Lecturas Matemáticas
Volumen **43** (1) (2022), páginas 5-22
ISSN 0120-1980

La técnica de Feynman de derivación bajo el signo integral

Differentiation under the integral sign: Feynman's technique

José Manuel Sánchez Muñoz[1] y Pedro Sempere Valdés[2]

[1]Universidad Politécnica de Madrid, España
[2]Sociedad de Educación Matemática «Al-Khwarizmi», España

RESUMEN. Este artículo aborda diferentes formas de resolución de varias integrales sin primitiva elemental. Dicha estrategia popularizada por el físico teórico Richard Feynman por lo que es comúnmente conocida como técnica de Feynman, se fundamenta en asignar una parametrización a la función integrando, y mediante el uso de la función derivada y la descomposición en fracciones simples, se transforma el problema en la resolución de integrales elementales y por ende, se obtiene el valor de una primitiva que de otra manera sería muy complicado alcanzar.

Palabras clave: técnica de Feynman, elemental, integral definida, descomposición en fracciones simples, derivación bajo signo integral.

ABSTRACT. This article deals with different ways of solving various integrals without elementary primitives. This strategy, popularized by the theoretical physicist Richard Feynman for what is commonly known as the Feynman's technique, is based on assigning a parameterization to the integrand function, and through the use of the derivative function and the decomposition into simple fractions, the problem is transformed into the resolution of elementary integrals and therefore, the value of a primitive is obtained that would otherwise be very difficult to achieve.

Key words: Feynman's technique, elementary, definite integral, partial fraction decomposition, differentiation under the integral sign.

2010 AMS Clasificación Matemática por Temas: 28-01.

1. Introducción

En el día a día de nuestra labor como docente y profesional de la matemática, uno suele buscar nuevos problemas que a modo de retos puedan resultarnos útiles desde un punto de vista pedagógico. Estos retos pueden servir para estimular nuestro pensamiento y actualizar nuestras estrategias de razonamiento, y dicho estímulo es necesario para transmitir a nuestros alumnos nuestro entusiasmo con el fin de que ellos puedan llegar a crear aprendizaje significativo.

Es por ello que algunos amigos y compañeros virtuales amantes de la matemática, nos citáramos en un grupo público de Telegram (https://t.me/Retos_Matematicos) con el fin de proponernos problemas diarios que consideramos que pueden resultar edificantes para nuestra labor pedagógica cotidiana.

Hace un tiempo cayeron en nuestras manos algunos problemas que consistían en la integración de funciones sin primitivas elementales y que sirvieron a estos autores para profundizar en un área que a menudo queda fuera del currículo pedagógico de la secundaria (al menos en España), y que como mucho se da en áreas de cálculo avanzado en cursos universitarios.

Algunos ejemplos de aquellos problemas que se plantearon en el grupo anteriormente descrito mostraban una aparente normalidad, aunque pronto llegamos a entender que se trataba más bien de un «lobo con piel de cordero».

$$\int_0^{\pi} \ln(a + b\cos x)\, dx, \quad a > b \geq 0; \qquad \int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2};$$

$$\int_0^{\infty} x\, e^{-ax} \cos(\lambda x)\, dx; \qquad \int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx; \qquad \int_0^{\infty} \cos x \cdot e^{-x^2}\, dx$$

Rápidamente, algunos compañeros pusieron de manifiesto que resolver estas integrales no se trataba desde luego de una tarea sencilla, ya que la mayoría de ellas no tenían una primitiva elemental. Sin embargo, para muchos de nosotros, el reto que se nos ponía por delante sirvió en algunos casos para desempolvar aquellos apuntes de nuestra época de estudiantes, incluso, algunos de nosotros no tuvimos más remedio que ahondar y recurrir a la investigación de bibliografía especializada, para descubrir para nuestra sorpresa que no existían demasiadas referencias de calidad en castellano.

En este artículo desarrollamos en gran medida la fundamentación metodológica de la estrategia seguida para abordar la lista de problemas propuestos en el grupo. Dicha metodología que se engloba dentro del Cálculo Avanzado Integral, y se llevará a cabo un repaso de la fundamentación formal que lleva asociada.

2. Derivación bajo el signo integral

2.1. El truco de Feynman

La verdad es que resulta un tanto injusto otorgarle al físico Richard Feynman (1918–1988) la total y completa autoría exclusiva de esta metodología, por eso el lector podrá encontrar referencias a esta estrategia como «regla integral de Leibniz» o «derivación bajo el signo integral». Feynman aprendió la técnica de diferenciar parámetros bajo el signo de la integral siendo aún estudiante en la Universidad de Wisconsin-Madison. Al parecer llegó a grangearse una gran reputación para resolver integrales. Cabe ponerle de manifiesto al lector, que la magnitud e importancia en el mundo de la ciencia de la figura de Feynman puede ser considerada al nivel de científicos como Albert Einstein o Stephen Hawking.

