

# Las contribuciones de Robert Aumann y Thomas Schelling a la Teoría de Juegos: Análisis del conflicto y de la cooperación

LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS DE SUECIA \*

---

## 1. Introducción

Las guerras y otros conflictos se encuentran entre las fuentes principales de la miseria humana. Un mínimo de cooperación es un prerrequisito para una sociedad próspera. La vida en un “estado de la naturaleza” anárquico con una lucha de hombres contra hombres es, en la famosa frase de Thomas Hobbes (1651), “solitaria, pobre, desagradable, brutal y corta”.

Los científicos sociales han intentado entender por mucho tiempo las causas fundamentales del conflicto y de la cooperación. El desarrollo de la teoría de juegos en la mitad del siglo XX guió a nuevas grandes ideas y permitió a los investigadores analizar el tema con rigor matemático. Los fundamentos de la teoría de juegos fueron enunciados en el libro clásico de John von Neumann y Oscar Morgenstern, *The Theory of Games and Economic Behavior*, publicado en 1944. Los ganadores del premio Nobel en economía de 1994 John Harsanyi, John Nash y Reinhard Selten contribuyeron con conceptos de solución y nuevas perspectivas que incrementaron sustancialmente la utilidad y el poder predictivo de la teoría de juegos no-cooperativa. El concepto de solución más importante es el de equilibrio de Nash. Una combinación de estrategias (una estrategia por cada jugador) constituye un equilibrio de Nash si la estrategia de cada jugador es óptima frente a las estrategias de los otros jugadores.<sup>1</sup> Harsanyi mostró que este concepto de solución podía ser generalizado a juegos con información incompleta (es decir, cuando cada jugador no conoce las preferencias de los otros jugadores). Selten demostró que el mismo concepto podía ser refinado para juegos dinámicos y para juegos donde los jugadores cometen errores con probabilidades (infinitesimalmente) pequeñas. Sin embargo, los grandes logros intelectuales de estos investigadores hubieran sido de

---

\* Publicación realizada con el permiso de la Real Academia de Ciencias de Suecia. © The Nobel Foundation 2005. Traducción realizada por Diego Grijalva, funcionario de la Dirección de Investigaciones Económicas del Banco Central del Ecuador.

<sup>1</sup> Un juego no-cooperativo en forma normal consiste en una lista de jugadores, un conjunto de estrategias disponibles para cada jugador, y una función que especifica las consecuencias de pago para todos los jugadores de cada combinación de estrategias.

poca utilidad si las herramientas de la teoría de juegos no se hubieran aplicado en la consideración de las preguntas más importantes acerca de la sociedad.

El trabajo de dos investigadores, Robert J. Aumann y Thomas C. Schelling, fue esencial en el desarrollo subsecuente de la teoría de juegos no-cooperativa y su aplicación a las grandes preguntas de las ciencias sociales.<sup>2</sup> Enfocando el tema desde distintos ángulos –Aumann desde las matemáticas y Schelling desde la economía– ambos percibieron que la perspectiva de la teoría de juegos tenía el potencial de dar una nueva forma al análisis de la interacción humana. Quizás de modo más importante, Schelling mostró que muchas interacciones sociales conocidas podían ser vistas como juegos no-cooperativos que involucran intereses tanto comunes como en conflicto, y Aumann demostró que la interacción social de largo plazo podía ser analizada de forma comprensiva utilizando la teoría de juegos formal no-cooperativa.

A pesar de que sus escritos acerca del conflicto y la cooperación fueron bien recibidos cuando aparecieron a finales de la década de 1950, tomó un largo tiempo antes de que las visiones de Aumann y Schelling fueran completamente comprendidas. El retraso refleja tanto la originalidad de sus contribuciones como lo empinado de los pasos subsecuentes. Eventualmente, y especialmente durante los últimos veinticinco años, la teoría de juegos ha llegado a ser una herramienta y lenguaje universalmente aceptados en economía y en muchas áreas de las otras ciencias sociales. El análisis económico actual del conflicto y la cooperación se construye casi uniformemente sobre los fundamentos presentados por Aumann y Schelling.

## 2. Schelling

El libro de Thomas Schelling *The Strategy of Conflict* (1960) dio inicio a su visión de la teoría de juegos como marco unificador para las ciencias sociales. Alejando la atención de los juegos de suma cero, tales como el ajedrez, en los que los jugadores tienen intereses diametralmente opuestos, él enfatizó el hecho de que casi todos los problemas de decisión entre múltiples personas contienen una mezcla de intereses comunes y en conflicto, y que la interacción entre ambos podía ser analizada de forma efectiva por medio de la teoría de juegos no-cooperativa. El escenario había sido definido por Nash (1950a, 1951), quien había probado que en todos los juegos con un número finito de estrategias puras existe un equilibrio (de

---

<sup>2</sup> Mientras la teoría de juegos cooperativa tiene como base un conjunto de potenciales acuerdos obligatorios y las preferencias de los jugadores sobre ellos, la teoría de juegos no-cooperativa tiene como base el conjunto de estrategias de los jugadores y las preferencias sobre los resultados asociados.

Nash). Schelling emprendió la tarea complementaria de deducir los equilibrios para varias clases interesantes de juegos y evaluar si estos juegos y sus equilibrios eran instructivos respecto de la interacción económica y social real. Él hizo esto en relación a la primera carrera armamentista nuclear mundial y logró contribuir de gran forma a nuestro entendimiento de sus implicaciones.

**2.1. Conflicto, compromiso y cooperación.** La primera gran contribución de Schelling es su análisis del comportamiento en situaciones de negociación bilateral, publicado inicialmente como un artículo (Schelling, 1956) y reimpresso más tarde como el capítulo 2 de Schelling (1960). Aquí, la negociación es interpretada de forma amplia: además de negociaciones explícitas –por ejemplo entre dos países o entre un vendedor y un comprador– también existe “negociación” cuando dos camiones cargados con dinamita se encuentran en un camino lo suficientemente ancho para uno, por citar uno de los ejemplos característicamente gráficos de Schelling.

La negociación siempre supone algún conflicto de interés debido a que cada parte generalmente busca un acuerdo que le sea tan favorable como sea posible. Sin embargo, cualquier acuerdo es mejor para ambas partes que ningún acuerdo en absoluto. Cada jugador debe encontrar un balance entre la búsqueda por un gran “pedazo del pastel” y su preocupación por el acuerdo. Cuando Schelling escribió su artículo, el trabajo de los economistas sobre la negociación había tomado típicamente un enfoque cooperativo o normativo, al hacer preguntas tales como: ¿cuál es un resultado justo? Una excepción fue Nash, quien modeló la negociación tanto con un enfoque cooperativo (Nash, 1950b) como no-cooperativo (Nash, 1953). Mientras las formulaciones de Nash permiten elegantes análisis matemáticos mediante la abstracción de muchas estrategias de negociación realistas, Schelling examina las tácticas de negociación que un jugador puede usar para virar el resultado en su favor – enfatizando particularmente que puede ser ventajoso el empeorar las opciones propias para extraer concesiones del oponente. Puede ser sabio por parte de un general el quemar los puentes detrás de sus tropas como un compromiso creíble frente al enemigo de no retirarse. De igual forma, los propietarios de una empresa pueden contratar para su beneficio un administrador con poderes limitados para negociar, y un político puede obtener beneficios al hacer promesas públicas que sería vergonzoso romper. Estas tácticas funcionan si el compromiso es irreversible o puede ser desecho solamente a un costo muy alto, mientras que los compromisos que son fáciles de romper no extraerán grandes concesiones. Sin embargo, si ambas partes realizan compromisos irreversibles e incompatibles, se puede tener como resultado un perjudicial desacuerdo.

Ilustremos algunos de los aspectos clave por medio de un ejemplo simple y estilizado. Supongamos que dos países están en desacuerdo respecto del derecho a una parte de un territorio.<sup>3</sup> Cada país puede elegir entre movilizar su fuerza militar o abstenerse de hacerlo. Si ambos se movilizan existe una alta probabilidad de guerra, mientras que la probabilidad de un acuerdo pacífico respecto de la división del territorio es baja. Supongamos que el pago esperado para cada país es cero si ambos se movilizan. Si por el contrario ambos países se abstienen de movilizarse, un acuerdo pacífico sobre la división del territorio tiene una alta probabilidad, mientras que la probabilidad de guerra es baja. En este caso, cada país obtiene un pago esperado positivo  $b$ . Sin embargo, si solo un país se moviliza, éste puede tomar control completo del territorio sin una guerra y ni el otro país ni ninguna otra parte pueden forzar un retiro militar del ocupante. El agresor obtiene un pago  $a$  mientras que el perdedor obtiene un pago  $c$ , donde  $a > b > c > 0$ , la guerra siendo entonces el peor resultado.<sup>4</sup> Este sencillo “juego de movilización” puede ser descrito por la siguiente bi-matriz de pagos, donde un jugador (aquí país) elige una fila y el otro simultáneamente elige una columna, con el pago del jugador fila listado primero en cada celda.

