.

ГОРБОВ, Сергей Федорович *et al*. Обучение математика: 5 класса. пособие для учителя (система д. ъ. эльконина - в.в. давыдова). Москва: ВИТА-ПРЕСС, 2006. = GORBOV, Sergey Fedorovich *et al*. **Ensino de matemática**: 5º ano: manual para o professor. Moscou: Vita-Press, 2006. (Sistema de Elkonin–Davidov).

ГОРБОВ, Сергей Федорович *et al*. математика: учебник тетрадь для 5 классаобщеобразоват. учрежд. (система д. ъ. эльконина - в.в. давыдова). в 3 - х частях. Москва: ВИТА-ПРЕСС, 2011. = GORBOV, Sergey Fedorovich *et al*. **Matemática**: caderno de livros didáticos para instituição de ensino geral do 5º ano. Moscou: Vita-Press, 2011. (Sistema de Elkonin–Davydov).

ISIDORO, Luciane Corrêa do Nascimento. **Modo de organização do ensino desenvolvimental de fração**: o conhecimento revelado por acadêmicas de pedagogia. 2019. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2019.

KOPNIN, Pavel Vasilyevich. **A dialética como lógica e teoria do conhecimento**. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1978.

KOPNIN, Pavel Vasilyevich. Lo abstrato y lo concreto. *In*: ROSENTAL, Mark Moisevich; STRAKS, Grigori Markovich (org.). **Categorias del materialismo dialectico**. México, DF: Grijalbo, 1958. p. 299-320.

LIBÂNEO, José Carlos; FREITAS, Raquel Aparecida Marra de Madeira. Vasily Vasilyevich Davydov: a escola e a formação do pensamento teórico-científico. *In*: LONGAREZI, Andréa Maturano; PUENTES, Roberto Valdés (org.). **Ensino desenvolvimental**: vida, pensamento e obra dos principais representantes russos. Uberlândia: UFU, 2013. p. 315-350.

MADEIRA, Silvana Citadin. **"Prática"**: uma leitura histórico-crítica e proposições davydovianas para o conceito de multiplicação. 2012. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2012.

ROMEIRO, Iraji de Oliveira. **O movimento do pensamento teórico de professores sobre o conceito de fração e o sentido atribuído aos materiais didáticos na atividade de ensino**. 2017. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de São Paulo, Guarulhos, 2017.

ROSA, Josélia Euzébio da. **Proposições de Davydov para o ensino de matemática no primeiro ano escolar**: inter-relações dos sistemas de significações numéricas. 2012. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2012.

ROSENTAL, Mark Moisevich. **Da teoria marxista do conhecimento**. Rio de Janeiro: Vitória, 1956.

ROSENTAL, Mark Moisevich. **Princípios de lógica dialéctica**. Tradução Augusto Vidal Boget. Montevideo: Pueblos Unidos, 1962.

SANTOS, Cleber de Oliveira dos. **O movimento conceitual de fração a partir dos fundamentos da lógica dialética para o modo de organização do ensino**. 2017. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2017.

SCHMITTAU, Jean. The role of theoretical analysis in developing algebraic thinking: a vygotskian perspective. *In*: CAI, Jinfa; KNUTH, Eric (ed.). **Early algebraization**: avanços na educação matemática. Berlin: Heidelberg, 2011. p. 71-85. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_5

ZUCKERMAN, Galina *et al*. Introducing basic concepts: in search of the missing scaffolds. **Cultural-Historical Psychology**, Moscow, v. 13, n. 4, p. 4-14, 2017. Disponível em: http://psyjournals.ru/en/kip/2017/n4/Tsukerman_Obukhova_Ryabinina_Shi.shtml. Acesso em: 27 jul. 2020.

Recebido em: 20.04.2020
Revisado em: 30.08.2020
Aprovado em: 24.11.2020

Daiane de Freitas é graduada em matemática e mestre em educação pela Universidade do Extremo Sul Catarinense (Unesc). É professora na Rede Municipal e Estadual de Ensino de Criciúma, Santa Catarina, e membro do Grupo de Pesquisa em Educação Matemática: uma abordagem Histórico-Cultural (Gpemahc).

Ademir Damazio é doutor em educação pela Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). É professor aposentado e atualmente, pesquisador independente.