Figura 1. Richard Feynman (Fermilab – 1984)

La técnica utilizada por Feynman como a continuación veremos, resulta bastante poderosa, y se conoce así porque el californiano la popularizó, aunque parece ser que él la encontró en un famoso libro llamado *Cálculo Avanzado* (1926) del profesor del MIT Frederick S. Woods, sin embargo no debe confundirse con la formulación integral de la trayectoria de Feynman de la mecánica cuántica.

En palabras del propio Feynman:

> *«Una cosa que nunca aprendí fue la integración de contornos. Había aprendido a hacer integrales mediante varios métodos que aparecían en un libro que mi profesor de física durante la secundaria el Sr. Bader me había dejado.*
>
> *El libro también mostraba cómo diferenciar parámetros bajo el signo integral – resulta una operación curiosa –. Resultó que aquello no se enseñaba mucho en las universidades; pasaba inadvertido. Pero me hice popular utilizando aquel método, y solía recurrir a esa herramienta una y otra vez. Como aprendí de manera autodidacta de aquel libro, utilizaba métodos singulares de resolver integrales.*
>
> *El resultado fue que, cuando los chicos del MIT o Princeton tenían problemas para resolver alguna integral, era poque no podían hacerlo con los métodos ortodoxos que habían aprendido en la escuela. Si fuera una integral de contorno, habrían encontrado una solución. Entonces yo intentaba diferenciar bajo el signo integral, y normalmente funcionaba. Por eso alcancé una gran reputación en resolver integrales, solo porque mi caja de herramientas era completamente distinta a la del resto de la gente, y habían utilizado todas las herramientas con las que contaban sin éxito antes de presentarme el problema.»* [3, pp. 71-72]

2.2. Fundamentación teórica

El método al que hace referencia Feynman resulta bastante elegante y efectivo a la hora de resolver integrales complejas haciendo uso únicamente de cálculo elemental. La técnica de integración de Feynman no es más que una aplicación sencilla de un teorema atribuido a Leibniz.

Teorema 1 (Regla de Leibniz)**.** *Sea la función $f(x,t)$ continua y con derivada $\partial f/\partial t$ en un dominio xt–plano que incluye el rectángulo $a \leq x \leq b$, $t_1 \leq t \leq t_2$. Entonces para $t_1 \leq t \leq t_2$*

$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx$$

En otras palabras, la diferenciación y la integración pueden ser intercambiables en cuanto a su orden de aplicación, por ejemplo

$$\frac{d}{dt}\int_0^\pi \operatorname{sen}(xt)\,dx = \int_0^\pi x\cos(xt)\,dt$$

En este ejemplo, ambos miembros de la igualdad pueden ser calculados por separado y se comprueba el resultado del teorema.

Demostración. Sea

$$g(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx, \qquad t_1 \leq t \leq t_2$$

Como $\partial f/\partial t$ es continua, se extrae la conclusión (teorema de continuidad de integrales múltiples) que $g(t)$ es continua para $t_1 \leq t \leq t_2$. Ahora para $t_1 \leq t_3 \leq t_2$,

$$\int_{t_1}^{t_3} g(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_3}\int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx\,dt.$$

Por el teorema anteriormente referido, se puede intercambiar el orden de integración, resultando

$$\int_{t_1}^{t_3} g(t)\,dt = \int_a^b\int_{t_1}^{t_3} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dt\,dx = \int_a^b \Big(f(x,t_3) - f(x,t_1)\Big)\,dx =$$
$$= \int_a^b f(x,t_3)\,dx - \int_a^b f(x,t_1)\,dx = F(t_3) - F(t_1)$$

donde $F(t)$ es la primitiva

$$\int_a^b f(x,t)\,dx = F(t).$$

Si se considera el parámetro t_3 simplemente una variable t, resulta

$$F(t) - F(t_1) = \int\limits_{t_1}^{t} g(u)\,du.$$

Ambos miembros de la igualdad anterior pueden diferenciarse respecto de t. Por el teorema fundamental del cálculo integral, se obtiene

$$F'(t) = g(t) = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx$$

$\square$

Veamos algunos otros teoremas necesarios para el entendimiento de la técnica que expondremos a continuación. Obviamos la formalidad de presentar en este documento la demostración de los mismos que dejamos en manos del lector y su deseo de profundizar en el tema, a excepción de la generalización del último que sí consideramos oportuno.

