REDIMAT Journal of Research in Mathematics Education
Hipatia Press www.hipatiapress.com

Instructions for authors, subscriptions and further details:

http://redimat.hipatiapress.com

Argumentación Matemática Basada en Refutaciones

Jonathan Alberto Cervantes-Barraza[1], y María Guadalupe Cabañas-Sánchez[2]

1) Universidad del Atlántico, Colombia
2) Universidad Autónoma de Guerrero, México

Date of publication: June 24th, 2022
Edition period: June-October 2022

To cite this article: Cervantes-Barraza, JA., and Cabañas-Sánchez, MG. (2022). Argumentación matemática basada en refutaciones. *REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education*, *11(2)*, 159-179. doi: 10.17583/redimat.4015

To link this article: http://dx.doi.org/10.17583/redimat.4015

REDIMAT, Vol. 11 No. 2 June 2022 pp. 159-179

Mathematical Argumentation Based on Refutations

Jonathan A. Cervantes-Barraza
Universidad del Atlántico

María G. Cabañas-Sánchez
Universidad Autónoma de Guerrero

(*Received: 19 January 2019; Accepted: 10 June 2022; Published: 24 June 2022)*

Abstract

The study aims to identify the implications of refutation in arguments with elementary school students. The reconstruction and analysis of the arguments and refutations among fifth and sixth grade students in the context of the solution of mathematical tasks related to the classification of triangles according to the measure of their interior angles is presented. Theoretically, the study is based on the basic concepts of the argumentation and proof research line, in particular mathematical argumentation, reasoning and refutation are addressed. Findings of the study document the implications of the refutation of conclusions in the context of solving mathematical tasks at the elementary level, and it is recognized that students build improved arguments based on characteristics and properties of triangles.

Keywords: Refutation, Argumentations, Mathematics, Triangle.

2022 Hipatia Press
ISSN: 2014-3567
DOI: 10.17583/redimat.4015

Hipatia Press
www.hipatiapress.com

REDIMAT, Vol. 11 No. 2 June 2022 pp. 159-179

Argumentación Matemática Basada en Refutaciones

Jonathan A. Cervantes-Barraza
Universidad Autónoma de Guerrero

María G. Cabañas-Sánchez
Universidad Autónoma de Guerrero

(*Recibido: 19 Enero 2019; Aceptado: 10 Junio 2022; Publicado: 24 Junio 2022)*

Resumen

El estudio tiene como objetivo identificar las implicaciones de la refutación en argumentaciones con estudiantes de nivel primaria. Se presenta la reconstrucción y análisis de los argumentos y refutaciones entre estudiantes de sexto y quinto grado de primaria en el contexto de la solución de tareas matemáticas relacionadas con la clasificación de triángulos según la medida de sus ángulos interiores. Teóricamente el estudio se fundamenta sobre los conceptos base de la línea de investigación argumentación y prueba, de forma particular se aborda la argumentación matemática, el razonamiento y la refutación. Los resultados del estudio documentan las implicaciones de la refutación de conclusiones en el contexto de la resolución de tareas matemáticas a nivel primaria, y se reconoce que los estudiantes construyen argumentos mejorados con base en características y propiedades de los triángulos.

Palabras clave: Refutación, Argumentación, Matemáticas, Triángulo.

2022 Hipatia Press
ISSN: 2014-3621
DOI: 10.17583/redimat.4015

Investigaciones en Matemática Educativa documentan que la argumentación y la prueba son fundamentales en el estudio de las matemáticas en todos los niveles de la educación escolar, nivel primaria (Komatzu & Jones, 2017; Whitenack & Knipping, 2002), nivel bachillerato (Larios, Arellano y Gonzalez, 2018) e incluso nivel universitario (Inglis & Mejia-Ramos, 2005), pues contribuye a que los estudiantes ganen un mayor entendimiento sobre el contenido matemático (Reid & Vallejo, 2017). En este contexto, varios estudios han implicado a la refutación y la argumentación en las discusiones de la actividad en la clases de matemáticas (e. g., Ko & Knuth, 2009; Komatsu & Jones, 2017; Cervantes-Barraza, y Cabañas-Sánchez, 2018; Cervantes-Barraza, Cabañas-Sánchez y Mercado-Porras, 2020) en función de desarrollar habilidades argumentativas, comprendan ideas matemáticas y revelar la lógica de las prácticas del salón de clases (Reid, Knipping & Crosby, 2011).

Desde los planes y programas de estudios de diversos países, México (SEP, 2011), Colombia (MEN, 2006), y Estados Unidos de América (CCSSI, 2010) enfatizan en promover la argumentación desde los primeros años de escolaridad, con el fin de involucrar a los estudiantes en la participación en la producción de argumentos matemáticos (NCTM, 2000). Por lo que en el contexto que se ubica este trabajo, la Secretaría de Educación Pública (SEP) destaca los procesos de enseñanza de la matemática escolar fomente la construcción de argumentos para explicar sus resultados.

Desde los resultados de investigación, la argumentación matemática se concibe como un proceso de discurso social dinámico para descubrir nuevas ideas matemáticas, que permite criticar el razonamiento de los demás y convencer a otros sobre la veracidad de una conclusión (Rumsey & Langrall, 2016; Yackel, 2002). Es desde esta postura, que se estudia la interacción entre estudiantes que contraponen sus ideas con el objetivo de convencer la clase de matemáticas. En efecto, la argumentación en esta investigación se analiza desde el modelo extendido de Toulmin propuesto en Conner (2008). Conformado por datos, conclusiones, garantías, respaldo y la refutación. De esta estructura, se sugieren tres maneras en las que un argumento puede implicar una refutación, sobre los datos, garantías o conclusiones (Reid, Knipping & Crosby, 2011).