**Tabla No. 1**

	<b>Movilizarse</b>	<b>Abstenerse</b>
<b>Movilizarse</b>	0, 0	$a, c$
<b>Abstenerse</b>	$c, a$	$b, b$

Este juego pertenece a una clase de juegos denominado “Gallina”, a veces llamado también “Halcón-Paloma”. Tales juegos tienen tres equilibrios de Nash: dos puros y uno mixto. Los equilibrios puros comprenden la movilización por parte de exactamente un país; si un país espera que el otro se movilice, entonces es óptimo abstenerse de la movilización. El equilibrio mixto comprende una movilización aleatoria por parte de cada país y por lo tanto una probabilidad positiva de guerra.

<sup>3</sup> Para análisis más elaborados del compromiso en la negociación desde la perspectiva de la teoría de juegos, ver por ejemplo Crawford (1982), Muthoo (1996), y Güth, Ritzberger y van Damme (2004).

<sup>4</sup> En ciertas situaciones de conflicto, la guerra es menos indeseable que la humillación que puede estar asociada con la falta de movilización cuando el otro país se moviliza. En estas situaciones,  $a > b > 0 > c$ , y el juego se vuelve un dilema del prisionero, con mutua movilización como resultado; ver sección 3.1.

Los equilibrios puros son posibles en situaciones en las que los dos países tienen algún medio para coordinarse en algún equilibrio. Por ejemplo, una pequeña perturbación del juego que cree incluso una minúscula asimetría en los pagos, puede ser suficiente para que ambos jugadores esperen una movilización por parte del jugador que tiene más que ganar de la misma, volviendo de esta forma a ese equilibrio “saliente” o “focal”. De acuerdo a Schelling, es probable que los humanos sean capaces de tal coordinación en muchas situaciones, mientras que un análisis puramente formal posiblemente no sea capaz de capturar los elementos salientes o de focalidad en el juego en cuestión: “No se puede, sin evidencia empírica, deducir los contextos de maniobrabilidad que pueden ser percibidos en un juego de suma diferente de cero más de lo que se puede probar, mediante pura deducción formal, que un chiste es gracioso” es una famosa cita de Schelling (1960, p. 164). Al contrario, la selección de equilibrios es “un área donde la psicología experimental puede contribuir a la teoría de juegos” (*ibid*, p. 113).<sup>5</sup>

En ausencia de algún principio de coordinación comúnmente entendido, el equilibrio mixto del juego parece más viable. Cada país tiene entonces una incertidumbre respecto del movimiento del otro país, asignando cierta probabilidad  $p$  al evento de que éste vaya a movilizarse. La probabilidad de movilización en el equilibrio de Nash es  $p = (a - b) / (a - b + c)$ , dando como resultado que cada país sea indiferente entre movilizarse o no.<sup>6</sup> Se sigue que, para valores permitidos de los parámetros, la probabilidad de guerra es decreciente en el pago del perdedor  $c$ ; la clave para minimizar el riesgo de guerra no es solamente contener la ganancia del ganador sino igualmente mejorar el pago del perdedor.<sup>7</sup>

El movilizarse y el amenazar con movilizarse no son equivalentes. Un análisis formal de la disuasión es complicado y requiere especificar un juego dinámico con varias etapas, pero con la intuición de Schelling como guía es posible proceder sin matemáticas detalladas. El estudio de la disuasión creíble mediante las estrategias llamadas de “segundo golpe” constituye una gran parte de *The Strategy of Conflict*. Schelling enfatiza que las inversiones en disuasiones pueden volverse peligrosas en el caso de falsas advertencias así

<sup>5</sup> En la actualidad, existe una sustancial literatura experimental sobre puntos focales en la negociación así como en otros juegos, mucha de ella informada e inspirada por Schelling. Regresaremos al problema de coordinación más adelante.

<sup>6</sup> El movilizarse produce un pago esperado  $(1 - p)a$ , mientras que el abstenerse produce  $pc + (1 - p)b$ . El igualar las dos determina la probabilidad de equilibrio  $p$ .

<sup>7</sup> En razón de la independencia estadística entre la aleatorización de los dos jugadores, la probabilidad de guerra es  $q = p^2 m + (1 - p)^2 v$ , donde  $m$  es la probabilidad de guerra cuando ambos países se movilizan y  $v < m$  es la probabilidad de guerra cuando ningún país se moviliza. Se sigue que  $q$  es creciente en  $p$  para todo  $p > v / (m + v)$ . Entonces  $q$  es decreciente en  $c$  si  $c < (a - b) m / v$

como cuando se juzga erróneamente los intereses e intenciones del adversario.

Supongamos que el País 1 puede comprometerse previamente a movilizarse si el País 2 se moviliza. De forma más precisa: primero el País 1 elige si se abstiene completamente de movilizarse o si se compromete a movilizarse si y sólo si el País 2 se moviliza. A continuación, el País 2 observa el movimiento de 1 y decide si movilizarse o no. Si los pagos son como se describe en la Tabla 1, el resultado del equilibrio (subjuego-perfecto) será que el País 1 realiza el compromiso de movilización, y ambos países se abstienen de movilizarse. En realidad, es suficiente que el País 1 se comprometa a movilizarse con una probabilidad lo suficientemente alta.<sup>8</sup> Esta disuasión entonces garantiza un resultado pacífico –un balance del terror.

Supongamos, además, que el País 1 no tiene certeza respecto de si el País 2 en verdad prefiere la guerra al resultado negociado. En el lenguaje de la teoría de juegos (basado en el trabajo de Harsanyi), el País 1 tiene ahora información incompleta acerca de los pagos del País 2. ¿Debería todavía el País 1 comprometerse a movilizarse si el País 2 se moviliza? El análisis de Schelling revela que la estrategia de compromiso óptima consiste generalmente en escoger una probabilidad de movilización que es menor que uno. En otras palabras, frente a la escalada militar del enemigo, un país debería amenazar con dejar que la situación “se le escape de las manos” en lugar de comprometerse a una retaliación segura, o en palabras de Schelling, hacer “amenazas que dejen algunas cosas al azar”. La razón es que una probabilidad modesta de guerra puede ser suficiente para desalentar la movilización del enemigo.<sup>9</sup>

Otra virtud de las amenazas de retaliación indeterminadas es que la credibilidad es más fácil de obtener mientras más pequeño es el propio costo esperado de retaliación. De hecho, Schelling sugirió que una buena forma de enfrentar la agresión enemiga es embarcarse en la “política en la cuerda floja” –aumentar gradualmente la probabilidad de un conflicto abierto. Puesto que

<sup>8</sup> Supongamos que el País 1 puede comprometerse a cualquier probabilidad  $p \in [0, 1]$  de retaliación si el País 2 se moviliza. Si las preferencias del País 2 son como en la Tabla 1, la abstención requiere que  $b = (1 - p)a$  o, de forma equivalente, que  $p = 1 - b/a = p^*$ .

<sup>9</sup> Sea  $\gamma$  la probabilidad que el País 1 asigna a la posibilidad de que el País 2 prefiera movilizarse indistintamente de la amenaza de retaliación. Para  $p < p^*$ , el País 2 todavía se movilizará de seguro, por lo que el pago para el País 1 es entonces  $(1 - p)c$ , una función decreciente de  $p$ . Para  $p = p^*$  el pago esperado es  $\gamma(1 - p)c + (1 - \gamma)b$ , de nuevo una función decreciente de  $p$ . Entonces, la abstención (elegir  $p = p^*$ ) es óptimo para el País 1 si y sólo si  $\gamma(1 - p^*)c + (1 - \gamma)b$  es al menos tan grande como el pago  $c$  de no tomar represalias ( $p = 0$ ), ó, de forma equivalente, si y sólo si  $\gamma = (1 - c/b)/(1 - c/a)$ .

cada paso es pequeño, la credibilidad puede ser sustentada por la ira y la indignación que se construye constantemente frente a un oponente que no cede, y puesto que el oponente puede reducir la probabilidad de conflicto al ceder, la misma se mantiene baja. Como Schelling observó, la gran mayoría de niños entienden perfectamente la “política en la cuerda floja”.

El análisis anterior implica que los países deberían mantener a su adversario haciendo conjeturas acerca de sus respuestas a la agresión, y al mismo tiempo asegurándole que la retaliación por la fuerza se considera una opción real. Otras dos ideas surgen también de forma inmediata. Primero, la disuasión sólo funciona cuando las armas de retaliación pueden ser resguardadas en caso de un ataque enemigo; la prevención de la guerra requiere entonces una base invulnerable de las armas –tal como silos para misiles- en lugar de protección de los centros poblacionales. Segundo, la inestabilidad es peligrosa. El balance del terror es mantenido sólo mientras la retaliación es suficientemente probable y dura en comparación a las ganancias de la ocupación. La guerra puede ser encendida debido a cambios en las preferencias así como en la tecnología, y los intentos exitosos de desarme deben ser balanceados desde el principio hasta el final.