Teorema 2 (Versión Cálculo Elemental)**.** *Sea $f : [a,b] \times Y \to \mathbb{R}$ una función, con $[a,b]$ un intervalo cerrado, e Y un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$. Supóngase que $f(x,y)$ y $\partial f(x,y)/\partial x$ son continuas en la variables x e y conjuntamente. Entonces $\int_Y f(x,y)\,dy$ existe como función continuamente derivable de x sobre $[a,b]$, con derivada*

$$\frac{d}{dx}\int_Y f(x,y)\,dy = \int_Y \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,dy.$$

Teorema 3 (Versión Teoría de la Medida)**.** *Sean X un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$, y Ω un espacio medible. Supóngase que una función $f : X \times \Omega \to \mathbb{R}$ satisface las siguientes condiciones:*

(1) $f(x,\omega)$ es una función integrable de Lebesgue de ω para cada $x \in X$.

(2) Para la mayoría $\omega \in \Omega$, la derivada $\partial f(x,\omega)/\partial x$ existe para todo $x \in X$.

(3) Existe una función integrable $\Theta : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $|\partial f(x,\omega)/\partial x| \leq \Theta(\omega)$ para todo $x \in X$.

Entonces para todo $x \in X$, se cumple

$$\frac{d}{dx}\int_\Omega f(x,\omega)\,dw = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x} f(x,\omega)\,d\omega.$$

Con el fin de justificar el poder variar el orden del límite y la integración se enuncia el siguiente teorema.

Teorema 4 (Convergencia dominada). *Sea X un espacio medible, y $\Phi, f_1, f_2, \ldots$ funciones medibles tales que $\int_X \Phi < \infty$ y $|f_n| \leq \Phi$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $f_n \to f$, entonces f es integrable y*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n = \int_X f.$$

Existen variaciones frecuentemente utilizadas a los teoremas expuestos anteriormente (véase [4]). Respecto a los dominios de integración, no solo puede variar el integrando respecto a un parámetro arbitrario, sino que se pueden considerar subconjuntos de como dominios de integración que varían a su vez con el parámetro considerado. En el caso unidimensional, esto da pie al siguiente teorema.

Teorema 5 (Regla de Leibniz generalizada). *Sea la función $f(x,t)$ continua y con derivada continua $\partial f/\partial t$ en un dominio xt–plano, y $a(t)$ y $b(t)$ funciones con derivadas continuas para $t_1 \leq t \leq t_2$, entonces se cumple*

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\,dx = \int\limits_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx + f\big(b(t),t\big)\,b'(t) - f\big(a(t),t\big)\,a'(t).$$

Un ejemplo de aplicación de este teorema puede ser, por ejemplo,

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{t^2}^{t^3} e^{-x^2t}dx = \int\limits_{t^2}^{t^3} e^{-x^2t}\big(-x^2\big)\,dx + e^{-t^7}\big(3t^2\big) - e^{-t^5}(2t).$$

Demostración. Sean $u = b(t)$, $v = a(t)$, $w = t$, de manera que la integral $F(t)$ puede expresarse como sigue

$$F(t) = \int\limits_{v}^{u} f(x,\omega)\,dx = G(u,v,w),$$

donde u, v, w dependen todas ellas de t. Por lo tanto, aplicando la regla de la cadena

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial G}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt} + \frac{\partial G}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt} + \frac{\partial G}{\partial w}\cdot\frac{dw}{dt}$$

Veremos que los tres términos de la anterior expresión se corresponden con los tres términos de la expresión especificada en el teorema. En efecto, se tiene que por el teorema fundamental del cálculo integral,

$$\frac{\partial G}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\int\limits_{v}^{u} f(x,w)\,dw = f(u,w).$$

Como $u = b(t)$, entonces $du/dt = b'(t)$, y entonces

$$\frac{\partial G}{\partial y}\cdot\frac{du}{dt} = f\big(b(t),t\big)\,b'(t).$$

Del mismo modo ocurre con el tercer término, cuyo signo negativo aparece porque

$$\frac{\partial}{\partial v}\int_{v}^{u} f(x,w)\,dw = \frac{\partial}{\partial v}\left(-\int_{u}^{v} f(x,w)\,dx\right) = -f(v,w).$$

Finalmente,

$$\frac{\partial G}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial w}\int_{v}^{u} f(x,w)\,dx = \int_{v}^{u} \frac{\partial f}{\partial w}(x,w)\,dx,$$

por la regla de Leibniz. Como $w = t$, $dw/dt = 1$, y resulta el primer término. $\square$

3. Ejemplos de aplicación

Ejemplo 1.

$$\int_{0}^{\pi} \ln(a + b\cos x)\,dx; \qquad a > b \geq 0$$

Solución. Si se considera la función $I(a)$ dependiente del parámetro a, entonces

$$I(a) = \int_{0}^{\pi} \ln(a + b\cos x)\,dx \Rightarrow \frac{dI(a)}{da} = I'(a) = \frac{d}{da}\int_{0}^{\pi} \ln(a + b\cos x)\,dx.$$