Una síntesis de los resultados de investigaciones sobre argumentación en matemática educativa y las propuestas curriculares analizadas, concurren en la necesidad de reconocer la refutación en los procesos argumentativos.

Profundizar sobre las implicaciones que tiene en ambientes donde los estudiantes contraponen sus ideas, las validan y dan lugar a un consenso matemático durante la clase. En efecto, la pregunta de investigación que se plantea ¿Qué implicaciones tiene la refutación de conclusiones entre estudiantes de primaria en el contexto de la argumentación matemática? se pretende responder con base en el cumplimiento del siguiente objetivo, reconocer las implicaciones de la refutación de conclusiones en el contexto de la solución de tareas matemáticas.

Argumentación matemática

Se define como la actividad central de presentar aserciones, conclusiones, razones que las soporten, recibir críticas o refutaciones que cuestionen la validez de los mismos y presentar razones en función de las críticas (Toulmin, 2003). El razonamiento se ubica en aquellos argumentos que refieren a una serie de proposiciones en las cuales una conclusión se infiere de los datos, y la garantía de la relación entre los datos y la conclusión (Toulmin, Rieke & Janik, 1984). En el salón de clases, la argumentación se caracteriza como el proceso de discurso social dinámico para descubrir nuevas ideas matemáticas y convencer a otros de que una conclusión es verdadera o falsa (Rumsey & Langrall, 2016). Empíricamente, este concepto está ligado con las interacciones entre los estudiantes-profesor con el fin de dilucidar el razonamiento matemático del estudiante (Krummheuer, 1995, 2015).

La argumentación que involucra conceptos matemáticos refiere a la argumentación matemática (Whitenack y Knipping, 2002). Particularmente, en el salón de clases sucede a nivel colectivo, e involucra la participación de los estudiantes y el profesor (Krummheuer, 1995). El concepto de argumentación colectiva, es un constructo útil en el análisis de la naturaleza de la actividad matemática de los estudiantes, particularmente cuando resuelven problemas de forma colaborativa y discusiones (Yackel, 2002). En el mismo sentido, Conner, Singletary, Smith, Wagner & Francisco (2014) y Krummheuer (2015) refieren al concepto cuando dos o más individuos interactúan o trabajan juntos, para establecer una afirmación/conclusión en torno a una tarea. La argumentación colectiva se realiza en la interacción, y como tal, no puede ser analizada teniendo en cuenta únicamente una secuencia de enunciados o afirmaciones que se establecen, pues tienen funciones diversas en el proceso de las interacciones de los participantes y son fundamentales para dar sentido a la argumentación que se desarrolla (Yackel, 2002).

El análisis de la argumentación matemática, se reconstruye con base en cuatro elementos que reflejan el significado de las declaraciones matemáticas empleadas por estudiantes en términos de *datos*: evidencias o información que fundamentan una conclusión, la *conclusión* es la tesis a probar por el argumentador. Con el objetivo de soportar la conclusión, la *garantía* presenta las reglas matemáticas, patrones identificados, propiedades matemáticas entre otros y la *refutación* tiene la función de negar una parte del argumento (ver Figura 1). Desde esta estructura, se sugieren tres maneras en las que un argumento puede implicar una refutación, los datos, garantías o conclusiones, dejando las demás partes en duda (Reid, Knipping & Crosby, 2011). En el presente estudio se enfoca en la última forma de refutar un argumento.

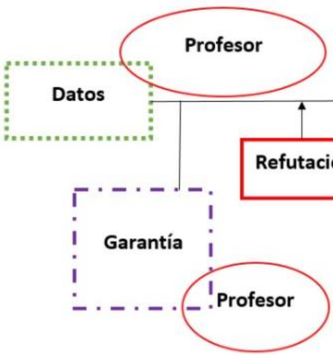

Figura 1. Adaptación del modelo del Toulmin (1958/2003) según Conner (2008).

En la adaptación del modelo de Toulmin, además de considerar elementos básicos, datos, conclusión, garantía y refutación. Se incluye la participación del profesor en la estructura, en razón de que permite modelar la argumentación desde las preguntas o contribuciones a la clase (Conner, et al., 2014).

La refutación en la argumentación colectiva

En los procesos argumentativos, un argumentador establece una conclusión con base en datos y garantías, hay lugar para críticas o refutaciones que contrapongan la veracidad del contenido de las conclusiones o razones que la soportan. En el contexto de la argumentación matemática, la refutación puede provenir del solucionador del problema, él o ella misma, pero en general es la huella de la naturaleza dialógica y funciona como un motor de la discusión matemática que puede depender de uno o más conceptos (Pedemonte & Balacheff, 2016). Por lo que la refutación muestra los casos en que la garantía no conecta los datos con la conclusión (Toulmin, 2003). Sin embargo, investigaciones sobre argumentación y prueba matemática reconocen que la refutación niega totalmente una parte del argumento, la conclusión, la garantía o el dato (Reid, Knipping & Crosby, 2011; Knipping & Reid, 2015; Cervantes-Barraza, y Cabañas-Sánchez, 2018). Sobre las tres maneras en que un argumento puede implicar una refutación, Reid, Knipping y Crosby (2011) establecen que: 1) Los datos del argumento pueden ser refutados, y se deja la conclusión en duda, 2) la garantía del argumento puede ser refutada, dejando otra vez la conclusión en duda o 3) la conclusión misma puede ser refutada, lo que implica que los datos o la garantía son inválidos, pero no diciendo cual.

La argumentación matemática se relaciona con los razonamientos empleados por los estudiantes de primaria en un sentido colectivo mientras refutan conclusiones que se fundamentan de las garantías. De modo que, el concepto fundamental en esta investigación es la refutación. Este promueve la argumentación colectiva y la configuración de características invariantes del concepto matemático en estudio.

