http://dx.doi.org/10.23925/2237-9657.2022.v11i1p085-100

Exploração de uma propriedade do triângulo retângulo usando o GeoGebra

Exploring a right triangle property using GeoGebra

JOSÉ ANTÓNIO FERNANDES[1]

0000-0003-2015-160X

RESUMO

Neste artigo estuda-se e discute-se a exploração de uma propriedade geométrica do triângulo retângulo. Em particular, recorrendo ao ambiente geométrico dinâmico GeoGebra, pretende-se descobrir a relação existente entre o comprimento da hipotenusa do triângulo retângulo e o comprimento da sua mediana, bem como divisar caminhos para a sua validação. Foram realizadas quatro abordagens distintas no estudo da propriedade geométrica, destacando-se da exploração os seguintes aspetos: 1) a necessidade de definir figuras geométricas resistentes para que conservem as propriedades invariantes das figuras; 2) os exemplos particulares fornecem evidência muito limitada para a validação matemática, já os exemplos generalizáveis permitem divisar caminhos para a prova matemática; e 3) a variedade de objetos matemáticos intervenientes e as conexões entre eles potencializam uma aprendizagem mais profunda.

Palavras-chave: *triângulo retângulo; propriedade geométrica; GeoGebra.*

ABSTRACT

In this article we study and discuss the exploration of a geometric property of the right triangle. In particular, using the GeoGebra dynamic geometric environment, we intend to discover the relationship between the length of the hypotenuse of the right triangle and the length of its median, as well as devise paths for its validation. Four different approaches were taken in the study of the geometric property, highlighting the following aspects from the exploration: 1) the need to define resistant geometric figures so that they preserve the invariant properties of the figures; 2) the particular examples provide very limited evidence for mathematical validation, whereas the generalizable examples allow us to devise paths for the mathematical proof; and 3) the variety of intervening mathematical objects and the connections between them enhance a deeper learning.

Keywords: *right triangle*; *geometric property; GeoGebra.*

[1] Universidade do Minho – jfernandes@ie.uminho.pt

Introdução

Atualmente, por todo o mundo, advoga-se o uso das tecnologias da informação e comunicação no ensino e aprendizagem escolar, com considerável relevância no caso da disciplina de matemática. Segundo Alves e Fernandes (2015), embora se tenha verificado, em Portugal, uma certa regressão sobre o uso das calculadoras, computadores e da internet na última reformulação dos programas escolares de matemática (Ministério da Educação e Ciência, 2013, 2014), espera-se que essas orientações programáticas não se mantenham num futuro próximo.

A questão da inserção das tecnologias da informação e comunicação no ensino e aprendizagem da matemática deve ser entendida como a integração dos novos meios tecnológicos com os recursos tradicionais, como seja o recurso papel e lápis, tendo em vista tirar a maior vantagem possível de cada um deles. Para Fernandes e Vaz (1998), a utilização das novas tecnologias nas aulas de matemática justifica-se porque elas têm potencial para promover uma aprendizagem mais aprofundada e significativa, favorecer uma abordagem indutiva ou experimental da matemática e desenvolver as suas aplicações. A partir destes autores, desenvolve-se, de seguida, cada um desses três aspetos.

Em relação à aprendizagem da matemática deve ter-se em conta que o uso das novas tecnologias permite uma menor ênfase no cálculo. Quando se dispõe dessas tecnologias, supõe-se que algum tipo de cálculo será realizado por elas, pois não faz sentido repetir sistematicamente os cálculos com tecnologia e papel e lápis. Em consequência, a questão da simplificação dos cálculos liberta mais tempo para estudar tarefas mais profundas e significativas, ao nível da compreensão e da resolução de problemas. A implementação de uma aprendizagem mais profunda e significativa também pode resultar de múltiplas abordagens e/ou do uso de diferentes representações matemáticas de uma situação-problema.

A vertente indutiva da matemática pode ser desenvolvida utilizando novas tecnologias pois, com muita facilidade e rapidez, podem-se gerar exemplos e simulações de situações várias. Ora, este processo de experimentação fornece evidência que permite descobrir conjeturas ou formular hipóteses, que depois deverão ser confirmados, na medida do possível, por uma demonstração lógico-dedutiva. Nesta vertente salienta-se, ainda, a oportunidade de os alunos experienciarem os diferentes papéis dos exemplos e dos contraexemplos no estabelecimento da validade em matemática.

Por último, as aplicações constituem outra das orientações atuais do ensino da matemática, as quais podem ser interiores à matemática (intrínsecas) ou exteriores à matemática (extrínsecas), incluindo situações das outras disciplinas e da vida real. Nas aplicações intrínsecas, destacam-se as diversas abordagens e as diferentes representações de uma situação-problema. Já nas aplicações extrínsecas salienta-se a diminuição do papel do cálculo, em resultado do uso das novas tecnologias, pois a exploração de problemas de outras disciplinas ou da vida real envolve, geralmente, cálculos mais complexos.