El análisis de Schelling de los “compromisos creíbles” demostró que algunos equilibrios de Nash son más viables que otros, inspirando el refinamiento del concepto de equilibrio de Nash denominado perfección en subjuegos de Reinhard Selten.<sup>10</sup> El trabajo de Schelling y de Selten dio inicio a una vigorosa literatura económica. Los análisis de la inversión estratégica en mercados oligopólicos desarrollados, entre otros, por Avinash Dixit y el estudiante de Schelling, Michael Spence (uno de los ganadores del premio Nobel de 2001) son ejemplos destacados del trabajo aplicado sobre compromiso que despegó a finales de la década de 1970 (ver, por ejemplo, Spence, 1977 y Dixit, 1980). Sus análisis muestran que una empresa que opera en un mercado con competencia imperfecta puede aumentar sus utilidades cambiando su estructura de costos, incluso si su costo unitario de producción aumenta como resultado. Por ejemplo, una empresa puede comprometerse de forma creíble a un alto nivel de producción al invertir en una planta costosa con costos marginales bajos. Incluso si los costos promedio se incrementan debido a ello, las pérdidas debido a la producción

---

<sup>10</sup> Un equilibrio de Nash en un juego en forma extensiva es *subjuego-perfecto* (Selten, 1965) si induce un equilibrio de Nash en todos y cada uno de los subjuegos. Puesto que el equilibrio de Nash solamente requiere optimalidad en la trayectoria del juego, los equilibrios de Nash pueden perfectamente depender de “amenazas” o “promesas” que no se materializarán subsecuentemente. La perfección en subjuegos elimina muchos de estos equilibrios, y, en un trabajo más tardío Selten (1975) desarrolló un refinamiento más fuerte, “perfección”.

ineficiente pueden ser compensadas por las ganancias generadas por el comportamiento menos agresivo de los competidores.

La literatura sobre instituciones de política monetaria proporciona otro ejemplo de la idea de compromiso estratégico en la práctica. En este caso, el punto central es que bajo ciertas circunstancias, los votantes y los políticos están mejor delegando la política monetaria a tomadores de decisión con preferencias diferentes de las suyas propias. Puesto que las empresas y las asociaciones comerciales toman en cuenta la política monetaria esperada al definir sus precios y salarios, un banquero central independiente puede ser superior a un político electo, incluso cuando el político actuara en cada instante de acuerdo al interés público vigente.<sup>11</sup>

En ocasiones los conflictos de interés pueden parecer tan fuertes que son insolubles. La mejor estrategia para un individuo puede dar lugar al peor resultado para el grupo. Las ganancias de corto plazo de engañar en un acuerdo pueden pesar mucho más que las pérdidas en el largo plazo. Schelling (1956) observó que “Lo que hace que muchos acuerdos se cumplan es solamente el reconocimiento de las oportunidades de acuerdo futuras que se eliminan si la confianza mutua no es creada y mantenida, y cuyo valor supera a los beneficios monetarios de engañar en la situación actual” (op. cit. p. 301). Entonces, si las partes toman una perspectiva de largo plazo y en realidad actúan de forma repetida, sus intereses comunes pueden ser lo suficientemente fuertes como para sustentar la cooperación. De hecho, Schelling fue más allá: “Incluso si el futuro no trae recurrencia, puede ser posible crear la equivalencia de continuidad mediante la división de la cuestión negociada en partes consecutivas”. Es decir, la gente puede estructurar sus relaciones, por medio de la extensión de las mismas a lo largo del tiempo, de forma tal que el incentivo para comportarse de forma oportunista en cada instante se reduzca.

Cuando Schelling realizó estas observaciones y conjeturas por vez primera, la teoría de juegos todavía no había avanzado lo suficiente para permitirle articularlas de forma precisa, menos aún demostrarlas. De forma gradual, sin embargo, la literatura sobre juegos repetidos y “Teoremas Folk” (discutidos más adelante) demostraron la forma en que la cooperación presente podía ser sostenida de forma creíble por la amenaza de conflicto en situaciones similares en el futuro. En relación a la aseveración de Schelling de que a

---

<sup>11</sup> El premio Nobel del último año fue otorgado a Finn Kydland y Edward Prescott en parte por haber identificado y analizado los problemas de compromiso en la ejecución de políticas económicas. La literatura macroeconómica sobre delegación está fuertemente inspirada por su trabajo; ver, por ejemplo, Rogoff (1985).



veces es posible sustentar un acuerdo mediante la descomposición de una gran acción cooperativa en varias pequeñas, le tomó a la profesión más de cuarenta años el desarrollar completamente el argumento formal. Lockwood y Thomas (2002) demuestran en un modelo de dos jugadores que la provisión privada de bienes públicos puede frecuentemente ser substancialmente más alta si las partes pueden alternar en sus contribuciones que si sólo pueden realizar una ronda de contribuciones cada uno.<sup>12</sup> Mediante el aumento gradual de su contribución, amenazando implícitamente con detener el incremento si el otro así lo hace, cada parte ofrece una zanahoria al otro. Sin embargo, sólo se pueden obtener niveles de contribución completamente eficientes bajo fuertes supuestos adicionales, tales como descuento cero (Gale, 2001), o funciones de pago discontinuas (Marx y Matthews, 2000). Estos análisis pueden potencialmente explicar por qué el progreso es necesariamente gradual en muchas áreas donde las acciones cooperativas son costosas de revertir. Entre los ejemplos se puede mencionar el desarme militar, la cooperación medio-ambiental, y la contracción de la capacidad de producción en un mercado en declive.

La cooperación gradual no ocurre solamente entre humanos. El biólogo John Maynard Smith describe el comportamiento de apareamiento del “black hamlet”, un pescado hermafrodita del arrecife de coral que lleva esperma y huevos de forma simultánea (Maynard Smith, 1982, p. 159-160). Cuando el pescado se aparea, éste entabla varias rondas de “intercambio de huevos” donde de forma alternativa pone los huevos y fertiliza los huevos de su compañero. La explicación propuesta es que es más barato producir esperma que huevos, así que si todos los huevos fueran puestos de una sola vez, el pescado en el rol de macho en esta primera ronda podría no producir ningún huevo más tarde, prefiriendo al contrario realizar el rol de macho otra vez con otro pescado dispuesto a producir huevos. Al ahorrar algunos huevos para ser usados como una recompensa por los huevos del otro pescado, cada pescado reduce el incentivo de su compañero de desertar. Este no es más que un ejemplo de la biología evolucionaria donde el análisis de Schelling tiene relevancia.

Schelling también estudió una clase de interacciones sociales que suponen poco o ningún conflicto de interés, los llamados juegos de coordinación pura. Estos son juegos en los que todos los jugadores prefieren una coordinación en algún curso de acción conjunto y a ningún jugador le importa cuál curso de acción coordinado es tomado. Por ejemplo, puede no importar para un equipo

---

<sup>12</sup> Admati y Perry (1991) fueron los primeros en abordar el problema de forma directa, pero su análisis consideraba un ambiente considerablemente especial y sólo produjo un apoyo débil a la conjetura de Schelling.

de trabajadores quien realiza qué tareas, mientras el equipo termine su trabajo. En este caso, la coordinación puede ser fácil si los jugadores pueden comunicarse entre ellos pero parece difícil sin comunicación. Mediante la experimentación con sus estudiantes y colegas, Schelling descubrió que ellos eran generalmente capaces de coordinarse bastante bien sin comunicarse incluso en juegos desconocidos con abundantes equilibrios de Nash. Como ejemplo, considere el juego en que se pide a dos personas que cada una seleccione un entero positivo. Si ambos escogen el mismo entero ambos obtienen un premio, de otra forma no se entrega ninguno. En este escenario, la mayoría tiende a seleccionar el número 1. Este número es distintivo, pues es el entero positivo más pequeño. De igual forma, en muchos otros escenarios, los sujetos experimentales de Schelling fueron capaces de utilizar detalles contextuales, referencias conjuntas, y empatía para identificar equilibrios “focales”.<sup>13</sup> Parece probable que muchas convenciones sociales y arreglos organizacionales han emergido porque facilitan la coordinación. Inspirado por el análisis de Schelling de la coordinación en juegos de interés común, el filósofo David Lewis especificó la hipótesis convincente de que el lenguaje mismo surgió como una convención (Lewis, 1969).

Una última clase interesante de problemas de decisión social son las interacciones en las cuales los jugadores son desconfiados. Por ejemplo, dos generales pueden estar de acuerdo en que la guerra es indeseable, y entonces se prepararán para la paz mientras ambos crean que el otro hará de igual forma. Pero, si un general sospecha que el otro se está preparando para la guerra, entonces su mejor respuesta puede ser también prepararse para la guerra –cuando la guerra es menos indeseable que ser invadido.<sup>14</sup> Como Schelling (1966, p. 261) afirma, esta idea ya había sido formulada de forma clara por Xenophon (en el siglo IV a.C.). Una versión más reciente del argumento se la debe a Wohlstetter (1959), quien en cambio inspiró a Schelling. El análisis fue perfeccionado por Schelling (1960, capítulo 9), quien lo expresó en términos de teoría de juegos y consideró de forma explícita el rol de la incertidumbre en el desencadenamiento de la agresión. Para ilustrar la posibilidad de que la guerra sea causada solamente por desconfianza mutua, considere la siguiente bi-matriz de pagos (donde el primer número en cada celda es el pago del jugador fila):

---

<sup>13</sup> Varios intentos subsecuentes de descubrir los principios de coordinación fundamentales incluyen Mehta, Starmer y Sugden (1994a,b). Camerer (2003, cáp. 7), presenta una visión general de los experimentos de coordinación. Para un reciente trabajo teórico, ver Binmore y Samuelson (2005).