Aspectos metodológicos de la investigación

Se condujo un experimento de enseñanza en una escuela primaria ubicada al sur de México con el objetivo de promover la argumentación a través de tareas matemáticas diseñadas principios de diseño que promueven la refutación de conclusiones (Cabañas-Sánchez y Cervantes-Barraza, 2019). El experimento se llevó a cabo con base en las etapas planteadas por Molina, Castro, Molina y Castro (2011), en la etapa 1 se prepara y diseñan las tareas matemáticas, en la segunda etapa los investigadores aplican las tareas desarrolladas junto con los estudiantes y en la tercera etapa se analizan los datos recolectados.

El experimento de enseñanza está constituido de nueve tareas (T) que tienen como objetivo fomentar la construcción de argumentos sobre la existencia de triángulos equiláteros, isósceles y escalenos, con un ángulo de 90°, mayor o menor de 90° (ver Cuadro 1). Las tareas se diseñaron con base en principios generales retomados de investigaciones que promueven la argumentación en el salón de clases (Cabañas-Sánchez y Cervantes-Barraza, 2019). El primer principio de diseño refiere al: *Nivel de demanda cognitivo alto*: lo que implica que las tareas promuevan en los estudiantes un pensamiento complejo y no algorítmico, un acercamiento predecible, bien conocido no es sugerido explícitamente por las tareas, las instrucciones o ejemplos (Smith & Stein, 1998). El segundo principio sugiere que las *Tareas sean de tipo abierta*: estas se caracterizan por contener un grado de indeterminación significativo en la información inicial (datos), es decir, no se hace énfasis en indicar la información sobre la cual el estudiante cuenta para fundamentar sus respuestas/conclusión, de igual manera sobre lo que se pide o la cuestión de la tarea (Ponte, 2005). El tercer principio de diseño, implica *Introducir conclusiones falsas:* esta característica está orientada a proveer una oportunidad para que los estudiantes desarrollen sus propias ideas y tengan confianza para validar las aserciones propias y la de los demás (Rumssey & Langrall, 2016). El cuarto principio conlleva a *Generar conflicto cognitivo:* confrontar los estudiantes con información contradictoria la cual es usualmente presentada en el texto (Limón, 2001). Y el quinto principio de diseño aborda la *Gestión de la confrontación de posturas: l*as preguntas deben estar orientadas a gestionar el conflicto, es decir que exista más de una conclusión, que emerjan refutaciones, e intervenciones que desarrollen un consenso matemático (Solar y Deulofeu, 2016).

Tabla 1
Tareas del experimento de enseñanza dividido en bloques.

Triángulo Equilátero (bloque 1)	Triángulo Isósceles (bloque 2)	Triángulo Escaleno (bloque 3)
T1: ¿Existen triángulos equiláteros con un ángulo de 90°? Justifica tu respuesta.	T4: ¿Existen triángulos isósceles con un ángulo de 90°? Justifica tu respuesta.	T7: ¿Existen triángulos escaleno con un ángulo de 90°? Justifica tu respuesta.

Tabla 1 (continúa)
Tareas del experimento de enseñanza dividido en bloques.

Triángulo Equilátero (bloque 1)	Triángulo Isósceles (bloque 2)	Triángulo Escaleno (bloque 3)
T2: ¿Existen triángulos equiláteros con un ángulo menor a 90°? Justifica tu respuesta.	T5: ¿Existen triángulos isósceles con un ángulo menor a 90°? Justifica tu respuesta.	T8: ¿Existen triángulos escaleno con un ángulo menor a 90°? Justifica tu respuesta.
T3: ¿Existen triángulos equiláteros con un ángulo mayor a 90°? Justifica tu respuesta.	T6: ¿Existen triángulos isósceles con un ángulo mayor a 90°? Justifica tu respuesta.	T9: ¿Existen triángulos escaleno con un ángulo mayor a 90°? Justifica tu respuesta.

El diseño de las tareas, consideró también el contenido matemático desde una revisión del plan y programa de estudios de matemáticas (SEP, 2011, p. 69), del libro de texto de cuarto, quinto y sexto grado de matemáticas para el estudiante y el del profesor. Se resalta que los estudiantes se le proporcionó un espacio previo al desarrollo del experimento con el fin de afianzar la clasificación de triángulos equiláteros, isósceles y escalenos, analizando características invariantes acerca de sus lados y sus ángulos.

Participantes y Organización de la Actividad en el Salón de Clases

En el experimento de enseñanza participaron dos grupos uno de quinto y uno sexto grado de una escuela primaria urbana en México, el grupo A conformado por 22 y grupo B por 33 estudiantes (11-13 años de edad). El experimento se desarrolló por los autores y dos investigadores auxiliares, durante tres sesiones de tres horas reloj cada una. En cada sesión se desarrollaron tres tareas matemáticas (bloque de tareas) diseñadas con el objetivo de refutar las conclusiones de los estudiantes en el contexto de la argumentación colectiva.

La actividad en el salón de clases consideró dos momentos: individual y colectivo. En el momento individual, los estudiantes respondieron las tareas sobre su hoja de trabajo en un determinado tiempo. En el segundo momento, se promovió la argumentación colectiva mientras se discutían las conclusiones presentadas por tarea con base en el trabajo individual. Lo anterior promovió la refutación de conclusiones y su respectiva validación con base en garantías. Desde la actividad colectiva, la intervención del profesor investigador promovió la argumentación en el salón de clases con preguntas detonadoras: ¿quién dijo que si?, ¿quién lo hizo de forma diferente?, ¿qué pueden decir de lo dicho por...?, ¿qué más…?