Aplicando el teorema 1, entonces

$$I'(a) = \int_{0}^{\pi} \frac{\partial}{\partial a}\Big(\ln(a + b\cos x)\Big)\,dx \Rightarrow I'(a) = \int_{0}^{\pi} \frac{1}{a + b\cos x}\,dx.$$

En este punto, se utiliza la sustitución de Weierstrass, es decir

$$\tan\frac{x}{2} = t \Rightarrow \tan^2\frac{x}{2} = t^2 \Rightarrow \sec^2\frac{x}{2} - 1 = t^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} = 1 + t^2 \Rightarrow \cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+t^2}$$

Considerando la relación trigonométrica del ángulo doble, entonces

$$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2} \Rightarrow \frac{1+\cos x}{2} = \frac{1}{1+t^2} \Rightarrow \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

teniendo en cuenta que

$$\operatorname{sen} x = \sqrt{1-\cos^2 x} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \sqrt{1 - \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}$$

además

$$dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

Entonces se realiza el cambio sugerido,

$$\begin{aligned} I'(a) &= \int \frac{1}{a + b\,\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{2}{a(1+t^2)+b(1-t^2)}\,dt = \\ &= 2\int \frac{dt}{a + at^2 + b - bt^2} = 2\int \frac{dt}{(a+b)+(a-b)t^2} = \\ &= 2\int \frac{dt}{\left(\frac{a+b}{a-b}+t^2\right)\cdot(a-b)} = \frac{2}{a-b}\int \frac{dt}{\frac{a+b}{a-b}+t^2} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $a > b \Rightarrow \frac{a+b}{a-b} > 0$, entonces

$$\begin{aligned} I'(a) &= \frac{2}{a-b}\int \frac{dt}{\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\right)^2 + t^2} = \frac{2}{a-b}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}}\cdot \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}}\right)\right) + C = \\ &= \frac{2}{a-b}\cdot\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\cdot \arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\cdot t\right) + C = \\ &= \frac{2}{a-b}\cdot\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\cdot \arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\cdot \tan\frac{x}{2}\right) + C. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} I'(a) &= \int_0^{\pi} \frac{dx}{a + b\cos x} = \frac{2}{a-b}\cdot\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\cdot \arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\cdot \tan\frac{x}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{a-b}\cdot\sqrt{a+b}}\cdot\Big(\arctan(\infty) - \arctan(0)\Big) = \\ &= \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}} \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\frac{dI(a)}{da} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

luego,

$$I(a) = \pi\cdot\int \frac{da}{\sqrt{a^2-b^2}} = \pi\cdot\ln\left|a+\sqrt{a^2-b^2}\right| + C$$

Haciendo $b = 0$,

$$\pi \cdot \int \frac{da}{\sqrt{a^2}} = \pi \cdot \ln \left| a + \sqrt{a^2} \right| + C$$
$$\pi \cdot \int \frac{da}{a} = \pi \cdot \ln |2a| + C$$

entonces

$$\pi \cdot \ln a = \pi \ln 2 + \pi \cdot \ln a + C \Rightarrow C = -\pi \cdot \ln 2$$

Por lo tanto,

$$\int_0^\pi \ln(a + b\cos x)\, dx = \pi \cdot \left(\ln \left| a + \sqrt{a^2 - b^2} \right| - \ln 2 \right) =$$
$$= \pi \cdot \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{2} \right)$$

Ejemplo 2.

$$\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^2}$$

Solución. Para resolver esta integral se introduce un parámetro en el integrando y se resuelve utilizando la derivada sobre dicho parámetro. La nueva integral queda del siguiente modo:

$$\int_0^\infty \frac{dt}{(a^2+t^2)^2}.$$

En primer lugar, se ha de utilizar un resultado previo que es prácticamente inmediato de obtener:

$$\int_0^\infty \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a} \cdot \arctan\left(\frac{t}{a}\right)\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2a}.$$

Si se deriva en ambos lados en la expresión anterior se obtiene

$$\frac{d}{da}\left(\int_0^\infty \frac{dt}{a^2+t^2} \right) = \frac{d}{da}\left(\frac{\pi}{2a}\right).$$

Aplicando en este punto el teorema 1 resulta

$$\left(\int_0^\infty \frac{d}{da}\left(\frac{1}{a^2+t^2}\right)\right) dt = \frac{d}{da}\left(\frac{\pi}{2a}\right).$$