<sup>14</sup> Este no era el caso en el ejemplo previo, donde la guerra era el peor resultado.

**Tabla No. 2**

	<b>Guerra</b>	<b>Paz</b>
<b>Guerra</b>	2, 2	3, 0
<b>Paz</b>	0, 3	4, 4

Cada jugador tiene una elección entre ir a la guerra o comportarse de forma pacífica. Los dos equilibrios de Nash en estrategias puras son (Guerra, Guerra) y (Paz, Paz). Si los jugadores son racionales, llevan a cabo sus planes perfectamente, y no tienen incertidumbre respecto del pago del oponente, Schelling (1960, p. 210) pensó que la paz sería el resultado más viable de tal juego (una posición que no es compartida por todos los teóricos del juego). Sin embargo, Schelling (1960, p. 207) también sostenía que una pequeña cantidad de nerviosismo acerca de las intenciones del oponente podría ser lo suficientemente contagioso para deshacer el equilibrio pacífico: “Si yo bajo las escaleras para investigar un ruido en la noche, con un arma en mi mano, y me encuentro cara a cara con un ladrón con un arma en su mano, existe el riesgo de un resultado que ninguno de los dos desea. Incluso si él sencillamente prefiere irse de forma tranquila, y yo deseo que lo haga, existe el riesgo de que él pueda *pensar* que yo quiero disparar, y disparar primero. Peor aún, existe el riesgo de que él pueda pensar que *yo creo* que él quiere disparar”. Schelling intentó un análisis formal de este dilema de ataque sorpresa, pero puesto que la teoría de juegos en ese momento no contaba con un marco adecuado para estudiar juegos con información incompleta, es justo decir que su modelado no le hizo justicia a su intuición.<sup>15</sup>

*The Strategy of Conflict* ha tenido una influencia duradera en la profesión económica y en otras ciencias sociales. Ha inspirado, entre otras cosas, el análisis detallado de la negociación en situaciones históricas de crisis (ver por ejemplo Snyder y Diesing, 1977). El libro y sus secuelas *Strategy and Arms Control* (1961, escrito conjuntamente con Morton Halperin) y *Arms and Influence* (1966), también tuvieron un profundo impacto sobre los teóricos y practicantes militares durante la Guerra Fría, jugaron un rol muy importante en establecer los “estudios estratégicos” como un campo académico de estudio, y pueden muy bien haber contribuido significativamente a la disuasión y desarme de las superpotencias.<sup>16</sup>

<sup>15</sup> Recientemente, Baliga y Sjöström (2004) proporcionaron un análisis formal

<sup>16</sup> La discreción que rodea a los asuntos militares hace difícil evaluar el impacto exacto del trabajo de Schelling en el comportamiento de las superpotencias. Sin embargo, una pista es que en 1993 Schelling ganó el Premio de la National Academy of Sciences (Estados Unidos) por Investigación del Comportamiento relevante para la Prevención de la Guerra Nuclear.

**2.2. Otras contribuciones.** En los cuarenta y cinco años desde la publicación de *The Strategy of Conflict*, Thomas Schelling ha continuado produciendo una serie de ideas nuevas y útiles. Mencionamos aquí dos de ellas brevemente.

En un artículo muy citado de 1971, Schelling analizó la forma en que sociedades y barrios racialmente variados pueden de pronto volverse segregados cuando la proporción de habitantes de una raza disminuye gradualmente por debajo de un nivel crítico. Una preferencia modesta de no formar parte de una minoría en el barrio propio, pero no necesariamente favoreciendo la dominación de la propia raza, puede causar que pequeños micro-shocks tengan consecuencias drásticas a nivel macro. Además de brindar una explicación convincente de un importante problema de política social, Schelling ofrece un análisis temprano del “volcamiento” –el rápido movimiento de un equilibrio a otro– en situaciones sociales que comprenden un gran número de individuos. El fenómeno de volcamiento es analizado en varios contextos diferentes en otro de los influyentes libros de Schelling, *Micromotives and Macrobehavior* de 1978, y ha sido analizado adicionalmente por otros científicos sociales.

El siguiente conjunto de ideas originales es explorado en una secuencia de artículos sobre auto-dominio, particularmente Schelling (1980, 1983, 1984a, 1992).<sup>17</sup> Aquí, Schelling observa que nosotros hacemos muchas cosas que nosotros preferiríamos no hacer, por ejemplo fumar y tomar demasiado o ejercitarnos y ahorrar muy poco. Él también explora los límites de la auto-administración y los retos asociados para la política pública. De forma interesante, la importancia de los compromisos creíbles no es menor en este contexto de conflictos intrapersonales que en los conflictos interpersonales que ocuparon a Schelling en los comienzos de su carrera. En la última década, con el desarrollo de la economía del comportamiento, la cuestión del auto-dominio limitado ha recibido amplia atención.<sup>18</sup> Actualmente existen muchos artículos en las principales revistas económicas sobre el aplazamiento, bajos niveles de ahorro, y consumo no saludable.

En suma: el “economista errante” (como Schelling se ha llamado a sí mismo) ha resultado ser un pionero preeminente.

---

<sup>17</sup> Los dos primeros artículos se encuentran reimprimos como capítulos 3 y 4 en Schelling (1984b).

<sup>18</sup> Para tempranos análisis formales de tales problemas, ver por ejemplo Strotz (1956) y Phelps y Pollak (1968).

### 3. Aumann

Robert Aumann ha tenido un rol esencial en la formación de la teoría de juegos. Él ha promovido una visión unificada del muy amplio dominio de las interacciones estratégicas, englobando a muchas disciplinas aparentemente dispares, tales como economía, ciencia política, biología, filosofía, computación y estadística. En lugar de usar diversas construcciones teóricas para tratar con varios problemas específicos –tales como disuasión, competencia perfecta, oligopolio, impuestos y votaciones– Aumann ha desarrollado metodologías generales y ha investigado la dirección a la que éstas llevan en cada aplicación específica. Su investigación se caracteriza por una inusual combinación de amplitud y profundidad. Algunas contribuciones contienen complicados análisis mientras que otras son técnicamente simples, pero conceptualmente profundas. Sus trabajos fundamentales han clarificado la lógica interna del razonamiento de la teoría de juegos y han expandido su ámbito y aplicabilidad.

**3.1. Cooperación de largo plazo.** Entre las muchas contribuciones de Aumann, el estudio de la cooperación de largo plazo ha tenido posiblemente el impacto más profundo en las ciencias sociales. Como se señaló anteriormente, una gran proporción de la interacción es por naturaleza de largo plazo, en ocasiones de duración ilimitada. Los países frecuentemente tienen una oportunidad de obtener alguna ventaja a costo de sus vecinos. Las empresas que compiten pueden decidir diaria o mensualmente acerca de la producción y el establecimiento de los precios, condicionadas en parte por el comportamiento pasado de sus competidores. Los agricultores pueden agruparse para manejar algún recurso común tal como prados o fuentes de agua, etc. Es importante por lo tanto estudiar la interacción repetida con un horizonte de largo plazo.

La diferencia entre la interacción de corto y de largo plazo quizás es ilustrada de la forma más sencilla por medio del muy conocido juego del dilema del prisionero. Este es un juego de dos personas, donde cada jugador tiene dos estrategias puras, “cooperar” (C) o “desertar” (D). Los jugadores escogen su estrategia simultáneamente. La estrategia dominante para cada jugador es D – es decir, D es una estrategia óptima independientemente de la estrategia del otro- pero ambos jugadores ganan si ambos juegan C. Cuando se juega una vez, este juego admite sólo un equilibrio de Nash: que ambos jugadores “deserten”. Sin embargo, el resultado en equilibrio es peor para ambos jugadores que el par de estrategias en que ambos cooperan. Un ejemplo está dado por la siguiente bi-matriz de pagos, donde, igual que antes, el primer

número en cada celda es el pago del jugador fila y el segundo número es el pago del jugador columna.<sup>19</sup>

**Tabla No. 3**

	C	D
C	2, 2	0, 3
D	3, 0	1, 1

Suponga que los mismos dos jugadores se encuentran todos los días, jugando el dilema del prisionero una y otra vez, intentando maximizar la cadena de pagos diarios promedio sobre un futuro infinito. En este caso, se puede mostrar que la cooperación en cada período es un resultado en equilibrio. La razón es que ahora los jugadores pueden amenazar con castigar cualquier desviación del juego cooperativo el día de hoy al negarse a cooperar en el futuro. Es decir, el beneficio de corto plazo de desertar es más que compensado por la reducción en la cooperación futura.

De hecho, Aumann (1959) demostró un resultado mucho más general, concerniente a cualquier “superjuego”  $G^*$  que consiste en la repetición infinita de cualquier juego dado  $G$ . Esencialmente, él demostró que cualquier pago promedio que es factible en el superjuego y no viola la racionalidad individual (ver más adelante) en el “juego-etapa”  $G$  puede ser sostenido como un resultado de un equilibrio de Nash en  $G^*$ . Además, él demostró que el resultado es válido incluso si se requiere robustez respecto de las desviaciones conjuntas de coaliciones de jugadores.