Neste contexto, no presente estudo explora-se uma propriedade do triângulo retângulo recorrendo a diferentes abordagens, nas quais se destaca o uso do software GeoGebra. Tratando-se de uma questão do âmbito da Geometria, o software em questão assume-se como um ambiente de geometria dinâmica (AGD), que permite efetuar construções de figuras geométricas e gerar exemplos dessas figuras. Com base na evidência, assim obtida, pretende-se descobrir conjeturas ou hipóteses e divisar possíveis caminhos para a prova dessas conjeturas[2].

Concluída a secção de introdução, onde enunciámos a problemática e a justificação da importância do estudo, segue-se a secção do referencial teórico, onde enquadramos o estudo na literatura relativa ao GeoGebra e à problemática do pensamento intuitivo em matemática. Na próxima secção exploram-se, com o GeoGebra, as diferentes abordagens usadas na resolução da tarefa, seguindo-se, na secção seguinte, a discussão das abordagens. Por fim, sintetizam-se as principais conclusões e implicações do estudo.

1. Referencial teórico

O referencial teórico do estudo, aqui relatado, desenvolve-se em torno de duas facetas, correspondentes às duas subsecções seguintes: na primeira subsecção trata-se o software GeoGebra, aludindo-se a algumas das suas principais características; e na segunda indicam-se alguns atributos do pensamento intuitivo em matemática, especialmente relevantes no uso de um ambiente geométrico dinâmico.

1.1. O GeoGebra

O GeoGebra pode ser considerado um programa computacional dinâmico com aplicação em vários temas da matemática, como seja o Cálculo, a Álgebra, a Geometria e a Estatística. No presente estudo focar-nos-emos no tema da Geometria, sendo usado, portanto, como um AGD. No caso da Geometria, em

[2] Em Fernandes (2006) pode-se consultar a exploração de outras tarefas de Geometria. Embora na exploração das tarefas se recorra a um AGD diferente, isso não constitui um problema porque o seu uso é muito análogo ao do GeoGebra.

geral, o uso do GeoGebra desenvolve-se a partir da construção de uma figura geométrica que incorpora os pressupostos da propriedade, do teorema ou da situação-problema que se pretende mostrar ou resolver. Segundo Junqueira (1996)

> Uma construção feita num AGD, visualizada no ecrã de um computador, representa uma figura geométrica definida pelo conjunto de propriedades e relações que se conservam invariantes através da manipulação. Na medida em que através dessas construções é possível, por exemplo, visualizar *figuras quaisquer*, elas adquirem um estatuto diferente das construções feitas em papel com régua e compasso. (JUNQUEIRA, 1996, p. 70),

Uma vez construída a figura geométrica, é possível manipulá-la a partir de objetos específicos no monitor do computador, permitindo aos alunos considerar a figura como sendo representativa de uma classe de objetos ou de construções que mantêm invariantes as propriedades. Neste sentido, podemos considerar que tais figuras geométricas incorporam alguma generalização, ou seja, são generalizáveis.

Nesse processo de manipulação, que resulta do arrastamento de objetos específicos, é fundamental garantir a invariância das propriedades, ou seja, assegurar que as figuras geométricas obtidas são do mesmo tipo (Junqueira, 1996). Por exemplo, podemos desenhar um retângulo unindo quatro pontos desenhados sobre um quadriculado de fundo, mas quando arrastamos um dos seus vértices o retângulo *desmancha-se*, deixa de ser um retângulo, como se pode observar na Figura 1.

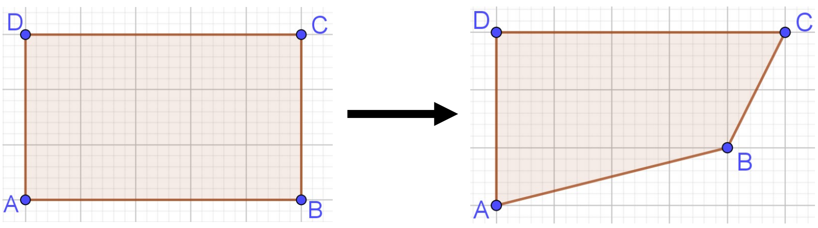

FIGURA 1: Ao arrastar o vértice B não se obtém um retângulo, o retângulo desmancha-se
FONTE: Elaboração do autor

Deve-se, ainda, ter em consideração que as novas tecnologias, designadamente as calculadoras e os computadores, apresentam limitações mais definitivas que podem originar ideias e resultados erróneos. Por exemplo, isso pode ocorrer na determinação da derivada da função $f(x) = |x|$, em $x = 0$, quando se recorre ao método das diferenças finitas, ou na representação de funções da classe

$g(x) = sen(ax)$, quando o parâmetro a é suficientemente grande, além das situações matemáticas que envolvem o infinito ou o contínuo. Como uma representação gráfica se define a partir dos *pixels* do ecrã, o seu número sendo insuficiente pode originar uma representação deformada. Para vencer a limitação, poderíamos pensar em aumentar o número de *pixels*, mas, nesse caso, poderíamos alterar novamente a representação gráfica de modo a requerer mais *pixels*, e assim por diante. Deste modo, resolvido um problema, outro se pode levantar, sem que se extingam esses problemas.