Operando,

$$\int_0^\infty \left(-\frac{2a}{\left(a^2+t^2\right)^2}\right) dt = -\frac{\pi}{2a^2}$$

y extrayendo el término $2a$ de la integral (ya que se trata de una constante), resulta

$$-2a\int_0^\infty \frac{dt}{\left(a^2+t^2\right)^2} = -\frac{\pi}{2a^2} \Rightarrow \int_0^\infty \frac{dt}{\left(a^2+t^2\right)^2} = \frac{\pi}{4a^3}.$$

Haciendo $a=1$ se llega al resultado original, resultando entonces

$$\int_0^\infty \frac{dt}{\left(1+t^2\right)^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Ejemplo 3.

$$\int_0^\infty x\, e^{-ax}\cos(\lambda x)\, dx$$

Solución. Antes de resolver esta integral, vamos a estudiar otra integral que nos servirá como apoyo estratégico para dicha resolución:

$$I = \int e^{-ax}\cos(\lambda x)\, dx.$$

Utilizando la integración por partes, resulta

$$\begin{array}{ll} u = e^{-ax} & du = -ae^{-x}dx \\ dv = \cos(\lambda x)\, dx & v = \frac{1}{\lambda}\operatorname{sen}(\lambda x) \end{array}$$

por lo tanto,

$$I = e^{-ax}\cdot\frac{1}{\lambda}\operatorname{sen}(\lambda x) - \int \frac{1}{\lambda}\operatorname{sen}(\lambda x)\cdot\left(-ae^{-ax}dx\right) = \\ = \frac{1}{\lambda}e^{-ax}\operatorname{sen}(\lambda x) + \frac{a}{\lambda}\int e^{-ax}\operatorname{sen}(\lambda x)\, dx.$$

Se aplica nuevamente la integración por partes a la integral de la expresión anterior, resultando

$$\begin{array}{ll} u = e^{-ax} & du = -ae^{-ax}dx \\ dv = \operatorname{sen}(\lambda x)\, dx & v = -\frac{1}{\lambda}\cos(\lambda x) \end{array}$$

entonces

$$I = e^{-ax}\left(-\frac{1}{\lambda}\cos(\lambda x)\right) - \int\left(-\frac{1}{\lambda}\cos(\lambda x)\right)\cdot\left(-ae^{-ax}dx\right) = \\ = -\frac{1}{\lambda}e^{-ax}\cos(\lambda x) - \frac{a}{\lambda}\int e^{-ax}\cos(\lambda x)\, dx.$$

En esta segunda integración por partes se ha obtenido la integral original, por lo tanto

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\lambda}e^{-ax}\operatorname{sen}(\lambda x) + \frac{a}{\lambda}\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-ax}\cos(\lambda x) - \frac{a}{\lambda}\int e^{-ax}\cos(\lambda x)\,dx\right) = \\ &= \frac{1}{\lambda}e^{-ax}\operatorname{sen}(\lambda x) - \frac{a}{\lambda^2}e^{-ax}\cos(\lambda x) - \frac{a^2}{\lambda^2}\int e^{-ax}\cos(\lambda x)\,dx, \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned} \left(1+\frac{a^2}{\lambda^2}\right)\int e^{-ax}\cos(\lambda x)\,dx &= \frac{1}{\lambda}e^{-ax}\operatorname{sen}(\lambda x) - \frac{a}{\lambda^2}e^{-ax}\cos(\lambda x) \\ \frac{\lambda^2+a^2}{\lambda^2}\int e^{-ax}\cos(\lambda x)\,dx &= \frac{1}{\lambda}e^{-ax}\operatorname{sen}(\lambda x) - \frac{a}{\lambda^2}e^{-ax}\cos(\lambda x) \\ \left(\lambda^2+a^2\right)\int e^{-ax}\cos(\lambda x)\,dx &= \lambda^2\left(\frac{1}{\lambda}e^{-ax}\operatorname{sen}(\lambda x) - \frac{a}{\lambda^2}e^{-ax}\cos(\lambda x)\right) \\ \int e^{-ax}\cos(\lambda x)\,dx &= \frac{\lambda^2}{\lambda^2+a^2}\left(\frac{1}{\lambda}e^{-ax}\operatorname{sen}(\lambda x) - \frac{a}{\lambda^2}e^{-ax}\cos(\lambda x)\right). \end{aligned}$$

Simplificando, se obtiene el siguiente resultado:

$$\int e^{-ax}\cos(\lambda x)\,dx = \frac{1}{\lambda^2+a^2}\Big(\lambda e^{-ax}\operatorname{sen}(\lambda x) - a\,e^{-ax}\cos(\lambda x)\Big) + C.$$