Expresemos el resultado de forma más precisa. Una estrategia pura en  $G^*$  es una regla de decisión que asigna una estrategia pura en  $G$  para cada período y para toda historia de juego hasta ese período. El conjunto de estrategias puras en  $G^*$  es por lo tanto infinito y contiene estrategias muy complejas. El resultado principal del artículo especifica de forma exacta el conjunto de pagos del equilibrio fuerte de  $G^*$ .<sup>20</sup> Un equilibrio fuerte, concepto de solución debido a Aumann (1959), es un perfil de estrategias tal que ningún grupo (subconjunto, coalición) de jugadores puede, al cambiar sus propias

<sup>19</sup> Se asume que los pagos son utilidades de von Neumann-Morgenstern que capturan de forma veraz los motivos de los jugadores. Si en lugar de ello los pagos son monetarios, es perfectamente posible que un jugador racional escoja C debido a su preocupación por el ingreso del otro jugador.

<sup>20</sup> Aumann define los pagos en  $G^*$  por medio de un cierto límite de promedios temporales de los pagos en  $G$ .

estrategias, obtener pagos más altos para todos los miembros del grupo.<sup>21</sup> El equilibrio de Nash consiste entonces en el caso especial en el que el grupo desviado está conformado por exactamente un jugador. Aumann demostró que el conjunto de pagos de equilibrio fuerte coincide con el llamado núcleo  $\beta$  del juego  $G$  que está siendo repetido. El núcleo  $\beta$ , una versión del núcleo, requiere esencialmente que ningún grupo de jugadores pueda garantizarse pagos más altos –incluso si los demás se confabulan en contra de ellos.

Cuando el resultado de Aumann es aplicado a grupos desviados de tamaño unitario, el resultado es el denominado Teorema Folk para juegos repetidos. De acuerdo a este teorema, el conjunto de pagos de los equilibrios de Nash de un juego infinitamente repetido  $G^*$  coincide con el conjunto de pagos factibles e individualmente racionales. Un vector de pagos –una lista de pagos, uno por cada jugador– es factible si está en la combinación convexa de los vectores de pago que pueden ser obtenidos mediante las estrategias puras en  $G$ , y un pago es individualmente racional para un jugador si no es menos que el menor pago en  $G$  al que los otros jugadores lo pueden “forzar”.<sup>22</sup> Lo esencial del argumento es ofrecer estrategias en  $G^*$  que constituyen “amenazas” contra las desviaciones de las estrategias en  $G^*$  que implementan el vector de pagos dado.

En el dilema del prisionero considerado aquí, el conjunto de pares de pagos factibles e individualmente racionales consiste en todos los pares de pagos que pueden ser obtenidos como combinaciones convexas de los pares de pagos en la Tabla 3 y donde ningún pago es menor a 1. Para ver esto, note en primer lugar que cada jugador puede garantizarse un pago de al menos 1 jugando  $D$ . Segundo, los cuatro pares de estrategias puras resultan en los pares de pago (2, 2), (1, 1), (3, 0) y (0, 3). El conjunto de pares de pagos factibles es entonces el poliedro que tiene a estos pares como vértices. El área sombreada en la Figura 1 es la intersección de estos dos conjuntos. Todos estos pares de pagos, y ningún otro, pueden ser obtenidos como promedios temporales de los pagos de los equilibrios de Nash resultantes de jugar este juego de manera infinitamente repetida.

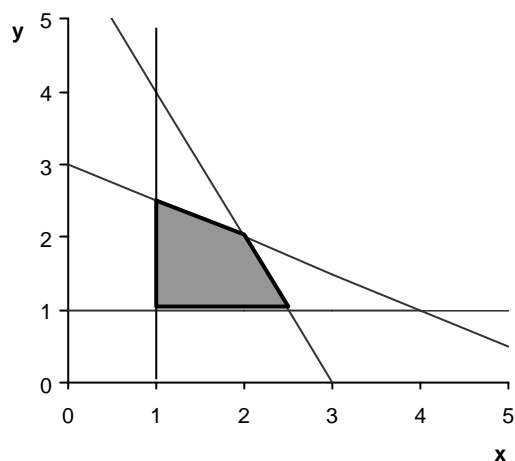
---

<sup>21</sup> No todos los juegos tienen tales equilibrios.

<sup>22</sup> El conjunto de pagos individualmente racionales puede ser definido como sigue. Para cada combinación de estrategias (puras o mixtas) de los otros jugadores en  $G$ , consideremos que el jugador en cuestión juega su mejor respuesta (pura o mixta). El valor mínimo entre los pagos resultantes define el límite inferior de los pagos individualmente racionales para ese jugador.

Figura No. 1

**El conjunto de pares de pagos factibles e individualmente racionales en el juego del dilema del prisionero en la Tabla 3**



Aplicado al juego en la Tabla 1, el Teorema Folk afirma que todos los pares de pagos que son combinaciones convexas de  $(0, 0)$ ,  $(a, c)$ ,  $(c, a)$  y  $(b, b)$ , y donde ningún pago se encuentra debajo de  $c$ , pueden ser obtenidos como promedios temporales de pagos de los equilibrios de Nash de jugar este juego de manera infinitamente repetida. En particular, el “buen” resultado  $(b, b)$  es sostenible –pese al hecho de que no es un equilibrio del juego cuando se lo juega sólo una vez. Las desviaciones de la forma de jugar prescrita pueden ser amenazadas por la “mini-maximización” del desviador, es decir, el otro jugador decide aleatoriamente entre las dos estrategias puras de tal forma que se minimiza el pago esperado del desviado cuando este último juega su mejor respuesta frente al “castigo”. Estos castigos pueden sustentar también otros resultados como equilibrios de los juegos infinitamente repetidos, por ejemplo un juego alternado entre C y D de acuerdo a un patrón prescrito. Aplicado a juegos más complejos, estos castigos pueden forzar temporalmente los pagos de los jugadores por debajo de todos los niveles de pago del equilibrio de Nash en el juego-etapa G. Por ejemplo, las empresas en competencia repetida basada en cantidad (Cournot) pueden castigar las desviaciones del comportamiento colusivo (tal como acuerdos implícitos de cartel para restringir la producción) recurriendo a la “inundación” temporal del mercado y, en consecuencia, forzando a que las ganancias bajen a cero.



En los 1950s, varios teóricos de juegos habían conjeturado que los jugadores racionales deberían ser capaces de cooperar –por ejemplo jugar C en el dilema del prisionero indicado anteriormente- si el juego sólo durara lo suficiente (ver sección 5.5 en Luce y Raiffa, 1957). Su sabor a folklore es la razón por la cual el resultado terminó siendo denominado como “Teorema Folk”. Como se indicó anteriormente, Schelling (1956) definitivamente creía en la sabiduría “folklorica” y la consideraba relevante empíricamente. Aún así, fue la aseveración precisa y general de Aumann la que puso los cimientos para los análisis subsecuentes de interacciones repetidas. Más tarde, Friedman (1971) estableció un resultado útil, aunque parcial, para los juegos repetidos: si los jugadores descuentan los pagos futuros lo suficientemente poco, entonces se puede obtener como equilibrios del juego repetido infinitamente resultados con pagos superiores para todos los jugadores que lo que recibirían en un equilibrio de Nash en estrategias puras del juego-etapa subyacente G.

Durante la guerra fría, entre 1965 y 1968, Robert Aumann, Michael Maschler y Richard Stearns colaboraron en investigaciones sobre la dinámica de las negociaciones del control armamentista. Su trabajo constituyó la base para la teoría de los juegos repetidos con información incompleta, es decir, juegos repetidos en los que todos o algunos de los jugadores no saben cuál juego-etapa G está siendo jugado, ver Aumann y Maschler (1966, 1967, 1968), Stearns (1967) y Aumann, Maschler y Stearns (1968). Por ejemplo, una empresa podría no saber los costos de un competidor y un país podría no saber el arsenal de armas militares o el ranking de los acuerdos alternativos de otro país. La extensión introduce además otro elemento estratégico: los incentivos para ocultar o revelar información privada a otros jugadores. ¿Cómo puede una persona, empresa o país, que tiene información extra aprovechar esta ventaja? ¿Cómo podría un jugador ignorante inferir información conocida para otro jugador mediante la observación de las acciones pasadas de este jugador? ¿Debería un jugador informado tomar ventaja de la información para obtener ganancias de corto plazo, arriesgando así el revelar su información a otros jugadores, o debería ocultar la información con el objeto de ganar más en el futuro? Tomando como base el trabajo de John Harsanyi, Aumann, Maschler y Stearns aplicaron la teoría de juegos a estas sutiles cuestiones estratégicas. Su trabajo es recogido y comentado en Aumann y Maschler (1995).