Análisis de los Datos

Investigaciones han implementado el modelo de Toulmin para reconstruir los argumentos de matemáticos (Inglis & Mejia-Ramos, 2005; Inglis, Mejia-Ramos & Simpson, 2007). Sin embargo, investigaciones adoptaron la misma postura para analizar los argumentos de los estudiantes en el salón de clases a través de la interacción (Krummheuer, 1995, 2015). Lo que implicó que el modelo de Toulmin se adaptara por primera vez con el propósito de estudiar la argumentación de forma colectiva. Con la intención de mejorar los procesos analíticos en clases de matemáticas, Conner (2008) propuso el modelo extendido de Toulmin con base en la adaptación que realizó Krummheuer (1995). En el modelo extendido incluye la participación del profesor como parte de la estructura argumentativa suscitada en el salón de clases, en razón de apoyar de forma activa la construcción de argumentos; contribuye partes de la argumentación (datos o garantías) y realizar preguntas orientadoras entre otras actividades (Conner, et al., 2014).

El proceso de argumentación colectiva en el salón de clases fue expresado de forma oral por los estudiantes junto con el profesor, quien la orientó mediante preguntas (Knipping y Reid, 2013; Conner, et al., 2014; Cervantes-Barraza, Cabañas-Sánchez, y Mercado-Porras, 2020). Además, la argumentación suscitada en la resolución de cada tarea del experimento de enseñanza, se originó a partir de la refutación de conclusiones por parte de diferentes estudiantes; lo que dio lugar a conocer los puntos de vista que tenían éstos en relación con el contenido matemático en estudio (Solar y Deloufeu, 2016).

En efecto, el análisis de los datos consistió en tres etapas. En la primera se identificaron extractos argumentativos de la transcripción de los videos de las clases, basado en la presencia de refutaciones. Para reconstruir la argumentación colectiva, la segunda etapa, implicó identificar cada una de los elementos de la argumentación en los extractos identificados en la etapa 1 (ver tercer columna de la transcripción). En la tercera etapa, se reconstruyen los argumentos establecidos en lo colectivo, representado cada una de las intervenciones de los estudiantes y profesor con base en los elementos propuestos en Conner (2008). Para ilustrar cómo se realizó el análisis de los datos, presentaremos un extracto de la argumentación matemática suscitada durante la tarea 1 del experimento de enseñanza.

198.	Profesor	D1	La pregunta es: ¿Existen triángulos equiláteros con un ángulo de 90°?, responde cada uno en su hoja y luego hablamos entre todos.
199.	Profesor		¡Ahora, levanten la mano los estudiantes que colocaron que sí existen triángulos equiláteros con un ángulo de 90°! ¡René!... ¿Por qué existen?
200.	René	C1	¡Sí existen!
201	René	W1	Porque sus tres ángulos miden 90°
202.	Estudiantes		¡Ora! [Expresión donde se admiran de la respuesta]
203.	Profesor	¿?	¿Qué puedes decir tú [Julieta]?
204.	Julieta	R1	No, Que no existen
205	Julieta	W2R1	Porque sus ángulos son de 60° y ahí viene siendo que sus ángulos son de 90° y no existen porque sus ángulos son de 60°
206.	Kenia	C3	Son menores de 90°
207.	Ezequiel	R2	Pero si tenemos un ángulo de 90 se pasaría de 180°
208.	Profesor	¿?	¿Qué pueden decir de lo que dijo la estudiante Mía?
209.	Mía	R3	¡No!
210	Mía	W3R3	Porque no da 180°, y 3 por 90° da 270°
211.	Kenia	C4	¡Se pasa profe!
212.	Profesor	¿?	¿Se pasa de cuánto?
213.	Estudiantes	W3	De 180°…
214.	Profesor	¿?	Entonces, pregunto: ¿Existen o no existe?

215.	Profesor	¿?	La pregunta estaba centrada en el triángulo equilátero y cuando se preguntó del triángulo equilátero ahí fue sobre sus
216.	Estudiantes		Ángulos…
217.	Profesor		Y se les preguntó: ¿qué sabían ustedes del triángulo equilátero?, y ¿ de qué habían hablado en la actividad previa?, Agustín
218.	Agustín	C5	Que sus tres ángulos tienen los mismo grados

Con base en la transcripción de la argumentación suscitada durante la tarea 1, se identificaron las líneas 203, 204, 207 y 209 que corresponden a refutaciones (R1, R2 y R3) de los estudiantes sobre la conclusión (C1) presentada por el estudiante René en la línea 198. Estas refutaciones son promotoras de la argumentación colectiva, por lo que se procede a identificar cada uno de los elementos de la argumentación de las declaraciones matemáticas en las líneas, esta identificación recae sobre la definición de cada elemento de un argumento.

Con el fin de numerar cada una de las intervenciones en términos de datos, garantías, conclusiones y refutaciones, se usaron las primeras letras de cada parte del argumento y números naturales indicando el orden en que ocurrió. Por lo que la primera conclusión se representa con (C1), los datos con (D1), la garantía con (W1), la refutación (R1) y las garantías de las refutaciones con (W2R1). La reconstrucción de la argumentación de la tarea 1 con el grupo A, se presenta en la siguiente sección.

Argumentación Basada en la Refutación

Con el objetivo de ilustrar los resultados de la investigación, sobre argumentación y refutación, se presentan los argumentos de los estudiantes de los grupos A y B relativos a la en el contexto de la tarea 1 del experimento de enseñanza. Por lo que consideramos la argumentación suscitada en el salón de clases como el resultado del aprendizaje de las matemáticas basado en la interacción social (Knipping & Reid, 2015), que a su vez refleja el proceso de construcción de conocimiento matemático.

Argumentación del Grupo A.

En el desarrollo de la T1 relacionada con la existencia de triángulos equiláteros con un ángulo de noventa grados, la argumentación inicialmente la propició el profesor a través de preguntas dirigidas a toda la clase (Cervantes-Barraza, & Cabañas-Sánchez, 2021). ¿quién escribió que existen?, ¿Quién dijo sí? Con el propósito de generar el intercambio de argumentos y provocar la refutación de conclusiones por parte de los estudiantes (Reid, Knipping & Crosby, 2011).

