



## Modelamiento matemático del acero líquido entrante a un contenedor en procesos de fundición tradicional

### Mathematical modeling of the liquid steel entering a container in ingot casting processes

JUBE CIRO PORTALATINO ZEVALLOS<sup>1</sup> Y MARCOS ZAMBRANO FERNÁNDEZ<sup>2</sup>

#### RESUMEN

En el presente trabajo es desarrollado un modelo matemático que involucra las ecuaciones de la mecánica de fluidos y la ecuación de energía para determinar el campo de temperatura del acero líquido ingresando a un contenedor para solidificarse, situación comúnmente encontrada en procesos de producción de acero en la actualidad. A través de técnicas matemáticas se obtiene una expresión simplificada de la ecuación de energía donde un parámetro no dimensional, conocido como el número de Peclet, permite determinar la relación entre el transporte del calor por convección a su transmisión por conducción en el interior del molde que contiene el acero en estado líquido. Usando el método de diferencias finitas el modelo matemático propuesto es resuelto numéricamente para visualizar el proceso de enfriamiento del acero líquido, desde el momento inicial hasta el inicio del proceso de solidificación. Asimismo, los cálculos numéricos son llevados a cabo mediante GNU-Octave, el cual es un entorno de programación para la computación científica, el cual permitió realizar la visualización de los resultados en diferentes tiempos del proceso.

**Palabras clave:** modelo matemático, ecuación de energía, el número de Peclet, proceso de enfriamiento.

<sup>1</sup>Universidad Nacional Santiago Antúnez de Mayolo. Huaraz, Perú.

<sup>2</sup>Universidad Nacional de Barranca. Lima, Perú.

©Los autores. Este artículo es publicado por la Revista Aporte Santiaguino de la Universidad Nacional Santiago Antúnez de Mayolo. Este es un artículo de acceso abierto, distribuido bajo los términos de la Licencia Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>), que permite: Compartir — copiar y redistribuir el material en cualquier medio o formato, Adaptar — remezclar, transformar y construir a partir del material para cualquier propósito, incluso comercialmente.

## ABSTRACT

In the present work, a mathematical model is developed which involves the equations of fluid mechanics and the energy equation to determine the temperature field of the liquid steel that enters a container to solidify, a situation commonly found in production processes of steel today. Using mathematical techniques, a simplified equation of the energy equation is obtained in which a non-dimensional parameter  $Pe$ , the Peclet number, allows to evaluate the transport of the heat by convection to the transmission by diffusion occurred in the mold that contains liquid steel. Using finite differences method, the mathematical model formulated is solved numerically to visualize the cooling process of the liquid steel, from the beginning until the solidification process starts. Likewise, the numerical computations are carried out using GNU-Octave, which is a platform to the scientific programming which allowed the visualization of the results obtained in different phases of the cooling process.

**Keywords:** mathematical model, energy equation, Peclet's number, cooling process.

## INTRODUCCION

Un aspecto fundamental en los procesos industriales para la producción de acero es la evaluación de la temperatura en el interior de un molde que contiene el acero líquido que ingresa continuamente y que al transcurrir el tiempo un proceso de enfriamiento acontece en su interior.

En la figura 1 podemos observar el mecanismo involucrado en el proceso industrial de la fabricación de acero, el cual en estado líquido, es suministrado desde el horno de cuchara y recorre un ducto conocido como canal de alimentación que está conectado a moldes estáticos que almacenan el acero líquido.

A medida que el acero líquido ingresa al molde, el volumen contenido en este va aumentando en su interior y formando una superficie ascendente llamada *menisco* mientras las paredes del molde extraen calor continuamente del acero líquido.

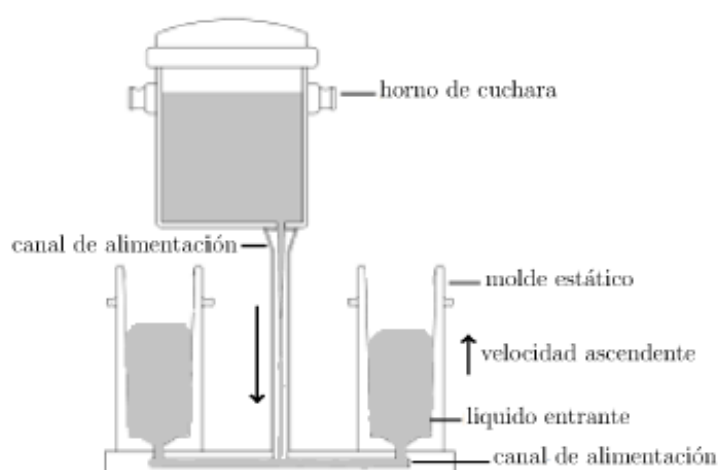


Figura 1: Esquema de un proceso industrial para el llenado de un molde.