Aumann y Shapley (1976) y Rubinstein (1976, 1979) refinaron el análisis de los juegos repetidos al demostrar que todos los resultados que son factibles e individualmente racionales pueden ser sostenidos como equilibrios de Nash *subjuego-perfectos*. En el contexto de un juego repetido infinitamente, la perfección en subjuegos requiere esencialmente que los jugadores, frente a

una desviación unilateral de la ruta de equilibrio del juego, tengan incentivos para jugar de acuerdo al equilibrio. En particular, la perfección en subjuegos requiere que ningún jugador tenga un incentivo para desviarse de castigar a un desviado, ni de desviarse de castigar a un jugador que se desvía de castigar a un desviado, etc. Muchos equilibrios de Nash no son subjuego-perfectos, y de ninguna forma era claro que un refinamiento tan estricto fuera a dejar intacto el conjunto total de pagos de equilibrio de Nash de los superjuegos. De hecho, como Aumann y Shapley mostraron, si los jugadores descuentan los pagos futuros, y procuran maximizar el valor esperado presente de su flujo de pagos, entonces el conjunto de resultados de equilibrio subjuego-perfecto puede ser significativamente más pequeño que el conjunto de resultados de equilibrios de Nash. Pues mientras que el criterio de equilibrio de Nash no depende de los “costos” de “castigar” a los desviados, el criterio de perfección en subjuegos sí. Sin embargo, su Teorema Folk generalizado establece que la distinción entre equilibrio subjuego-perfecto y equilibrio de Nash desaparece cuando no hay descuento.

La teoría de juegos repetidos ha florecido en los últimos cuarenta años, y ahora nosotros tenemos un entendimiento mucho más profundo de las condiciones para la cooperación en relaciones recurrentes. Al seguir una caracterización de castigos óptimos de Abreu (1988), se volvió más sencillo encontrar el conjunto de pagos sostenibles en equilibrio en juegos repetidos. Fudenberg y Maskin (1986) establecieron Teoremas Folk para equilibrios subjuego-perfectos en juegos repetidos infinitamente con descuento y un número arbitrario (finito) de jugadores. Aumann y Soria (1989) mostraron que la memoria limitada de los jugadores puede reducir el conjunto de equilibrios a aquellos que son socialmente eficientes, y Abreu, Dutta y Smith (1994) esencialmente caracterizaron la clase de juegos para la cual la aseveración del Teorema Folk se mantiene bajo repetición infinita y descuento.

Un ejemplo de equilibrio subjuego-perfecto en un juego con descuento repetido infinitamente es cuando  $n$  empresas idénticas sin costos fijos y costo marginal constante  $c$  venden el mismo producto y entablan una competición de precios dinámicos en el mercado. Cada empresa anuncia un precio en cada período y los consumidores compran sólo de la(s) empresa(s) con el precio más bajo, con su demanda distribuida uniformemente sobre todas estas empresas. Si esta interacción tuviera lugar en sólo una ocasión, entonces el precio de mercado resultante sería el mismo que en competencia perfecta:  $p = c$ . Sin embargo, cuando la interacción tiene lugar sobre un futuro indefinido donde las ganancias son descontadas a una tasa constante, muchos otros resultados de equilibrio son posibles si el descuento no es demasiado severo.

Por ejemplo, todas las empresas pueden empezar estableciendo el precio de monopolio  $p_m > p$  y seguir haciéndolo hasta que una desviación en el precio es detectada, a partir de cuyo período todas las empresas establecen el precio competitivo  $p = c$ . Tal perfil de estrategias constituye un equilibrio subjuego-perfecto si  $d = 1 - 1/n$ , donde  $d \in (0, 1)$  es el factor de descuento –el factor por el que las ganancias futuras son descontadas cada período.<sup>23</sup> Mientras más competidores haya, más fuerte es la condición sobre el factor de descuento –y por lo tanto es más difícil sostener la colusión.

Otras líneas de la literatura examinan las posibilidades de cooperación en el largo plazo cuando los jugadores son impacientes y sólo tienen acceso a señales ruidosas del comportamiento pasado; contribuciones tempranas destacadas incluyen Green y Porter (1984) y Abreu, Pearce y Stacchetti (1990). Las contribuciones relacionadas más recientes se ocupan de jugadores que viven por largos períodos, así como el monitoreo imperfecto tanto público como privado.<sup>24</sup> También existe una literatura sobre cooperación en juegos repetidos *finitamente*, es decir, cuando el juego-etapa  $G$  se repite un número finito de veces. Por ejemplo, Benoit y Krishna (1985) establecieron resultados similares al Teorema Folk para juegos repetidos con múltiples equilibrios de Nash cuando el horizonte de tiempo es finito, pero largo, y Kreps, Milgrom, Roberts y Wilson (1982) mostraron que si un dilema del prisionero es repetido un número suficiente de veces es necesaria sólo una pequeña cantidad de información incompleta respecto de los pagos para sostener la cooperación la mayoría del tiempo, a pesar de que el conflicto se desataría en el último par de rondas. Neymann (1999) mostró que la cooperación en un dilema del prisionero repetido finitamente es posible incluso bajo información completa cuando el horizonte temporal no es conocimiento común (ver más adelante para una breve discusión del conocimiento común en juegos). Otra contribución importante a la literatura sobre juegos repetidos es Axelrod (1984), cuyos torneos experimentales

---

<sup>23</sup> Para ver esto, sea  $\pi(p)$  la ganancia de la industria cuando todas las firmas establecen el mismo precio  $p$ , y asumamos que esta función es continua y unimodal con el máximo  $p = p_m$ . El perfil de estrategias descrito aquí constituye un equilibrio subjuego-perfecto si y sólo si  $1/n \pi(p_m) / (1 - d)$  excede (débilmente) a  $\pi(p)$  para todo  $p < p_m$ . La primera cantidad es el valor presente de la ganancia de la empresa si continúa estableciendo el precio colusivo  $p_m$ , mientras que  $\pi(p)$  es el valor presente de la ganancia de la empresa si socava el precio colusivo al establecer un precio  $p < p_m$  –tal empresa obtendrá cero ganancias en todos los períodos futuros puesto que todas las empresas establecerán sus precios subsecuentes al nivel del precio marginal. Por la continuidad de la función  $\pi$ , la desigualdad se mantiene si y sólo si  $d > 1 - 1/n$ . No existe incentivo para desviarse del castigo a un desviado, en caso de que ocurra una desviación, puesto que todas las ganancias se reducen a cero en cuanto cualquier empresa establece  $p = c$ .

<sup>24</sup> Ver Fudenberg y Levine (1994), Fudenberg, Levine y Maskin (1994), Kandori (2002), y Ely, Hörner y Olszewski (2005).

sugirieron que estrategias simples tales como “tit-for-tat” se desempeñan bien en poblaciones con jugadores con racionalidad limitada.

Todas estas ideas subsecuentes le deben mucho a la investigación innovativa y fundamental de Aumann. Al estudiar la cooperación entre agentes con intereses parcialmente en conflicto, ya sean empresas en un mercado capitalista –como en muchas de las primeras aplicaciones- o agricultores compartiendo un prado común o un sistema de irrigación –como en Ostrom (1990)- la teoría de juegos repetidos es ahora el paradigma de comparación.

La teoría de los juegos repetidos ayuda a explicar un amplio rango de descubrimientos empíricos, notablemente porqué es frecuentemente más difícil sostener la cooperación cuando hay muchos jugadores, cuando los jugadores interactúan infrecuentemente, cuando hay una alta probabilidad de que la interacción cese por razones exógenas, cuando el horizonte temporal es corto, y cuando el comportamiento de los otros es observado con un retraso. Las guerras de precios, guerras comerciales y otros conflictos económicos y sociales pueden ser atribuidos a uno o más de estos factores. El marco de los juegos repetidos también esclarece la existencia y funcionamiento de una variedad de instituciones, que van desde gremios comerciales (Greif, Milgrom y Weingast, 1994) y la Organización Mundial de Comercio (Maggi, 1999) a la mafia (Dixit, 2003).

**3.2. Otras contribuciones.** Aumann ha realizado numerosas contribuciones importantes a otros aspectos de la teoría de juegos y su aplicación a la economía. Aquí, sólo mencionamos unas pocas de ellas.

El conocimiento de los jugadores respecto de los conjuntos de estrategias, información y preferencias de los otros jugadores es de suma importancia para su elección de su curso de acción en el juego. Es entonces natural preguntarse: ¿Qué supuestos epistémicos implica el jugar el equilibrio por parte de jugadores racionales? Por largo tiempo, los teóricos del juego se mantuvieron en silencio acerca de esta pregunta fundamental, y los economistas desarrollaron análisis de equilibrio sin preocuparse demasiado al respecto, hasta que Aumann estableció la agenda de investigación llamada en ocasiones epistemología interactiva. En su artículo “Agreeing to disagree” (1976), Aumann introduce en la teoría de juegos el concepto de “conocimiento común”, un concepto definido en primera instancia por Lewis (1969). Un evento es *conocimiento común* entre los jugadores del juego si es conocido por todos los jugadores, si todos los jugadores saben que es conocido por todos los jugadores, si todos los jugadores saben que todos los

jugadores saben que es conocido por todos los jugadores etc., ad infinitum. A grandes rasgos, Aumann probó que si dos jugadores tienen conocimiento común acerca de la evaluación de probabilidad del otro respecto de algún evento, entonces estas evaluaciones deben ser idénticas. El “resultado de acuerdo” contra-intuitivo de Aumann ha tenido efectos considerables en el análisis teórico del comercio en mercados financieros; ver por ejemplo Milgrom y Stokey (1982).