Obtenido el anterior resultado, se procede a efectuar el límite

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-ax}\cos(\lambda x)\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-ax}\cos(\lambda x)\,dx = \\ &= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{\lambda^2+a^2}\Big(\lambda e^{-ax}\operatorname{sen}(\lambda x) - a\,e^{-ax}\cos(\lambda x)\Big)\right)\Bigg|_0^\infty = \\ &= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{\lambda^2+a^2}\Big(\lambda e^{-ab}\operatorname{sen}(\lambda b) - a\,e^{-ab}\cos(\lambda b)\Big)\right) + \frac{a}{\lambda^2+a^2}. \end{aligned}$$

El límite se hace cero, dado que el seno y el coseno están acotados y las exponenciales se hacen cero cuando b tiende a infinito. Con todo esto el resultado final es

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos(\lambda x)\,dx = \frac{a}{\lambda^2+a^2}.$$

La integral de la expresión anterior puede ser considerada como una función del parámetro a, como $H(a)$.

$$H(a) = \int_0^\infty e^{-ax}\cos(\lambda x)\,dx \tag{1}$$

En este punto utilizamos la técnica de Feynman derivando respecto al parámetro a, resultando

$$\frac{dH(a)}{da} = \int_0^\infty \frac{d}{da}\left(e^{-ax}\right)\cos(\lambda x)\,dx = -\int_0^\infty x\,e^{-ax}\cos(\lambda x)\,dx = -I(a),$$

donde $I(a)$ es la integral original propuesta.

Por otra parte, derivando respecto al parámetro a el miembro de la derecha de la expresión (1), se obtiene

$$\frac{d}{da}\left(\frac{a}{a^2+\lambda^2}\right) = \frac{\lambda^2 - a^2}{\left(a^2+\lambda^2\right)^2},$$

por lo tanto la integral original $I(a)$ resulta

$$I(a) = \frac{a^2-\lambda^2}{\left(a^2+\lambda^2\right)^2}.$$

Ejemplo 4.

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$

Solución. La integral anterior es bastante «famosa» en teoría de probabilidad y análisis de Fourier, y recibe el nombre de *integración gaussiana*. Hay que comentar que existen varias vías de obtención de su valor, pero aquí vamos a exponer cómo obtener dicho valor final mediante la técnica de Feynman.

En sencillo comprobar que $g(x) = e^{-x^2}$ es una función par, esto es, $g(x) = g(-x)$, por lo tanto se cumple

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx = 2\int_0^\infty e^{-x^2}dx \quad \Rightarrow \quad I = \int_0^\infty e^{-x^2}dx.$$

Consideremos una función $f(t)$ expresada en forma integral

$$f(t) = \left(\int_0^t e^{-x^2}dx\right)^2. \tag{2}$$

En primer lugar vamos a encontrar una expresión general para $f(t)$ y después tomaremos límites cuando t tienda a infinito. Derivando la expresión anterior,

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\int_0^t e^{-x^2}dx\right)^2 = 2\left(\int_0^t e^{-x^2}dx\right)\cdot\frac{d}{dt}\int_0^t e^{-x^2}dx$$

En la expresión anterior, el factor de la derivada puede ser calculado fácilmente mediante el teorema fundamental del cálculo, de manera que

$$\frac{d}{dt}\int_a^t f(x)\,dx = f(t),,$$

por lo tanto, dicho factor resulta simplemente evaluar $f(x) = e^{-x^2}$ en t, resultando

$$\frac{df(t)}{dt} = 2\int_0^t e^{-x^2}dx \cdot e^{-t^2}.$$

Como se integra respecto a la variable x, entonces e^{-t^2} puede introducirse d.entro del integrando ya que es como si se tratara de una constante, luego

$$\frac{df(t)}{dt} = 2\int_0^t e^{-x^2}\cdot e^{-t^2}dx = 2\int_0^t e^{-x^2-t^2}dx.$$

En este punto se realiza un cambio de variable, de manera que

$$u = \frac{x}{t} \Rightarrow x = ut \Rightarrow dx = t\,du \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow u = 0 \\ x = t \Rightarrow u = \frac{t}{t} = 1 \end{cases}$$

$$\frac{df(t)}{dt} = 2\int_0^1 e^{-u^2t^2-t^2}t\,du = \int_0^1 e^{-u^2t^2-t^2}(2t)\,du.$$

Utilizando nuevamente el teorema fundamental del cálculo pero en esta otra versión

$$\frac{d}{dt}\int f(t)\,dt = f(t)$$

luego derivando e integrando respecto del parámetro t, considerando que la variable u se comporta como constante en dicho integrando (y por eso se utiliza la derivada parcial)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f(t) &= \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial t}\int e^{-t^2(u^2+1)}(2t)\,dt\right)du = \\ &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{1}{u^2+1}\int e^{-t^2(u^2+1)}\Big(-2t(u^2+1)\Big)dt\right)du = \\ &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{1}{u^2+1}\,e^{-t^2(u^2+1)}\right)du.\end{aligned}$$