Este proceso de enfriamiento ocurre primordialmente en las paredes del molde y está determinado por una transferencia de calor hacia el medio ambiente, razón por la cual el acero líquido se transforma en un bloque sólido cuando empieza el proceso de solidificación.

Vynnycky y co-investigadores (Vynnycky, 2015), abordaron el problema de llenar un molde con acero líquido para un proceso de solidificación teniendo en cuenta dos parámetros que son inicialmente prescritos: La temperatura inicial del acero líquido y su respectiva velocidad a la cual ingresan.

A través de técnicas matemáticas aplicadas a la ecuación de transferencia del calor determinada por el movimiento de un fluido (Tannenhill, 1997) es posible simplificar la ecuación de energía de forma que la componente vertical de la velocidad determine el cambio de la temperatura por convección (Vynnycky, 2015).

En el estado del arte, ya diversos autores han abordado el asunto del menisco como la frontera entre dos fluidos, siendo fundamental resaltar el trabajo presentado por Bikerman (Bikerman, 1970) que tiene en cuenta la tensión superficial entre los dos fluidos que están en contacto como acontece en el interior del molde que contiene el acero líquido.

Para construir el modelo que describa el proceso de enfriamiento del acero líquido es adecuado el empleo de las ecuaciones para el flujo del acero líquido pero debido a su

complejidad es conveniente llevar a cabo un análisis del problema a fin de simplificar las ecuaciones del flujo a través de técnicas de la matemática aplicada (Melink, 2017).

En el presente trabajo, como usualmente acontece en el modelamiento matemático; el problema es descrito por un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales (Brenner, 2016), en particular, está la ecuación de energía que describe la temperatura existente en el acero líquido en el interior del molde.

Un método para la solución de las ecuaciones diferenciales parciales que describen un problema relacionado con la ecuación de energía es el *Método de Diferencias Finitas* (Langtangen, 2017) debido a que es eficiente en problemas cuya geometría es rectangular como es el caso considerado en el presente artículo.

## MATERIALES Y METODOS

En el presente trabajo se ha considerado un molde de una altura  $L$  y ancho  $W$  al cual el acero líquido ingresa continuamente por debajo con una velocidad constante como se muestra en la figura 2. Además el flujo de calor que se extrae a través de las paredes del molde y permite el enfriamiento de su interior posee un valor constante mientras el acero líquido ingresa a una temperatura constante.

Inicialmente la superficie del fluido estará determinada por  $y = h_0(x)$ , donde  $y$  y  $x$  son las coordenadas horizontal y vertical respectivamente, de forma que al ingresar continuamente el fluido, la superficie del mismo estará descrita por  $y = h(x, t)$ , donde  $t$  denota el tiempo.

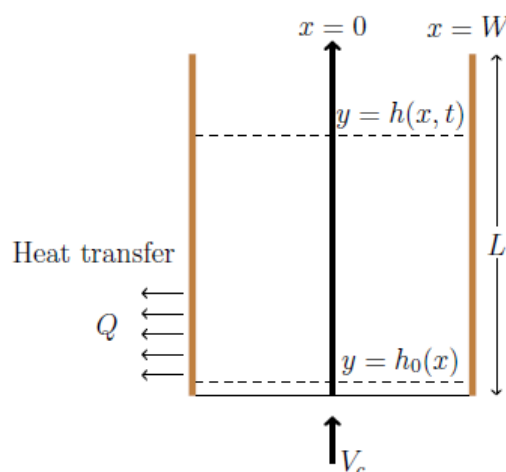


Figura 2: Ingreso del acero líquido con velocidad

Si denotamos  $u, v$  por las componentes horizontal y vertical de la velocidad del flujo del acero líquido entonces de las ecuaciones de Navier Stokes que describen el flujo del fluido constituido por el acero líquido se simplifican al asumirse de acuerdo a Vynnycky *et al.* (Vynnycky, 2015) de forma que

$$\mathbf{u} \sim \mathbf{0}, v \sim V_c \quad (1)$$

Para describir la temperatura  $T=T(x, y, t)$  en un punto  $(x,y)$  en el tiempo se empleará la ecuación de conservación de energía dada por

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

donde,  $\rho, c_p, k$  son la densidad, la capacidad calorífica y la conductividad térmica del acero líquido contenido en el molde.