Zbiek (1995), enfatizando a "imperfeição" das ferramentas tecnológicas e a "perfeição" da matemática, sendo esta última um seu atributo importante, defende que a dimensão indutiva ou experimental da matemática, baseada na exploração de exemplos ou em simulação, não deve afirmar-se em prejuízo da dimensão lógico-dedutiva, como é o caso da prova e do cálculo exato.

Voltemos, novamente, à construção do retângulo. Agora, diferentemente, se construirmos o retângulo com base nos seus atributos, o retângulo não se desmancha e mantém-se *resistente*, ou seja, garante-se a obtenção do mesmo tipo de figura (Junqueira, 1996). Para desenhar o retângulo pode-se considerar que os ângulos internos são todos retos, os lados consecutivos são perpendiculares ou as diagonais são congruentes e se bissetam. Na Figura 2, em que o ponto O é o centro da circunferência, exemplifica-se a construção do retângulo considerando que as diagonais são congruentes e se bissetam.

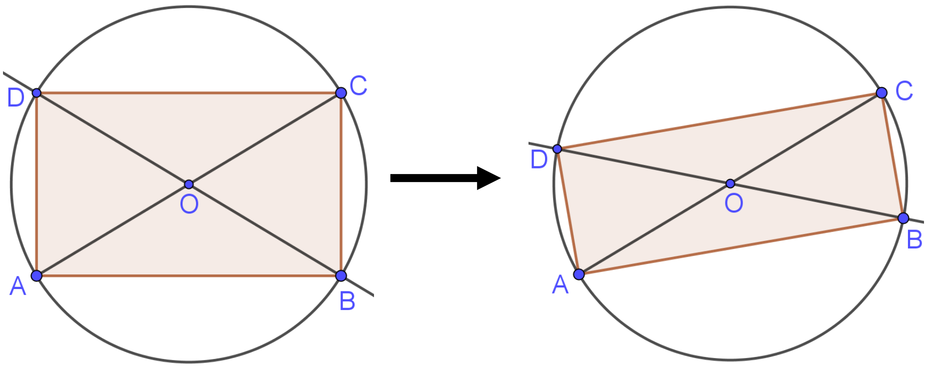

FIGURA 2: Ao arrastar o vértice B obtém-se ainda um retângulo, o retângulo é resistente
FONTE: Elaboração do autor

A partir dos exemplos anteriores, apresentados nas Figuras 1 e 2, compreende-se a importância definitiva de se construírem figuras geométricas resistentes, pois, a não ser assim, corre-se o risco de estabelecer conjeturas ou de efetuar inferências erradas.

Por outro lado, na manipulação de uma figura geométrica deve ter-se em conta que existe uma hierarquia nos objetos constituintes da figura, a qual resulta da dependência ou não de outros objetos antes definidos. Assim, podemos falar de objetos *livres*, a partir dos quais podemos manipular a figura geométrica de modo a obter novos exemplos, ou objetos *fixos*, que não permitem manipular a figura geométrica e, consequentemente, obter novos exemplos.

No caso da Figura 2, por exemplo, o objeto segmento de reta [AC] é livre, ou seja, podemos alterar livremente o seu comprimento e a sua direção no plano, já o objeto segmento de reta [BD] é fixo no seu comprimento, que tem de ser igual ao comprimento de [AC] (o que é garantido pela circunferência de diâmetro [AC]) e é livre para a direção, podendo tomar qualquer direção exceto a de [AC] (nesse caso não teríamos retângulo, mas apenas o segmento de reta [AC]).

Assim, o arrastamento de objetos de figuras resistentes, isto é, que mantém invariantes as propriedades das figuras, permite gerar exemplos, tantos quantos os necessários, os quais, por sua vez, facilitam a descoberta de conjeturas e mesmo de possíveis caminhos para validar propriedades. Estando, quase sempre, a prova fora das possibilidades do GeoGebra, discutimos na próxima subsecção o papel da intuição em matemática.

1.2. O pensamento intuitivo em matemática

Para Poincaré, grande matemático francês, "Criar não consiste em fazer novas combinações com entes matemáticos já conhecidos [...] Criar consiste, precisamente, não em construir as combinações inúteis, mas as que são úteis e que estão em ínfima minoria. Criar é discernir, escolher..." (1974, p. 15). Segundo este ilustre matemático, é uma intuição especial que permite aos verdadeiros criadores aperceberem-se das combinações úteis, socorrendo-se de uma sensibilidade estética particular com origem na beleza da matemática, na harmonia dos números e das formas e na elegância geométrica.

Nas experiências referidas por Poincaré (1974) distinguem-se três momentos diferentes no trabalho de criação de um matemático: 1) dirigir intencionalmente a sua atenção e os seus esforços para um problema; 2) ser confrontado com iluminações súbitas que se caracterizam pela sua brevidade, instantaneidade e certeza imediata; e 3) procurar estabelecer uma demonstração rigorosa dos resultados a que chegou. Logo, é no momento 2) que intervêm as intuições.