Por conveniencia, en la anterior integral indefinida resuelta se debe sumar una constante, pero dicha constante puede ser cualquiera, ya que lo que interesa es que al derivar respecto de t se obtenga lo que se tenía originalmente, es decir no alterar nada, por lo tanto se puede elegir sin pérdida de generalidad una constante igual a cero. En este punto, se utiliza la técnica de derivación bajo el signo integral, por lo que aplicando el teorema 1 (Regla de Leibniz), resulta

$$\frac{d}{dt}f(t) = \frac{d}{dt}\int_0^1 \left(-\frac{1}{u^2+1}\, e^{-t^2(u^2+1)}\right) du.$$

Fíjese el lector que mientras se deriva respecto de t, se integra respecto de u, de ahí que se permite intercambiar la derivada con la integral; integrando en ambos miembros de la anterior igualdad resulta

$$\frac{d}{dt}f(t) = \frac{d}{dt}\int_0^1 \left(-\frac{1}{u^2+1}\, e^{-t^2(u^2+1)}\right) du.$$

e integrando en ambos lados respecto de t,

$$\int \frac{d}{dt}f(t)\, dt = \int \frac{d}{dt}\left[\int_0^1 \left(-\frac{1}{u^2+1}\, e^{-t^2(u^2+1)}\right) du\right] dt.$$

En este punto, por el teorema fundamental del cálculo, pero en esta nueva versión

$$\int \frac{d}{dx}f(x)\, dx = f(x) + C,$$

entonces,

$$f(t) = \int_0^1 \left(-\frac{1}{u^2+1}\, e^{-t^2(u^2+1)}\right) du + C. \tag{3}$$

En la expresión anterior se obtienen sendas constantes en ambos miembros que se simplifican en C en el miembro derecho. Se tienen por lo tanto dos expresiones (2) y (3) para $f(t)$. Se necesita conocer el valor de la constante de integración C,

$$f(0) = -\int_0^1 \frac{du}{u^2+1} + C = -\arctan u\Big|_0^1 + C = -\frac{\pi}{4} + C.$$

Por otro lado, utilizando la expresión (2) de $f(t)$ calculada previamente, resulta

$$f(0) = \left(\int_0^0 e^{-x^2} dx\right)^2 = 0.$$

Igualando ambos resultados, se obtiene el valor de la constante C,

$$-\frac{\pi}{4} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{\pi}{4}.$$

Entonces

$$f(t) = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{1}{u^2+1} e^{-t^2(u^2+1)} du. \tag{4}$$

Como se ha comentado anteriormente, las expresiones (2) y (4) son dos maneras distintas pero equivalentes de expresar $f(t)$, luego tomando límites

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx\right)^2 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} f(t) = I^2,$$

o lo que es lo mismo,

$$I^2 = \lim_{t\to\infty} f(t),$$

y si calculamos dicho límite a partir de la expresión (4),

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \frac{\pi}{4} - \lim_{t\to\infty} \int_0^1 \frac{1}{u^2+1} e^{-t^2(u^2+1)} du.$$

Como en el límite de la derecha la variable t sólo aparece en la exponencial, el resto permanece como si fuera una constante, por lo tanto

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{1}{u^2+1} \left(\lim_{t\to\infty} e^{-t^2(u^2+1)}\right) du.$$

Claramente el límite de la derecha se anula, por lo tanto

$$I^2 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Recuerde el lector que como el integrando se trataba de una función par, I resultaba únicamente la mitad de la integral original propuesta, por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

Ejemplo 5.

$$\int_0^{\infty} \cos x \cdot e^{-x^2} dx$$

Solución. Se considera la expresión de la integral dependiente de un parámetro b, de manera que

$$I(b) = \int_0^{\infty} \cos(bx) \cdot e^{-x^2} dx$$

Derivando la expresión anterior respecto del parámetro b resulta

$$\frac{dI(b)}{db} = \frac{d}{db} \int_0^{\infty} \cos(bx) \cdot e^{-x^2} dx.$$

Aplicando el teorema 1, entonces

$$I'(b) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial b}\left(\cos(bx)\cdot e^{-x^2}\right)dx = \int_0^\infty -x\,\mathrm{sen}(bx)\cdot e^{-x^2}dx.$$

En este punto se procede a la integración por partes

$$\begin{array}{ll} u = \mathrm{sen}(bx) & du = -xe^{-x^2}dx \\ dv = b\cos(bx)\,dx & v = \frac{1}{2}e^{-x^2} \end{array}$$

entonces

$$I'(b) = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(bx)e^{-x^2}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \left(\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)b\cos(bx)\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}b\int_0^\infty \cos(bx)\cdot e^{-x^2}dx.$$