Como se muestra en la figura 2, el proceso de enfriamiento se lleva a cabo mediante la extracción de calor a través de las paredes del molde, de esta forma tenemos que en la ecuación (2) la condición de frontera para  $x=W$  está dada por

$$k \frac{\partial T}{\partial x} = -Q \quad (3)$$

Para obtener el campo de temperatura de la región líquida que está cambiando con respecto al tiempo debido al ingreso continuo del acero líquido; el menisco determinado por la frontera entre el acero líquido y los gases por encima, está denotado por  $y=h(x,t)$  puede ser expresado mediante

$$h(x, t) = y_0 + V_c t \quad (4)$$

Ahora, usando la transformación dada por

$$X = \frac{x}{W}, Y = \frac{y}{h(x,t)}, \tau = \frac{V_c}{W} t, \theta = \frac{T - T_m}{T_c - T_m} \quad (5)$$

donde  $T_m$  es la temperatura a la cual el acero líquido cambia de estado, es decir, se transforma en acero sólido.

Tenemos que la ecuación (2) mediante la transformación (5) se reduce a

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \left( \frac{1-Y}{Y_0 + \tau} \right) \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{Pe} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{1}{(Y_0 + \tau)^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (6)$$

donde  $Pe$  denota el número de Peclet que está definido por

$$Pe = \frac{\rho c_p V_c W}{k} \quad (7)$$

Para resolver la ecuación (6), es necesario prescribir las condiciones de frontera dadas

por:  $\frac{\partial \theta}{\partial X} = 0$  para  $X=0$ ;  $\frac{\partial \theta}{\partial X} = -Q$  para donde

$$Q = \frac{QW}{k(T_c - T_m)}, \quad (8)$$

Así como  $\theta=1$  en  $Y=0$  y  $\frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0$  en  $Y=1$ .

Asimismo, tenemos que la condición inicial en  $\tau = 0$  está dada por  $\theta = 1$ .

Debido a que la temperatura cambia con respecto al tiempo por la extracción de calor a través de la pared del molde, es necesario el desarrollo de un esquema numérico para determinar la temperatura mediante la ecuación (6). Para el presente artículo se ha implementado un esquema de diferencias finitas de tiempo implícito (Burden, 2010) para lo cual los términos convectivo y difusivo ha sido considerados.

Mediante este esquema es posible la programación computacional en lenguajes de computación científica que permite obtener la solución de la ecuación (6) como los lenguajes Fortran (Chivers, 2015) y C\C++ (Deitel, 2014; Savitch 2015) que son en la actualidad bastante conocidos y usados para la programación computacional de ecuaciones diferenciales. En el presente trabajo se ha utilizado el lenguaje de computación científica GNU-Octave (Eaton, 2020) que esta basado en los lenguajes Fortran y C\C++ y ha servido de base para la construcción de programas que permiten

resolver ecuaciones diferenciales y teniendo en cuenta además que GNU-Octave es software libre y puede obtenerse de forma gratuita.

## RESULTADOS

Para determinar el valor del número de la ecuación (7) se ha utilizado los valores numéricos mostrados en la tabla 1.

**Tabla 1:** Valores numéricos para el cálculo del número de Peclet.

Símbolo	Valor numerico	Unidad
	8000	Kg m <sup>-3</sup>
	500	J kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>
	20	W m <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>
	0,0067	N s m <sup>-2</sup>
	0,1	m
	0,01	m s <sup>-1</sup>

De acuerdo a la transformación definida en la ecuación (5) se ha considerado una región dada por el cuadrado [0,1]x[0,1] donde  $Y=1$  representa al menisco que físicamente representa la frontera del acero líquido y el medio ambiente.

Con todo ello se ha obtenido la solución numérica de la ecuación (6) como se muestra en la figura 3 en donde se puede apreciar el campo de temperatura  $\theta(X, Y, \tau)$  cuando  $\tau = 3,5$  y la temperatura va descendiendo en la frontera dada por donde se sitúa la pared del molde.