Poincaré (1932) distingue dois tipos diferentes de espíritos matemáticos: os lógicos ou analistas e os intuitivos ou geómetras. Os analistas preocupam-se, sobretudo, com a lógica e avançam passo a passo, sem nada deixar ao acaso, enquanto os geómetras, de modo diferente, deixam-se conduzir pela intuição e avançam rapidamente, embora, por vezes, de forma precária. Para Poincaré, até os analistas não podem dispensar de todo a intuição no ato de criação matemática. Estes matemáticos apoiar-se-iam na intuição do número puro, na qual se baseia a indução matemática rigorosa, e que é diferente da intuição sensível.

Ainda de acordo com Poincaré (1932), os matemáticos socorrem-se de diferentes tipos de intuições na invenção em matemática, em que apelam: 1) aos sentidos e à imaginação; 2) a generalizações indutivas, à imagem das ciências experimentais; e 3) à intuição do número puro. Embora Poincaré defenda que as intuições não garantam o rigor nem a verdade em matemática, ele destaca que a intuição do número puro, ao fundamentar a indução matemática, pode gerar a verdade do raciocínio matemático.

Comparativamente com Poincaré, mais recentemente, os matemáticos Davis e Hersh (1995) expandem os significados atribuídos à intuição, referindo que intuitivo: 1) é oposto de rigoroso; 2) significa visual; 3) significa plausível ou convincente na ausência de demonstração; 4) significa incompleto; 5) significa confiarmos num modelo físico ou em alguns exemplos importantes, é quase o mesmo que heurístico; e 6) significa holístico ou integrativo, em oposição a pormenorizado ou analítico.

Em síntese, referindo-se ao que é a matemática, Courant e Robbins (1996) consideram a intuição como um seu elemento básico e afirmam que:

> A matemática como expressão da mente humana reflete a vontade ativa, a razão contemplativa e o desejo de perfeição estética. Os seus elementos básicos são a lógica e a intuição, a análise e a construção, a generalidade e a individualidade. Apesar de diferentes tradições poderem enfatizar diferentes aspetos, é apenas a interação destas forças estéticas e o esforço para a sua síntese que constituem a vida, a utilidade e o valor supremo da matemática. (COURANT E ROBBINS, 1996, s/p)

2. Exploração da propriedade do triângulo retângulo

A propriedade do triângulo retângulo que se pretende explorar, recorrendo ao GeoGebra, tem a seguinte formulação:

Num triângulo retângulo existe uma relação entre a hipotenusa do triângulo e a mediana relativa à hipotenusa. Enunciar essa propriedade e reunir evidência de que a relação conjeturada é válida.

Quadro 1. Enunciado da propriedade que se pretende verificar com recurso ao GeoGebra

Seguidamente, exploram-se quatro diferentes abordagens para estudar a relação existente, num triângulo retângulo, entre a hipotenusa e a sua mediana.

2.1. Primeira abordagem

Nesta abordagem construíram-se duas figuras geométricas em que se definiu o triângulo retângulo, a mediana relativa à hipotenusa do triângulo e os comprimentos da hipotenusa e da mediana, como se pode constatar na Figura 3.

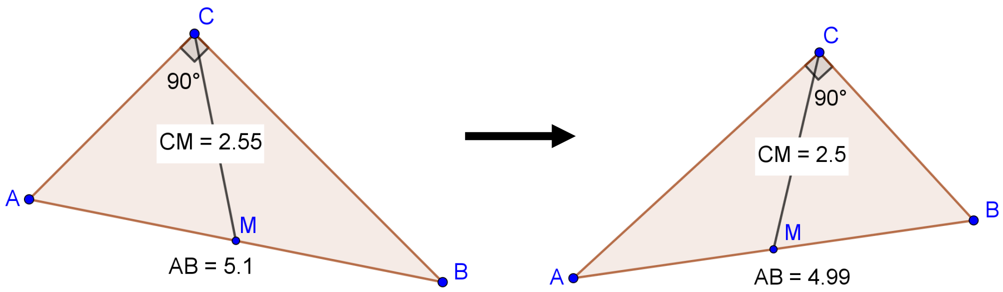

FIGURA 3: Figuras geométricas com as medições da hipotenusa e da sua mediana
FONTE: Elaboração do autor

De entre as duas figuras geométricas começou-se por construir a figura da esquerda, em que $[ABC]$ é o triângulo retângulo em C, $[AB]$ é a hipotenusa do triângulo, M é o ponto médio da hipotenusa e $[CM]$ é a mediana relativa à hipotenusa. Por arrastamento, construi-se a figura geométrica da direita.

Observando, agora, na figura geométrica da esquerda, os comprimentos da hipotenusa, 5.1, e da mediana relativa à hipotenusa, 2.55, verifica-se que o comprimento da hipotenusa é o dobro do da mediana. Por arrastamento, obteve-se a figura geométrica da direita, em que o comprimento da hipotenusa é 4.99 e o comprimento da mediana relativa à hipotenusa é 2.5. Portanto, também, nesta figura geométrica, se verifica que o comprimento da hipotenusa é, aproximadamente, o dobro do da mediana[3].

2.2. Segunda abordagem

Nesta abordagem construíram-se duas figuras geométricas em que se definiu o triângulo retângulo e a mediana relativa à hipotenusa do triângulo, sendo que na figura da direita definiu-se ainda o retângulo de lados congruentes com os catetos do triângulo, como se pode observar na Figura 4.