En la década de 1980, Bernheim (1984) y Pearce (1984) mostraron que la racionalidad de los jugadores y su conocimiento común del juego y de la racionalidad de los otros no conduce, en general, a un equilibrio de Nash, ni siquiera en juegos con un único equilibrio de Nash. Una década después, Aumann y Bandenburger (1995) establecieron estrictas condiciones epistémicas suficientes para jugar equilibrios de Nash.

Como se mencionó anteriormente, Aumann definió el concepto de equilibrio fuerte, el cual es un refinamiento del equilibrio de Nash. En dos artículos, publicados en 1974 y 1987, él también definió otro concepto de solución que es más “áspero” que el equilibrio de Nash: el *equilibrio correlacionado*. A diferencia del equilibrio de Nash, el equilibrio correlacionado permite que las estrategias de los jugadores sean dependientes estadísticamente, y entonces el equilibrio de Nash emerge como el caso especial de independencia estadística. Tal correlación es posible si los jugadores pueden condicionar su elección de estrategia a variables aleatorias correlacionadas, tales como observaciones distintas pero relacionadas del clima, un evento noticioso, o alguna otra característica variable de su ambiente. En un equilibrio correlacionado, la elección condicionada de cada jugador es óptima, dadas las reglas de decisión de los otros.

El conjunto de resultados de equilibrio correlacionado de un juego de información completa también proporciona los límites de la cooperación cuando los jugadores pueden comunicarse libremente, posiblemente a través de un mediador imparcial, antes de elegir las estrategias en el juego subyacente. Cuando la variable aleatoria observada de cada jugador es una recomendación de un mediador imparcial, un equilibrio correlacionado es una colección de recomendaciones tal que ningún jugador puede incrementar su pago esperado mediante una desviación unilateral de su recomendación. En el juego de movilización discutido anteriormente (ver Tabla 1), se puede mostrar que existen equilibrios correlacionados en los cuales la guerra se evita completamente, mientras que el par de pagos de negociación  $(b, b)$  es alcanzado con probabilidad positiva. Para ver esto, suponga que un mediador recomienda a exactamente uno de los países el abstenerse de la movilización con igual probabilidad  $p$  para cada país, y les recomienda a ambos abstenerse

de la movilización con la probabilidad restante  $1 - 2p$ . Si  $p > 2b / (2b + a - c)$  cada país puede abstenerse de movilizarse si y sólo si recibe esta recomendación.<sup>25</sup> Para una discusión cuidadosa de la conexión entre el concepto de equilibrio correlacionado y el rol de la comunicación en los juegos, ver Myerson (1991, capítulo 6).

Aumann (1987) mostró que el equilibrio correlacionado puede ser visto como una extensión natural de la teoría de la decisión bayesiana a los juegos no cooperativos. En esta interpretación, los jugadores racionales (de acuerdo a la definición de racionalidad debida a Savage, 1954) jugarán un equilibrio correlacionado si su racionalidad y sus consideraciones previas son conocimiento común.

Aumann también realizó contribuciones notables a otras áreas de la economía; una es su trabajo conjunto con Frank J. Anscombe sobre teoría de la decisión (Anscombe y Aumann, 1963), otra es su modelo continuo de competencia perfecta (Aumann 1964, 1966), y una tercera es su trabajo conjunto con Mardecai Kurz y Abraham Neyman sobre aplicaciones de la teoría de juegos a la economía política (Aumann y Kurz, 1977, Aumann, Kurz y Neymann, 1983 y 1987).

#### 4. Lecturas Recomendadas

El trabajo de Thomas Schelling es asequible también para no especialistas y se recomienda consultar sus publicaciones originales. Los escritos de Aumann son altamente técnicos, pero generalmente contienen también discusiones fácilmente asequibles. Ver Aumann (1981) para una visión general de la literatura sobre juegos repetidos hasta ese entonces, y Aumann y Maschler (1995) para una discusión sobre el trabajo inicial sobre juegos con información incompleta. Para una introducción legible y casi enteramente no técnica, ver Dixit y Nelebuff (1991); este libro habla de la cooperación en el largo plazo en el capítulo 4 y compromisos creíbles en el capítulo 6. Para libros exhaustivos sobre teoría de juegos, ver Dixit y Skeath (2004) como texto introductorio y Fudenberg y Tirole (1991) y Myerson (1991) como exposiciones avanzadas y técnicas. Las visiones personales (no necesariamente actuales) de Schelling y de Aumann sobre la teoría de juegos, pueden ser encontradas en Aumann (1985) y Schelling (1967). Para mayores detalles bibliográficos y personales de los dos teóricos del juego, ver el retrato de Schelling de Zeckhauser (1989), y la entrevista de Hart (2005) con Aumann.

<sup>25</sup> Si un país no recibe una recomendación, entonces éste sabe que el otro país recibió una recomendación para abstenerse, en cuyo caso la movilización es óptima. Si un país recibe una recomendación, entonces el pago esperado de abstenerse de la movilización es  $pc + (1 - 2p)b$  y esto excede a  $pa$ , el pago esperado de la movilización.

## Bibliografía

- Abreu D., 1988, "On the theory of infinitely repeated games with discounting", *Econometrica* 56, 383-396.
- Abreu D., D. Pearce y E. Stacchetti, 1990, "Towards a theory of discounted repeated games with imperfect monitoring", *Econometrica* 58, 1041-1063.
- Abreu D., P. Dutta y L. Smith, 1994, "The Folk Theorem for repeated games: A NEU condition", *Econometrica* 62, 939-948.
- Admati A.R. y M. Perry, 1991, "Joint projects without commitment", *Review of Economic Studies* 58, 259-276.
- Anscombe F.J. y Aumann R.J., 1963, "A definition of subjective probability", *Annals of Mathematical Statistics* 34, 199-205.
- Aumann R.J., 1959, "Acceptable points in general cooperative  $n$ -person games", en R.D. Luce y A.W. Tucker (eds.), *Contributions to the Theory of Games IV*, *Annals of Mathematics Study* 40, 287-324, Princeton University Press, Princeton, NJ.
- \_\_\_\_\_, 1964, "Markets with a continuum of traders", *Econometrica* 32, 39-50.
- \_\_\_\_\_, 1966, "Existence of competitive equilibria in markets with a continuum of traders", *Econometrica* 34, 3-27.
- \_\_\_\_\_, 1974, "Subjectivity and correlation in randomized strategies", *Journal of Mathematical Economics* 1, 67-96.
- \_\_\_\_\_, 1976, "Agreeing to disagree", *The Annals of Statistics* 4, 1236-1239.
- \_\_\_\_\_, 1981, "Survey of repeated games", en *Essays in Game Theory and Mathematical Economics in Honor of Oskar Morgenstern*, p. 11-42, Wissenschaftsverlag, Mannheim.
- \_\_\_\_\_, 1985, "What is game theory trying to accomplish?" en K. Arrow y S. Honkapohja (eds.), *Frontiers of Economics*, Basil Blackwell, Oxford.
- \_\_\_\_\_, 1987, "Correlated equilibrium as an extension of Bayesian rationality", *Econometrica* 55, 1-18.

- Aumann R.J. y A. Brandenburger, 1995, "Epistemic conditions for Nash equilibrium", *Econometrica* 63, 1161-1180.
- Aumann R.J. y M. Kurz, 1977, "Power and taxes", *Econometrica* 45, 1137-1161.
- Aumann R.J., M. Kurz y A. Neymann, 1983, "Voting for public goods", *Review of Economic Studies* 677-694.
- \_\_\_\_\_, 1987, "Power and public goods", *Journal of Economic Theory* 42, 108-127.
- Aumann R.J. y M. Maschler, 1966, 1967, 1968, "Game theoretic aspects of gradual disarmament", "Repeated games with incomplete information: A survey of recent results", y "Repeated games of incomplete information, the zero-sum extensive case", Reports ST-80, 116 y 143, *Mathematica Inc.*, Princeton, NJ.
- Aumann R.J. y M. Maschler (con la colaboración de R. Stearns), 1995, *Repeated Games with Incomplete Information*, MIT Press.
- Aumann R.J., M. Maschler y R. Stearns, 1968, "Repeated games of incomplete information: an approach to the non-zero sum case", en Report of the U.S. Arms Control and Disarmament Agency ST-143, capítulo IV, 117-216.
- Aumann R.J. y L. Shapley, 1974, *Value of Non-Atomic Games*, Princeton University Press, Princeton, NJ.
- \_\_\_\_\_, 1976, "Long-term competition: A game-theoretic analysis", mimeo. Hebrew University. (Reimpreso en N. Meggido (ed.) (1994): *Essays in Game Theory in Honor of Michael Maschler*, 1-15, Springer Verlag, Berlin.
- Aumann R.J. y S. Sorin, 1989 "Cooperation and bounded recall", *Games and Economic Behavior* 1, 5-39.
- Axelrod R., 1984, *The Evolution of Cooperation*, Basic Books, New York.
- Baliga S. y T. Sjöström, 2004, "Arms races and negotiations", *Review of Economic Studies* 71, 351-369.
- Benoît J.-P. y V. Krishna, 1985, "Finitely repeated games", *Econometrica* 53, 890-904.