> Profesor, D1: ¿Existen triángulos equiláteros con un ángulo de noventa grados?
> René, C1: ¡Sí!
> René, W1: … Porque sus tres ángulos miden noventa.[1]

Con base en la información que brinda el profesor (D1), el estudiante señala que existen triángulos equiláteros con ángulos de noventa (C1). Con el fin de conectar los datos y su conclusión recurre a una característica esencial del triángulo equilátero (i.e. la medida de los ángulos interiores de un triángulo equilátero son iguales) como parte de su garantía (W1). Este estudiante consideró la característica del triángulo equilátero sin tener en cuenta que la medida de cada ángulo interior es estrictamente de sesenta grados. Lo que dio lugar para que René presentara su argumento en términos de una refutación.

> Ezequiel, R1: Pero si tenemos un ángulo de noventa se pasaría de ciento ochenta

Este estudiante refutó (R1) de forma directa la suficiencia de la garantía (W1) de René (Reid, Knipping & Crosby, 2011), con la intención de evidenciar el incumplimiento de la propiedad relacionada con la suma de los ángulos internos del triángulo. En razón de que la suma de las medidas de los ángulos propuestos por René en su argumento sobrepasan los ciento ochenta grados. Con base en lo anterior, el profesor interviene para promover la participación de los demás estudiantes y dar lugar a refutaciones (Krummheuer, 2015).

> Profesor: ¿Qué puedes decir tú, Julieta?

Julieta, R2: ¡No, que no existen!

La intervención de Julieta (R2) refutó la conclusión (C1), es decir negó completamente la conclusión presentada por el estudiante René e inmediatamente, presentó una garantía que soporta su refutación (Reid, Knipping & Crosby, 2011).

Julieta, W2R2: Porque sus ángulos son de sesenta y ahí viene siendo que son de noventa y no existen porque sus ángulos son de sesenta.

El contenido de la garantía de Julieta hace referencia a un característica invariante del triángulo equilátero (cada ángulo interno del triángulo equilátero mide sesenta grados). Asegura esta estudiante que los ángulos del triángulo equilátero son de sesenta y no de noventa. Lo que le permitió concluir que si el triángulo equilátero tiene tres ángulos de noventa, éste no existe.

En el mismo sentido de la refutación de Julieta, interviene José con una refutación (R3), basada en la afirmación que se convertirá el triángulo equilátero con tres ángulos de noventa en un cuadrado, esto fundamentado desde la propiedad de la suma de los ángulos interiores (W3R3), y representada gráficamente sobre la pizarra (Figura 2).

José, R3: No, escribí yo.
José, W3R3: Porque se convertirá en un cuadrado… y la suma se pasa de ciento ochenta grados.

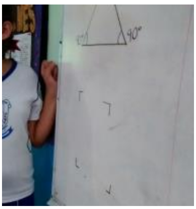

Figura 2. Representación gráfica del triángulo equilátero con tres ángulos sobre la pizarra.

Una visión sobre la argumentación suscitada entre estudiantes del grupo A en el desarrollo de la tarea (T1) y la reconstrucción de la estructura argumentativa, permite identificar la refutación de conclusiones y de garantía como se indica en los rectángulos rojos (Figura 3).

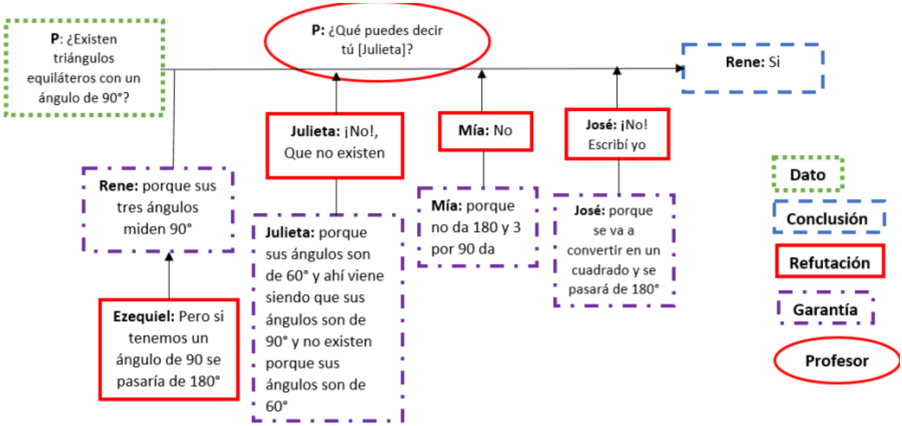

Figura 3. Argumentación del grupo A en la Tarea 1 del experimento de enseñanza, grupo A.

En el contexto de esta tarea, sobre la existencia de triángulos equiláteros con ángulos de noventa grados, se reconoce que la refutación de conclusiones en la interacción entre estudiantes de primaria, promovió un ambiente de contraposición de posturas, así también involucró a los que no habían participado a presentar sus conclusiones o refutaciones y arribar a un consenso matemático. De igual forma, favoreció a los estudiantes en presentarar garantías que refieren a características y propiedades del triángulo equilátero.

Argumentación del Grupo B

En la argumentación suscitada en el grupo B de estudiantes, generadas en el experimento de enseñanza (tarea 1), participaron de forma voluntaria: Andrea, Kimberly, y Madison. Andrea levantó su mano, y presentó su conclusión sobre la cuestión de la tarea lanzada por el profesor ¿Existen triángulos equiláteros con un ángulo de noventa grados?

Andrea, C1: ¡Sí existen! …
Andrea, W1: Porque sus ángulos son iguales.