[3] Embora não seja exatamente o dobro, isso deve-se a erros de arredondamento decorrentes do programa.

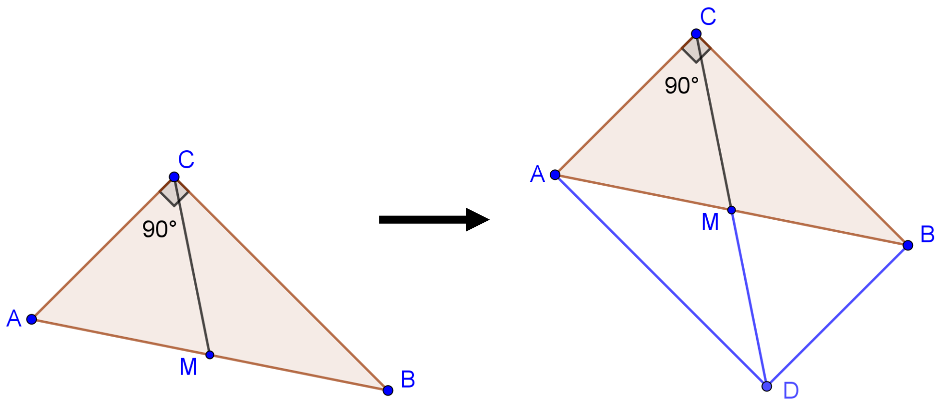

FIGURA 4: À esquerda tem-se um triângulo retângulo, a partir do qual se construiu um retângulo à direita
FONTE: Elaboração do autor

Na figura geométrica da direita, a partir do triângulo retângulo inicial $[ABC]$, construíram-se, perpendicularmente aos catetos $[AC]$ e $[BC]$, respetivamente, os lados $[AD]$ e $[BD]$, definindo-se, assim, o quadrilátero $[ADBC]$. Como, por construção, o quadrilátero tem os ângulos internos retos (ou tem os lados consecutivos perpendiculares), ele é um retângulo.

Por outro lado, no retângulo $[ADBC]$, os segmentos de reta $[AB]$ e $[CD]$ são as diagonais do retângulo e, das diagonais de um retângulo, sabe-se que elas são congruentes e bissetam-se. Daqui conclui-se que o comprimento de uma diagonal é metade do comprimento da outra diagonal, ou seja, o comprimento da hipotenusa $[AB]$ é o dobro do comprimento da mediana $[CM]$.

2.3. Terceira abordagem

Nesta abordagem construíram-se duas figuras geométricas em que se definiu o triângulo retângulo e a mediana em relação à hipotenusa do triângulo, sendo que na figura da direita definiu-se ainda a circunferência circunscrita ao triângulo, de centro no ponto médio da hipotenusa (ponto M) e raio igual metade do comprimento da hipotenusa, como se pode constatar na Figura 5.

Na figura geométrica da direita, a partir do triângulo retângulo inicial $[ABC]$, construiu-se a circunferência circunscrita ao triângulo retângulo, de centro no ponto M e comprimento do raio igual ao comprimento de $[AM]$ ou $[BM]$, pois $[AM]$ e $[BM]$ são segmentos de reta congruentes porque M é o ponto médio de $[AB]$.

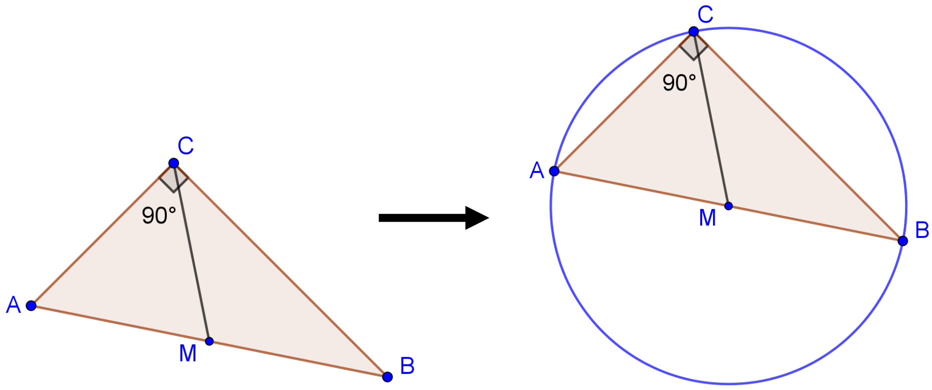

FIGURA 5: À esquerda tem-se um triângulo retângulo, a partir do qual se construiu uma circunferência circunscrita à direita
FONTE: Elaboração do autor

A construção da circunferência circunscrita nas condições referidas é sempre possível uma vez que é sempre possível circunscrever uma circunferência a qualquer triângulo retângulo, em que a hipotenusa do triângulo retângulo é um diâmetro da circunferência. Em consequência, a circunferência terá o centro em M, ponto médio da hipotenusa, e os segmentos de reta $[AM]$, $[BM]$ e $[CM]$ são congruentes porque são raios da circunferência. Logo, da congruência destes segmentos de reta, conclui-se que o comprimento da hipotenusa do triângulo retângulo é o dobro do comprimento da sua mediana.