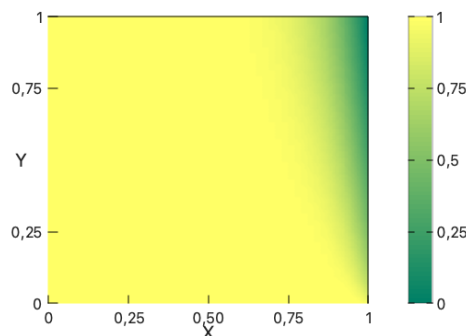
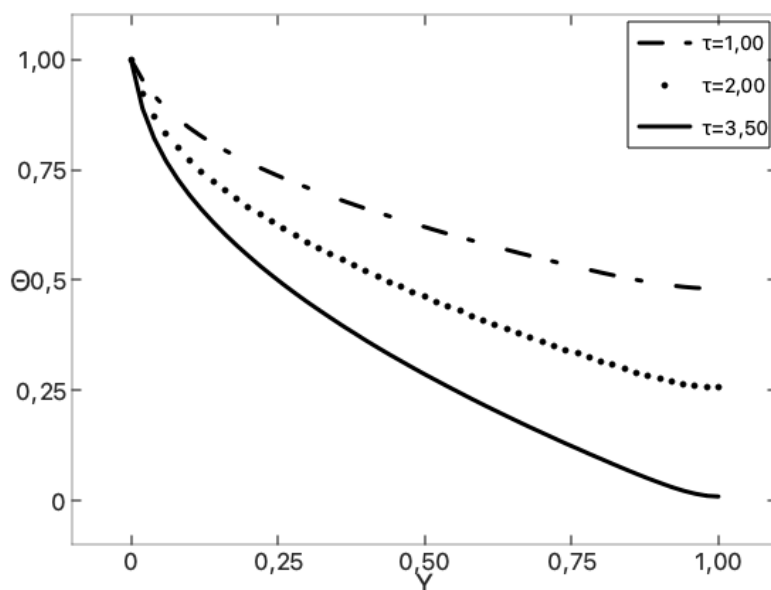


Figura 3: Valores numéricos de  $\theta$  en  $\tau = 3,5$  como resultado de la solución de la ecuación (6).

De acuerdo a la condición de frontera prescrita en de este proceso de enfriamiento que ha iniciado en se ve reflejado de forma más notoria que corresponde a la parte de la región del acero líquido determinada por el menisco.

En la figura 4, son mostrados los valores de la temperatura adyacente a la pared del molde para diferentes valores de , como son , y obtenidos mediante la solución de la ecuación (6). Estos valores indican una disminución de la temperatura al pasar el tiempo



desde  $\theta = 1$  en  $\tau$  hasta  $\theta = 0$  en  $\tau = 3,5$ .

Figura 4: Valores  $\theta$   $x=1$   $\tau=1,0$ ,  $\tau=2,0$ , y  $\tau=3,5$ .

En la figura 5, la solución numérica de  $\theta$  en  $Y=1$  para los valores de  $\tau$ :  $\tau=1$ ,  $\tau=2$  y  $\tau=3,5$  son mostrados. Estos corresponden a la frontera entre el acero líquido y medio ambiente determinada por el menisco. Esta frontera que esta continuamente en movimiento debido al ingreso constante del líquido metálico es considerado como una interfaz cuyo perfil es en general constante y plano.



En la misma figura 5, puede corroborarse además que el proceso de solidificación empieza en en .