También representó en la pizarra mediante un dibujo, el triángulo equilátero, en el que indicó que los ángulos interiores miden 90°. El dibujo y el razonamiento de Andrea evidencian que reconoce como propiedad invariante de este tipo de triángulos, que sus lados y ángulos son iguales. Sin embargo, su garantía (W1) es inconsistente con la propiedad de la suma de los ángulos interiores del triángulo en cuestión, ya que los ángulos internos de un triángulo equilátero son estrictamente iguales a 60°. Seguidamente, el profesor preguntó a toda la clase.

> Profesor: ¿Qué puede decir la clase acerca de la respuesta de Andrea?

La intervención del profesor, promovió que dos estudiantes, Kimberly y José refutaran la conclusión de Andrea.

> José y Kimberly, R1: ¡Está mal!
> Kimberly, WR1: ¡La suma de los ángulos interiores se pasa de ciento ochenta!

El argumento de Kimberly, tiene el rol de refutación (R1) y garantía (WR1), en el que está implícita la propiedad relativa a la suma de los ángulos internos es 180°, a la cual Andrea no hizo referencia. Este argumento, niega la existencia de triángulos equiláteros con ángulos de noventa grados y da cabida a los demás compañeros para reflexionar sobre el caso. Luego, el profesor preguntó a Madison, respecto a su respuesta.

> Madison, R2: ¡No! …
> Madison, WR2: Porque la suma de los ángulos es igual a 270°… ¡y se pasa de ciento ochenta!

Su argumento contradice la garantía presentada por Andrea. Madison se apoya de la propiedad de la suma de los ángulos internos de un triángulo, de forma implícita, presenta el valor de la suma de los tres ángulos de noventa y hace énfasis del valor límite de la suma de los ángulos. En efecto, los estudiantes de primaria argumentan con base en su lenguaje cotidiano, y de forma implícita recurren a propiedades o características matemáticas.

Por lo que en la argumentación entre estudiantes del grupo B en la tarea 1, se reconocen garantías que refieren a propiedades del triángulo y a la clasificación de polígonos. Se reconoce también la refutación de conclusiones entre los estudiantes del grupo que refieren a la propiedad de la suma de los ángulos internos y a las características del triángulo equilátero (Ver Figura 4).

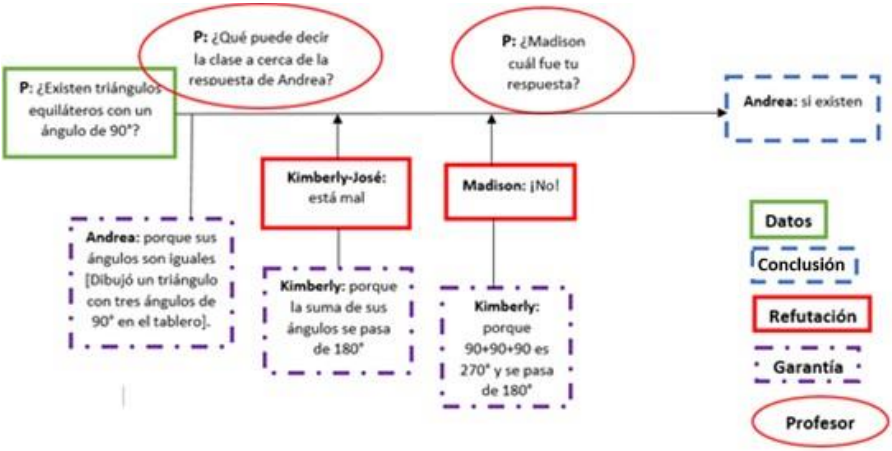

Figura 4. Reconstrucción de la argumentación colectiva en T1, grupo B.

Cabe resaltar que la argumentación de los grupos A y B son similares. En razón de que con base en una información inicial (la tarea matemática), los estudiantes presentaran sus conclusiones junto con sus respectivas garantías y de inmediato las refutaran. Esto evidenció que las tareas del experimento de enseñanza demandaron a los estudiantes la contraposición de posturas, contrastando los argumentos refutados con la propiedad de la suma de los ángulos internos de los triángulos y algunas características invariantes como la medida de los lados o ángulos. Cabe señalar, que el rol del profesor y el tipo de preguntas que planteó permitieron guiar a los estudiantes en la construcción de argumentos y refutaciones, según Cervantes-Barraza y Cabañas-Sánchez (2021), los tipos de preguntas tienen implicaciones y provocan la construcción de garantías cuyo contenido matemático tiene como objetivo fundamentar un argumento encontra de una refutación.

Discusión

Las implicaciones de la refutación en el contexto de la argumentación entre estudiantes de primaria tienen que ver con la forma de refutar, la evolución de los contenidos matemáticos y la implementación de propiedades matemáticas que fundamenten sus conclusiones o refutaciones. En cuanto a la primera, los estudiantes refutan para validar las conclusiones de los demás y las garantías presentadas ante la clase. Lo que implicó que usaran características del objeto matemático en estudio y en algunos casos evolucionaron los contenidos de los argumentos (Kaur & Sinclair, 2014; Solar y Delofeu, 2016).

En el contexto de la solución de las tareas del experimento de enseñanza, la refutación de conclusiones contribuyó a que los estudiantes de primaria configuraran las características invariantes de los triángulos con base en la medida de sus ángulos, así como la definición de triángulo equilátero, isósceles y escaleno (Gal & Linchesky, 2010). En el análisis de los resultados, los estudiantes implementaron definiciones de los tipos de triángulos y la definición de cuadrado como garantía de sus argumentos (e.g. argumento de José, grupo A). Se identificaron también, argumentos basados en reglas. En estos, la propiedad fundamental en las argumentaciones de los estudiantes hace referencia a la suma de los ángulos internos de un triángulo, referenciada de manera incompleta, en frases como “se pasa de ciento ochenta grados” y en casos particulares de triángulos con sus respectivas medidas los ángulos (Gal & Linchesky, 2010).