- Bernheim B.D., 1984, "*Rationalizable strategic behavior*", *Econometrica* 52, 1007-1028.
- Binmore K. y L. Samuelson, 2004, "*The evolution of focal points*", *Games and Economic Behavior*, por publicarse.
- Camerer C., 2003, *Behavioral Game Theory*, Princeton University Press, Princeton, NJ.
- Crawford V., 1982, "*A theory of disagreement in bargaining*", *Econometrica* 50, 607-637.
- Dixit A., 1980, "*The role of investment in entry deterrence*", *Economic Journal* 90, 95-106.
- \_\_\_\_\_, 2003, "*On modes of economic governance*", *Econometrica* 71, 449-481.
- Dixit A. y B. Nalebuff, 1991, *Thinking Strategically: The Competitive Edge in Business, Politics and Everyday Life*, W. W. Norton.
- Dixit A. y S. Skeath, 2004, *Games of Strategy*, 2da. ed., W. W. Norton, New York.
- Ely J., J. Hörner y W. Olszewski, 2005, "*Belief-free equilibria in repeated games*", *Econometrica* 73, 377-415.
- Friedman J., 1971, "*A non-cooperative equilibrium for supergames*", *Review of Economic Studies* 38, 1-12.
- Fudenberg D. y D. Levine, 1994, "*Efficiency and observability with long-run and short-run players*", *Journal of Economic Theory* 62, 103-135.
- Fudenberg D., D. Levine y E. Maskin, 1994, "*The Folk theorem with imperfect public information*", *Econometrica* 62, 997-1039.
- Fudenberg D. y E. Maskin, 1986, "*The Folk theorem for repeated games with discounting and with incomplete information*", *Econometrica* 54, 533-554.
- Fudenberg D. y J. Tirole, 1991, *Game Theory*, MIT Press.
- Gale D., 2001, "*Monotone games with positive spillovers*", *Games and Economic Behavior* 37, 295-320.

- Green E. y R. Porter, 1984, “*Noncooperative collusion under imperfect price information*”, *Econometrica* 52, 87-100.
- Greif A., P. Milgrom, y B.R. Weingast, 1994, “*Coordination, commitment and enforcement*”, *Journal of Political Economy* 102, 745-776.
- Güth W., K. Ritzberger y E. Van Damme, 2004, “*On the Nash bargaining solution with noise*”, *European Economic Review* 48, 697-713.
- Hart S., 2005, “*An interview with Robert Aumann*”, *Macroeconomic Dynamics*, por publicarse.
- Hobbes T., 1651, *The Leviathan*, Cambridge.
- Kandori M., 2002, “*Introduction to repeated games with imperfect monitoring*”, *Journal of Economic Theory* 102, 1-15.
- Kreps D., P. Milgrom, J. Roberts y R. Wilson, 1982, “*Rational cooperation in the finitely repeated prisoners’ dilemma*”, *Journal of Economic Theory* 27, 245-252.
- Lewis D., 1969, *Convention*, Harvard University Press, Cambridge MA.
- Lockwood B. y J.P. Thomas, 2002, “*Gradualism and irreversibility*”, *Review of Economic Studies* 69, 339-356.
- Luce D. y H. Raiffa, 1957, *Decisions and Games*. Wiley, New York.
- Maggi G., 1999, “*The role of multinational institutions in international trade cooperation*”, *American Economic Review* 89, 190-214.
- Marx L.M. y S.A. Matthews, 2000, “*Dynamic voluntary contribution to a public project*”, *Review of Economic Studies* 67, 327-358.
- Maynard Smith J., 1982, *Evolution and the Theory of Games*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Mehta J., C. Starmer y R. Sugden, 1994a, “*The nature of salience: An experimental investigation of pure coordination games*”, *American Economic Review* 84, 658-673.

- Mehta J., C. Starmer y R. Sugden, 1994b, "Focal points in pure coordination games: An experimental investigation", *Theory and Decision* 36, 163-185.
- Milgrom P. y N. Stokey, 1982, "Information, trade and common knowledge", *Journal of Economic Theory* 26, 177-227.
- Muthoo A., 1996, "A bargaining model based on the commitment tactic", *Journal of Economic Theory* 69, 134-152.
- Myerson R.B., 1991, *Game Theory: Analysis of Conflict*, Harvard University Press, Cambridge MA.
- Nash J., 1950a, "Equilibrium points in  $n$ -person games", *Proceedings of the National Academy of Sciences* 36, 48-49.
- \_\_\_\_\_, 1950b, "The bargaining problem", *Econometrica* 18, 155-162.
- \_\_\_\_\_, 1951, "Non-cooperative games", *Annals of Mathematics* 54, 286-295.
- \_\_\_\_\_, 1953, "Two-person cooperative games", *Econometrica* 21, 128-140.
- Neyman A., 1999, "Cooperation in repeated games when the number of stages is not commonly known", *Econometrica* 67, 45-64.
- Ostrom E., 1990, *Governing the Commons: The Evolution of Institutions for Collective Action*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Pearce D.G., 1984, "Rationalizable strategic behavior and the problem of perfection", *Econometrica* 52, 1029-1050.
- Phelps E. y R. Pollak, 1968, "On second-best national savings and game-theoretic growth", *Review of Economic Studies* 35, 201-208.
- Reiter D., 1995, "Exploding the power keg myth: Preemptive wars almost never happen", *International Security* 20, 5-34.
- Rogoff K., 1985, "The optimal degree of commitment to an intermediate monetary target", *Quarterly Journal of Economics* 100, 1169-1189.
- Rubinstein A., 1976, "Equilibrium in supergames", *Center for Mathematical Economics and Game Theory, Hebrew University* (Primera parte reimpressa)

en N. Meggido (ed.), 1994, *Essays in Game Theory in Honor of Michael Maschler*, 17-28, Springer Verlag, Berlin.

Rubinstein A., 1979, "*Equilibrium in supergames with the overtaking criterion*", *Journal of Economic Theory* 21, 1-9.

Savage L., 1954, *The Foundations of Statistics*, Dover, Mineola NY.

Schelling T.C., 1956, "*An essay on bargaining*", *American Economic Review* 46, 281-306.

\_\_\_\_\_, 1960, *The Strategy of Conflict*, Harvard University Press, Cambridge MA.

\_\_\_\_\_, 1966, *Arms and Influence*, Yale University Press, New Haven.

\_\_\_\_\_, 1967, "*What is game theory?*" en J.C. Charlesworth (ed.), *Contemporary Political Analysis*, Free Press, New York. (Reimpreso como cáp. 10 en Schelling, 1984.)

\_\_\_\_\_, 1971, "*Dynamic models of segregation*", *Journal of Mathematical Sociology* 1, 143-186.

\_\_\_\_\_, 1978, *Micromotives and Macrobehavior*, Harvard University Press, Cambridge MA.

\_\_\_\_\_, 1980, "*The intimate contest for self-command*", *The Public Interest* 60, 94-118.

\_\_\_\_\_, 1983, "*Ethics, law, and the exercise of self-command*", en S.M. McMurrin (ed.): *The Tannes Lectures on Human Values IV*, 43-79, University of Utah Press, Salt Lake City.

\_\_\_\_\_, 1984a, "*Self-command in practice, in policy, and in theory of rational choice*", *American Economic Review, Papers and Proceedings* 74, 1-11.

\_\_\_\_\_, 1984b, *Choice and Consequence*, Harvard University Press, Cambridge MA.

\_\_\_\_\_, 1992, "*Addictive drugs: The cigarette experience*", *Science* 255, 430-434.

- Schelling T.C. y M.H. Halperin, 1961, *Strategy and Arms Control*, Twentieth Century Fund, New York.
- Selten R., 1965, "Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfragerträgeit – Teil I: Bestimmung des dynamischen Preisgleichgewichts", *Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft* 121, 301-324.
- Selten R., 1975, "Re-examination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games", *International Journal of Game Theory* 4, 25-55.
- Snyder G.H. y P. Diesing, 1977, *Conflict among Nations: Bargaining, Decision Making, and System Structure in International Crises*, Princeton University Press.
- Spence M., 1977, "Entry, investment, and oligopolistic pricing", *Bell Journal of Economics* 8, 534-544.
- Stearns R., 1967, "A formal information concept for games with incomplete information", Report of the U.S. Arms Control and Disarmament Agency ST-116, capítulo IV, 405-433.
- Strotz R., 1956, "Myopia and inconsistency in dynamic utility maximization", *Review of Economic Studies* 23, 165-180.
- Zeckhauser R., 1989, "Distinguished fellow: Reflections on Thomas Schelling", *Journal of Economic Perspectives* 3, 153-164.
- Von Neumann J. y O. Morgenstern, 1944, *The Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton NJ.
- Wohlstetter A., 1959, "The delicate balance of terror", *Foreign Affairs* 37, 211-234.