2.4. Quarta abordagem

Nesta abordagem construíram-se duas figuras geométricas em que se definiu o triângulo retângulo e a mediana em relação à hipotenusa do triângulo, sendo que na figura da direita definiu-se ainda o segmento de reta $[DM]$, paralelo ao cateto $[AC]$ do triângulo inicial, como se pode observar na Figura 6.

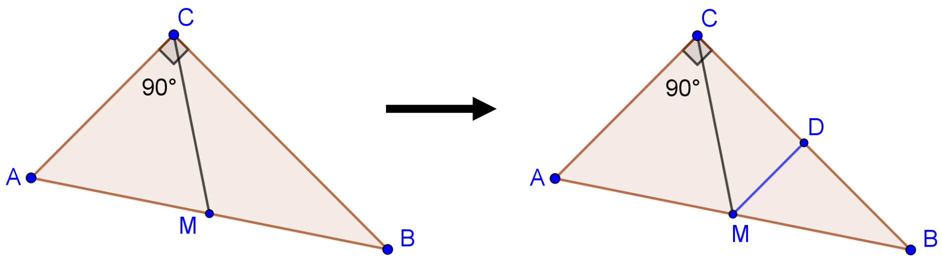

FIGURA 6: À esquerda tem-se um triângulo retângulo, no qual se definiu o segmento de reta $[DM]$ à direita
FONTE: Elaboração do autor

Na figura geométrica da direita, a partir do triângulo retângulo inicial $[ABC]$, construiu-se o segmento de reta $[DM]$, paralelo ao cateto $[AC]$ do triângulo retângulo inicial, definindo-se, assim, dois novos triângulos, os triângulos $[MBD]$ e $[MDC]$.

Consideremos os triângulos $[ABC]$ e $[MBD]$. Estes triângulos são semelhantes (têm os ângulos congruentes) e porque $[AM]$ e $[BM]$ são congruentes, conclui-se que o comprimento de qualquer lado do triângulo $[MBD]$ é metade do comprimento do lado homólogo do triângulo $[ABC]$. Daqui, resulta que os segmentos de reta $[BD]$ e $[DC]$ são congruentes.

Consideremos, agora, os triângulos $[MBD]$ e $[MDC]$. Estes triângulos são congruentes porque têm dois pares de lados congruentes (os lados $[BD]$ e $[DC]$ e o lado $[DM]$ é comum aos dois triângulos) e os ângulos por eles formados também congruentes (os ângulos $\measuredangle CDM$ e $\measuredangle MDB$ são retos por construção). Daqui vem que $[CM]$ e $[BM]$ são congruentes e, consequentemente, o comprimento da hipotenusa é o dobro do comprimento da mediana.

3. Discussão

Nesta secção discutem-se as potencialidades e limitações das quatro abordagens à exploração da propriedade do triângulo retângulo, que foram estudadas na secção anterior. Para tal, agrupam-se as quatro abordagens em dois grupos principais distintos, um relativo à primeira abordagem e o outro relativo às restantes três abordagens.

3.1. Primeira abordagem

Nesta abordagem, como existem infinitas possibilidades de construir figuras geométricas distintas, nas condições do enunciado, implica que a confirmação da propriedade a partir apenas de duas figuras geométricas constitui uma evidência muito limitada que não permite validar a propriedade em questão. Adicionalmente, deve notar-se que as figuras geométricas são exemplos particulares pois os comprimentos dos segmentos de reta variam para figuras diferentes. Portanto, a impossibilidade de esgotar a exploração dos infinitos exemplos acarreta que a evidência obtida permite tão somente conjeturar a propriedade e, por outro lado, também não fornece pistas para validar a propriedade por outros processos.

Em todo o caso, esta abordagem constitui uma boa oportunidade para distinguir o papel dos exemplos e contraexemplos na validação em matemática. No caso dos exemplos, a sua análise tem de ser exaustiva, será necessário estudá-los na totalidade, enquanto no caso dos contraexemplos basta determinar um deles para se poder concluir que a afirmação em questão não é válida.

De modo análogo, a aplicação de uma abordagem, semelhante à adotada antes, à propriedade: “A soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180º” apresenta as mesmas debilidades. Todavia, podemos recorrer a uma abordagem diferente, tal como se exemplifica na Figura 7.