Otro aspecto que favoreció la refutación en la argumentación matemática de los estudiantes, es el progreso en el contenido de los argumentos que inicialmente se identificaron incompletos. En éstos presentaron propiedades y características relacionadas con los tipos de triángulo que no cumplían con las características adecuadas que implicaban medidas de los ángulos internos al sumarlos sobrepasaban los ciento ochenta grados. Por lo que la evolución de los argumentos, se refleja en la implementación de las definiciones y/o propiedades que indicaron una relación que no señalaron en los argumentos iniciales.

Es el marco de las tareas del experimento de enseñanza, se analizaron los argumentos que construyeron estudiantes de primaria en el estudio de las propiedades y características invariantes de los triángulos a fin de categorizarlos. De forma transversal promovieron la refutación de conclusiones en los estudiantes. Con base en ello, se promovió la argumentación colectiva, y se reconocieron garantías que establecieron en la interacción con pares para validar una conclusión dada. En conjunto con los principios de diseño, introducir conclusiones falsas (Rumssey & Langrall, 2016), favoreció la refutación de conclusiones del tipo "si" o "no", las que dejaron en duda argumentos presentados por los estudiantes en un primer momento (Reid, Knipping & Crosby, 2011). Lo que implicó una confrontación de posturas en la clase con el fin de revisar el contenido de la garantía referentes a: definiciones de los tipos de triángulos, propiedades y definición de polígono (Gal & Linchesky, 2010).

Conclusiones de la investigación

El estudio de los argumentos de los estudiantes de primaria en el contexto de la refutación de conclusiones, evidenció cómo estos contraponen las ideas matemáticas, construyen garantías basadas en propiedades y características del triángulo para fundamentar sus argumentos. Lo que permitió identificar las implicancias que tiene la refutación en la enseñanza de las matemáticas a nivel primaria, así también se considera una oportunidad para que los estudiantes participen en procesos argumentativos y critiquen el razonamiento matemático de los demás.

Cabe resaltar que el tipo de tarea matemática y la participación del profesor son importantes en clase de matemática cuyo objetivo está vinculado con la argumentación (Cervantes-Barraza & Cabañas-Sánchez, 2021). En razón de que el diseño de la tarea matemática debe incluir la intención didáctica de provocar la contraposición de posturas, de la cual no se hizo énfasis en el cuerpo del escrito y se propone como idea de investigación futura. En cuanto al rol del profesor, se reconoce que con base en preguntas orientadoras y la contribución de partes de la argumentación como los datos, conllevan al grupo de estudiantes al consenso matemático (Cervantes-Barraza & Cabañas-Sánchez, 2021).

Reconociendo el potencial de la argumentación y la refutación en el aprendizaje de la matemática en general, y en el desarrollo del pensamiento crítico en particular de los estudiantes, se resaltan algunas cuestiones sobre su importancia: A) Investigaciones han abordado la refutación en la argumentación, sin embargo, pocos estudios se han enfocado en estudiar desde la refutación, el tipo de argumentos que construyen niños de primaria para validar conclusiones. B) La argumentación matemática deber ser promovida desde los primeros años de escolaridad, a fin de coadyuvar a los estudiantes en la construcción de argumentos matemáticos desde la contraposición de posturas (refutaciones). C) Estudiar cómo los profesores refutan conclusiones no válidas de los estudiantes, a fin de ayudarles a los estudiantes en desarrollar una comprensión de situaciones matemáticas, D) investigar en el marco de las pruebas y refutaciones, cómo una prueba puede ser utilizada no sólo para establecer la verdad de una conclusión dada, sino también para generar nuevos conocimientos matemáticos, E) evidenciar cómo los profesores apoyan la argumentación colectiva y el tipo de apoyo que ofrecen.

En cuanto a los principios que sustentan las tareas, fueron útiles para la producción de argumentos, refutación de conclusión y argumentaciones colectivas en el contexto de la discusión de los resultados por parte de los estudiantes. En razón de que las tareas requerían un nivel de demanda cognitivo alto (Smith & Stein, 1998), reflejado en el cuestionamiento sobre la existencia de un tipo de triángulo con características invariantes inusuales (e, g., tarea 1). Así también, se caracterizaron por el grado de indeterminación en la información inicial (i, e., datos) (Ponte, 2005).

Notas

Las letras junto con los números en negrita representan partes de la argumentación, en el orden establecido por los estudiantes (D1: dato, C1: conclusión, W3: garantía, R2: refutación, W2R1: garantía de la refutación.)

Referencias Bibliográficas

Common Core State Standards Initiative (CCSSI) (2010). *Common Core State Standards for Mathematics (CCSSM).* National Governors Association Center for Best Practices and Council of Chief State School Officers.

Conner, A. (2008). Expanded Toulmin diagrams: a tool for investigating complex activity in classrooms. En O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sepúlveda (Eds.). *Proceedings of International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 2, pp. 361-368). México, Morelia.

Conner, A., Singletary. L., Smith. R., Wagner. P., y Francisco, R. (2014). Teacher support for collective argumentation: A framework for examining how teachers support students' engagement in mathematical activities, *Educational Studies Mathematics*, *86* (2), 401–429. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9532-8

Cervantes-Barraza, J. A. y Cabañas-Sánchez, G. (2018). Argumentos formales y visuales en argumentaciones colectivas. *Educación Matemática, 30*(1), 148-168.

Cabañas-Sánchez, G. y Cervantes-Barraza, J. A. (2019) Principios que fundamentan el diseño de tareas matemáticas en una planificación didáctica. *Revista Uno*, 85, 7-12.