Por lo tanto se llega a que

$$I'(b) = -\frac{1}{2}b\cdot I(b).$$

La expresión anterior se trata de una ecuación diferencial separable, por lo tanto

$$\frac{dI(b)}{I(b)} = -\frac{1}{2}b\,db,$$

e integrando en ambos miembros

$$\int \frac{dI(b)}{I(b)} = -\frac{1}{2}\int b\,db \Rightarrow \ln I(b) = -\frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{2}\right) + C \Rightarrow$$

$$I(b) = e^{-\frac{b^2}{4}+C} = e^{-\frac{b^2}{4}}\cdot e^C = C'e^{-\frac{b^2}{4}}.$$

Veamos el valor de la constante C':

$$I(0) = C' \Rightarrow I(0) = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx.$$

La integral anterior ha sido obtenida en el ejemplo 4 (integral gaussiana), por lo tanto

$$C' = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow I(b) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot e^{-\frac{b^2}{4}}.$$

El caso de la integral propuesta resulta de considerar $b = 1$, por lo tanto

$$I(1) = \int_0^\infty \cos\cdot e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot e^{-\frac{1}{4}}.$$

4. Conclusión y valoración

La verdadera intención de este estudio ha sido presentar al lector la técnica de integración de Feynman, que a la vez que vanguardista, resulta a ojos de estos autores, una estrategia que evita recurrir al cálculo avanzado, ya que utiliza herramientas que todos manejamos desde la secundaria.

En la sección § 2 se han presentado los teoremas clave que utiliza dicha metodología para la resolución de integrales complicadas.

En la sección § 3 se han presentado algunos ejemplos de aplicación de dicha metodología en el que utilizando la técnica de Feynman fundamentada a través de los teoremas anteriormente descritos, se resuelven varias integrales no elementales cuya obtención sería prácticamente imposible utilizando estrategias de cálculo integral clásico.

Para lectores «aventajados» proponemos a continuación varios ejemplos de integrales que pueden ser resueltas utilizando la técnica expuesta en el presente documento.

$$\int_0^\infty \cos^2 x\, dx; \qquad \int_0^\infty \operatorname{sen}^2 x\, dx; \qquad \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2(x^2+1)}\, dx.$$

Nótese que las dos primeras integrales propuestas son integrales de Fresnel, un tipo de integrales que casi nunca se resuelven utilizando métodos reales. Y, para los más inquietos y curiosos por las ecuaciones integrales, invitamos a que intenten la última integral propuesta.

Referencias

[1] Bronstein, Manuel (2005). *Symbolic Integration I Transcendental Functions*, 2nd Ed. (Algorithms and Computation in Mathematics). Berlin, Germany: Springer.

[2] Cheng, Steve (2010). «Differentiation Under the Integral Sign with Weak Derivatives». En línea (consultado 13 feb. 2022): https://tinyurl.com/2p84eskw.

[3] Feynman, Richard P. (1985). *Surely You're Joking, Mr. Feynman*. New York, USA: Bantam Book & W.W. Norton Company, Inc.

[4] Flanders, Harley (1973). «Differentiation Under the Integral Sign». *American Mathematical Monthly*, 80(6), jun-jul 1973, pp. 615-627. En línea (consultado 12 feb. 2022): https://tinyurl.com/3cb42u7a.

[5] Kaplan, Wilfred (1992). «Integrals Depending on a Parameter-Leibniz's Rule» § 4.9, pp. 265-270, en *Advanced Calculus*. 4th Ed. Reading, Massachusetts, USA: Addison-Wesley Publishing Company.

[6] Talvila, Erik (2001). «Necessary and Sufficient Conditions for Differentiating under the Integral Sign». *American Mathematical Monthly*, 108(6), jun-jul 2001, pp. 544-548. En línea (consultado 12 feb. 2022): https://tinyurl.com/zdd2ws4v

[7] Woods, Frederick S. (1926). «The Definite Integral», § 6, pp. 134-163 en *Advanced Calculus. A course arranged with special reference to the needs of students of applied mathematics*. Boston, USA: Ginn and Company. En línea (consultado 12 feb. 2022): https://tinyurl.com/m3tcc3j2.

Recibido en marzo de 2022. Aceptado para publicación en mayo de 2022.

JOSÉ MANUEL SÁNCHEZ MUÑOZ
GRUPO DE INNOVACIÓN EDUCATIVA «PENSAMIENTO MATEMÁTICO»
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID
MADRID, ESPAÑA
e-mail: jmanuel.sanchez@educarex.es

PEDRO SEMPERE VALDÉS
MIEMBRO A324
SOCIEDAD DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA «AL-KHWARIZMI»
COMUNIDAD VALENCIANA, ESPAÑA
e-mail: sempere_pedval@gva.es