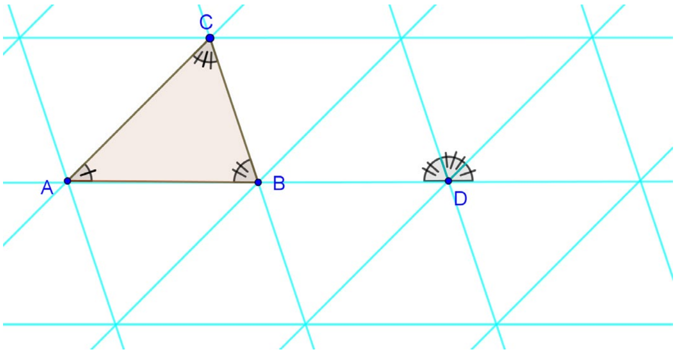

FIGURA 7: Figura geométrica construída sobre uma rede triangular de fundo
FONTE: Elaboração do autor

Esta construção, baseada nos trabalhos de van Hiele (Crowley, 1987), consiste em construir o triângulo $[ABC]$ numa rede triangular de fundo e, de seguida, deslocar, paralelamente, cada um dos ângulos para um mesmo vértice D. Deste modo, tendo em conta o paralelismo, mantém-se a congruência dos ângulos e obtém-se um ângulo raso, cuja amplitude é 180º e igual à soma das amplitudes dos ângulos internos do triângulo $[ABC]$. Note-se que esta abordagem, distinta da medição e do cálculo, fornece pistas para desenvolver uma prova mais formal da propriedade. Ainda relacionada com esta abordagem, podemos usar uma abordagem mais concreta, construindo o triângulo em papel, cortando cada um dos ângulos internos e juntando-os no mesmo vértice, obtendo-se, assim, também um ângulo raso.

3.2. Restantes abordagens

Diferentemente da abordagem anterior, na segunda, terceira e quarta abordagem não se efetuaram quaisquer medições de objetos das figuras geométricas. Portanto, as figuras geométricas representadas nas Figuras 4, 5 e 6 são de natureza distinta. Qualquer das figuras não pretende representar um exemplo particular, mas sim uma classe de exemplos, privilegiando-se a natureza teórica dos conceitos representados (Fischbein, 1990). Donde, não sendo um exemplo particular, assumimos que ele incorpora algum nível de generalização, ou seja, como se referiu antes, trata-se de exemplos generalizáveis.

A implementação destas abordagens, ao contrário da abordagem anterior, fornece também um possível caminho para a validação matemática da propriedade em estudo, apresentando-se como uma abordagem com potencialidades de ir além de exemplos particulares e permitir perspetivá-los como exemplos generalizáveis. Portanto, esta potencialidade da abordagem significa um desenvolvimento e um aprofundamento da abordagem anterior.

Por fim, nestas abordagens destaca-se também a diversidade de objetos e processos geométricos envolvidos na exploração da propriedade do triângulo retângulo, nomeadamente: na segunda abordagem salienta-se a definição de triângulo retângulo e de retângulo, a noção de perpendicularidade e as propriedades das diagonais do retângulo; na terceira abordagem destaca-se a definição de triângulo retângulo, de ângulo inscrito numa semicircunferência, de circunferência circunscrita ao triângulo e de propriedades da circunferência; e, finalmente, na quarta abordagem ressalta-se a definição de triângulo retângulo, a semelhança e congruência de triângulos e relações de igualde e proporcionalidade.

Segundo Godino, Batanero e Font (2007) e Godino, Geacomone, Batanero e Font (2017), na resolução de situações-problema, que desencadeiam a atividade matemática, intervém uma variedade de objetos matemáticos primários, como sejam linguagens, conceitos, proposições, procedimentos e argumentos. Para Godino et al. (2017, p. 94)

> O reconhecimento explícito de tais objetos e processos permite prever conflitos potenciais e efetivos de aprendizagem, avaliar as competências matemáticas dos estudantes e identificar objetos que devem ser recordados e institucionalizados nos momentos oportunos dos processos de estudo.

Por outro lado, ainda segundo Godino et al. (2007, 2017), na resolução de uma situação-problema, os objetos e processos matemáticos primários, antes referidos, relacionam-se de formas diferentes e formam as designadas configurações de objetos e processos. Ora, a exigência de relacionação entre os objetos e processos matemáticos é um requisito para promover uma aprendizagem significativa e que facilita a retenção (Ausubel, Novak & Hanesian, 1980; Skemp, 1993).

Conclusões e implicações

Tal como advogam Fernandes e Vaz (1998) e Zbiek (1995), com a introdução das tecnologias da informação e comunicação não se pretende ignorar a abordagem lógico-dedutiva da matemática, valorizando-se apenas e somente a abordagem indutiva ou experimental. Trata-se, antes, de integrar essas duas abordagens na aprendizagem da matemática, considerando cada uma delas como complementar da outra.

A exploração da propriedade do triângulo retângulo, envolvendo a descoberta e a validação da relação entre o comprimento da hipotenusa do triângulo e o comprimento da sua mediana, permitiu experienciar vantagens e limitações do uso do software GeoGebra na construção de figuras geométricas e, a um nível mais geral, no estudo da Geometria.

O primeiro aspeto que se salienta em todas as abordagens realizadas no estudo da propriedade do triângulo retângulo é a necessidade de construir figuras geométricas *resistentes* (Junqueira, 1996), ou seja, construir figuras que mantenham invariantes as suas propriedades, que não se deformem quando submetidas a operações de arrastamento. Esta exigência no uso dos ambientes geométricos dinâmicos é da maior relevância em termos da aprendizagem em Geometria pois a correta construção das figuras geométricas nesses ambientes requer, geralmente, ter em consideração os atributos geométricos dessas figuras. Por exemplo, na construção do triângulo retângulo temos de garantir que os catetos formam um ângulo reto, devendo, portanto, as suas retas suporte ser perpendiculares.