Cervantes-Barraza, J. A., Cabañas-Sánchez, G. y Mercado-Porras, K. (2020). *El rol del profesor en la construcción de conocimiento matemático a través de la argumentación colectiva*. En H. Hernández, J. Juárez, J. Slisko (Eds.). Tendencias en la Educación Matemática Basada en la Investigación, PP. 214-2.

Cervantes-Barraza, J. & Cabañas-Sánchez, G. (2021). *Teacher promoting student mathematical arguments through questions.* En M. Inprasitha, N. Changsri & N. Boonsena (Eds.), Proceedings of the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Interim Vol. (pp. 81-89). Khon Kaen, Thailand: PME

Gal, H., y Linchevski, L. (2010). To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. *Educational Studies in Mathematics*, *74*, 163–183. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9232-y

Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P., & Simpson, A. (2007). Modeling mathematical argumentation: The *i*mportance of qualification. *Educational Studies in Mathematics*, *66*(1), 3–21. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9059-8

Inglis, M., y Mejia-Ramos J. (2005). La fuerza de la aserción y el poder persuasivo en la argumentación en matemáticas. *Revista EMA: Investigación e Innovación en Educación Matemática*, *10,* 327-352.

Kaur, H., y Sinclair, N. (2014). Young children's thinking about various types of triangles in a dynamic geometry environment. In C. Nicole, S. Oesterle, P. Lijedahl, & D. Allan, (Eds.) *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36,* (Vol. 5, pp. 113-120). Vancouver, Canada.

Knipping, C., y Reid D. (2015). Reconstructing argumentation structures: A Perspective on proving Processes in Secondary Mathematics Classroom Interactions. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping y N. Presmeg (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education: Examples of methodology and methods* (pp. 75-101). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_4

Ko, Y.Y. y Knuth, E. (2009). Undergraduate mathematics majors' writing performance producing proofs and counterexamples about continuous functions. *Journal of Mathematical Behavior, 28* (1), 68–77. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2009.04.005

Komatzu, K., y Jones, K. (2017). Proofs and refutations in school mathematics: A task design in dynamic geometry environments. In Thérèse Dooley, Viviane Durand-Guerrier, Ghislaine Gueudet (Eds.), *Proceedings of Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 104-112). Dublin, Ireland.

Krummheuer, G. (1995). The ethnology of argumentation. In P. Cobb and H. Bauersfeld (Eds.), *The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures* (pp. 229–269). Erlbaum.

Krummheuer, G. (2015). Methods for Reconstructing Processes of Argumentation and Participation in Primary Mathematics Classroom Interaction. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping., & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education: Examples of methodology and methods* (pp. 75-101). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_3

Larios, V., Arellano, C., y Gonzalez, N. (2018). Análisis de Argumentos Producidos por Alumnos de Bachillerato al Resolver Problemas de Geometría. *REDIMAT, Journal of Research in Mathematics Education,* 7(2), 280-310. http://dx.doi.org/10.4471/redimat.2018.2343

Limón, M. (2001). On the cognitive conflict as an instructional strategy for conceptual change: a critical appraisal. *Learning and Instruction, 11*, 357–380. https://doi.org/10.1016/S0959-4752(00)00037-2

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.* Bogotá, D. C.

Molina, M., Castro, E., Molina, J., y Castro, E. (2012).Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias*, *29*(1), 075–088

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Author.

Pedemonte, B., & Balacheff, N. (2016). Establishing links between conceptions, argumentation and proof through the ck¢-enriched Toulmin model, *Journal of Mathematical Behavior*, *41*, 104–122.

https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.10.008
Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). APM. Rassmusean
Reid, D., Knipping, C. y Crosby, M. (2011). Refutations and the logic of practice. *PNA*, *6*(1), 1-10. https://doi.org/10.30827/pna.v6i1.6148
Reid, D., y Vallejo, E. (2017). Proof-based teaching as a basis for understanding why. In T. Dooley, V. Durand-Guerrier, & Gueudet. G (Eds.), *Proceedings of Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp.9-17), Dublin, Ireland.
Rumsey, C., & Langrall, C. W. (2016). Promoting mathematical argumentation. *Teaching children mathematics*, *22*(7), 413-419. https://doi.org/10.5951/teacchilmath.22.7.0412
Secretaría de Educación Pública (SEP) (2011). *Plan de estudios*. México, Distrito federal
Smith, M., & Stein, M. (1998). Selecting and creating mathematical task, form research to practice. *Mathematics teaching in the middle school, 3*(5), 344-350. https://doi.org/10.5951/MTMS.3.5.0344
Solar, H. y Delofeu, J. (2016). Condiciones para promover el desarrollo de la competencia de argumentación en el aula de matemáticas. *Bolema, 30*(56), 1092- 1112. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n56a13
Toulmin, S. (1958/2003). *The uses of argument*. Cambridge University Press.
Toulmin, S., Rieke. R., y Janik, A. (1984). *An introduction to reasoning* (2nd ed.). Macmillan
Whitenack, J., y Knipping, N. (2002). Argumentation, instructional design theory and student's mathematical learning: a case for coordinating interpretive lenses. *Journal of Mathematical Behavior*, *24*(4), 441-457. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00144-X
Yackel, E. (2002). What we can learn from analyzing the teacher's role in collective argumentation. *Journal of Mathematical Behavior*, *21*(4), 423–440. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00143-8

Jonathan Alberto Cervantes-Barraza es Doctor en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa, Profesor investigador en la Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia.
María Guadalupe Cabañas Sánchez es Doctora en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa, Profesora investigadora en la Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Dirección de contacto: La correspondencia directa sobre este artículo debe enviarse al autor. **Dirección Postal:** Km 7 Puerto Colombia, Atlántico, Colombia. **Email:** jacervantes@mail.uniatlantico.edu.co, gcabanas@uagro.mx