Um segundo aspeto prende-se com os tipos de figura geométrica construída: a que se assume como um exemplo particular, que representa um caso concreto, como se exemplificou com o caso das medições, e a que se assume como um exemplo generalizável, em resultado do seu vínculo teórico. Nesta última aceção, por exemplo, depois de termos construído um retângulo não o vemos apenas como aquele retângulo particular que desenhámos, vemo-lo como representando diferentes retângulos, o que, segundo Fischbein (1990), constitui uma característica importante das intuições.

Tratar-se de um exemplo particular, concreto, ou de um exemplo passível de captar a generalização faz uma grande diferença em termos da validação matemática. Isso é patente nas abordagens realizadas ao estudo da propriedade do triângulo retângulo: na primeira abordagem, consistindo na medição, a evidência de validação é diminuta, reduz-se aos dois exemplos particulares construídos; enquanto a assunção teórica, consubstanciada nas outras abordagens, confere uma maior evidência da validade da propriedade, perspetivando-se os dois exemplos como figuras geométricas padrão.

Nas três últimas três abordagens, ainda se destacam os objetos e processos matemáticos envolvidos na construção das figuras geométricas (Godino et al., 2007, 2017), bem como as relações requeridas entre eles. Tal diversidade de objetos matemáticos e as suas conexões promovem uma aprendizagem mais aprofundada e significativa e que possibilita uma maior retenção (Ausubel et al., 1980; Skemp, 1993).

Em síntese, do presente estudo destacam-se duas vantagens principais do uso de um ambiente geométrico dinâmico, como é o caso do GeoGebra, na aprendizagem da matemática. Por um lado, a construção de figuras geométricas *resistentes* requer a aplicação de definições e propriedades dos objetos matemáticos e, por outro lado, permite reunir evidência para estabelecer conjeturas e sugerir possíveis caminhos para a validação em matemática.

Contudo, apesar das vantagens apontadas, referiu-se antes que as novas tecnologias, como calculadoras e computadores, apresentam limitações, o que se aplica também ao GeoGebra. Sendo algumas dessas limitações mesmo definitivas, particularmente quando se trata de questões envolvendo o infinito e o contínuo, é importante refletir sobre a forma de como as usar. Recusar o seu uso seria deixar de tirar vantagem das suas potencialidades, o que tornar-se-ia uma decisão pouco inteligente em termos de aprendizagem. Portanto, em alternativa, sendo-se consciente das suas limitações, é recomendável que se recorra aos ambientes geométricos dinâmicos tendo em conta tais limitações.

Referências

Alves, M. P., & Fernandes, J. A. (2015). Alterações do programa de matemática do ensino básico português: o caso do tema Organização e Tratamento de Dados. *Olh@res*, *3*(1), 280-305.

Ausubel, D., Novak, J., & Hanesian, H. (1980). *Psicologia educacional*. Rio de Janeiro: Interamericana.

Courant, R., & Robbins, H. (1996). *What is mathematics?: an elementary approach to ideas and methods*. New York: Oxford University Press. (Publicação revista por Ian Stewart, original de 1941.)

Crowley, M. L. (1987). The van Hiele Model of the Development of Geometric Thought. In Mary M. Lindquist & Albert P. Shulte (Eds.), *Learnig and Teaching Geometry, K-12* (1987 Yearbook, pp. 1-16). Reston: NCTM.

Davis, P. J., & Hersh, R. (1995). *A Experiência matemática*. Lisboa: Gradiva. (Tradução portuguesa do original de 1981.)

Fernandes, J. A. (2006). *Tecnologias no ensino da matemática*: Aplicação de um programa de geometria dinâmica no estudo da geometria. Braga: Centro de Formação Prof. Agostinho Manuel da Silva.

Fernandes, J. A., & Vaz, O. (1998). Porquê usar tecnologia nas aulas de matemática? *Boletim da SPM*, *39*, 43-55.

Fischbein, E. (1990). Intuition and information processing in mathematical activity. *International Journal of Educational Research*, *14*, 31-50.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1-2), 127- 135.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., & Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema*, *31*(57), 90-113.

Junqueira, M. (1996). Exploração de construções geométricas em ambientes computacionais dinâmicos. *Quadrante*, *5*(1), 61-108.

Ministério da Educação e Ciência (2013). *Programa e Metas Curriculares Matemática*: Ensino básico. Lisboa: Autor.

Ministério da Educação e Ciência (2014). *Programa e Metas Curriculares Matemática A*: Ensino secundário. Lisboa: Autor.

Poincaré, H. (1932). *La valeur de la science*. Paris: Ernest Flammarion.

Poincaré, H. (1974). La creación matemática. In M. Kline (Ed.), *Matemáticas en el mundo moderno* (pp. 14-17). Madrid: Editorial Blume.

Skemp, R. R. (1993). *The psychology of learning mathematics*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Zbiek, R. M. (1995). Reaction to Harvey, Waits, and Demana's article. *The Journal of Mathematical Behavior*, *14*(1), 133-137.