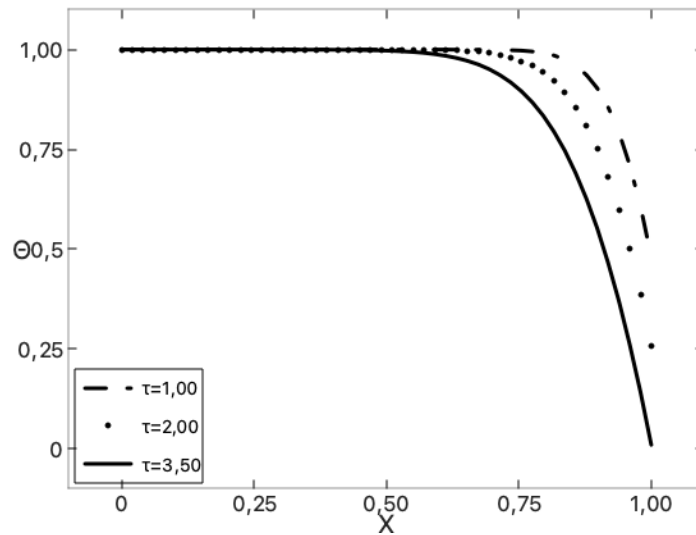


Figura 5: Valores de la temperatura en la interfaz para  $\tau=1,0$ ,  $\tau=2,0$  y  $\tau=3,5$  .

## DISCUSION

Vynnycky *et al.* (Vynnycky, 2015) mostraron que a lo largo del menisco el proceso de solidificación tienen lugar inicialmente debido a una mayor extracción del flujo de calor a través de las paredes del molde, lo cual en el presente artículo también es confirmado como muestran los resultados que se presentan en las figuras (3)-(5) en donde la magnitud  $\tau$  determina la temperatura en coordenadas no dimensionales con  $X$  indica el inicio del proceso de solidificación. Este proceso de enfriamiento también investigado por Tomono *et al.* (Tomono, 1981) tiene la configuración presentada en el presente artículo y está basada en procesos frecuentemente empleados en la industria de producción del acero en donde el acero en estado líquido ingresa por un ducto colocado en la parte inferior.

Es importante señalar que en  $\tau=3,5$  el proceso de solidificación se lleva a cabo iniciando por las paredes del molde, el cual ya se encuentra completamente lleno del acero en estado líquido, Lo cual también confirma los resultados mostrados por Vynnycky *et al.* (Vynnycky, 2015).

Asimismo, podemos observar en la figura 3 que los mayores valores numéricos de la temperatura se encuentran alrededor de  $(X=0, Y=0)$  que corresponde al eje de simetría y la entrada del acero líquido, desde donde el proceso de difusión y convección se inicia por Tannenhill (Tannenhill, 1997).

Aunque es usual en problemas cuya frontera cambia de posición, emplear la técnica ALE - Arbitrary Lagrangian Eulerian como es explicado por Dona *et al.* (Donea, 2004), en el presente artículo, la frontera entre el acero líquido y los gases por encima ha sido fijada mediante la transformación dada en las ecuaciones (5) de forma que ahora  $0 \leq Y \leq 1$  lo que equivale en coordenadas dimensionales a  $0 \leq y \leq h(x,t)$ , de esta forma se mantiene fija la frontera y la ecuación diferencial puede resolverse en el cuadrado .

El número de Peclet dado en la ecuación (7) resulta ser de importancia fundamental debido a su incremento implica que la parte difusiva de la ecuación (6) desaparece lo cual fue mostrado por Vynnycky *et al.* (Vynnycky, 2015) y es confirmado en la investigación cuando se analiza la región alrededor del centro de simetría como ha sido mostrado en la figura 3.

## CONCLUSIONES

El modelamiento matemático del proceso de enfriamiento del acero líquido existente en el molde ha sido expresado mediante la ecuación de energía sujeta a condiciones de frontera que muestran explícitamente la extracción de calor a través de las paredes, de esto, se ha podido verificar que este proceso de enfriamiento con valores de decrecientes en el tiempo y que conducen a la posterior solidificación del acero líquido cuando  $\theta=0$ .

El método de diferencias finitas utilizado para la construcción de esquemas numéricos han permitido la implementación de un programa computacional para obtener la solución de la ecuación (6) a fin de determinar la temperatura del acero líquido en el interior del molde.

El lenguaje de computación científica GNU-Octave mediante la implementación computacional ha permitido además de la obtención de la solución numérica de la ecuación (6), la visualización del campo de temperatura de la región que contiene el acero líquido como se ha mostrado en la figuras (3)-(5) ilustrando el efecto de la transferencia del flujo de calor a través de la pared del molde.

La solución numérica de la ecuación (6) muestra en los resultados que las menores temperaturas se encuentran en la región adyacente a la pared del molde, así como en la frontera entre el acero líquido y el medio ambiente, asimismo, la región donde se encuentra la mínima temperatura reside en el borde derecho del menisco.

### REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bikerman, J. 1970. *Physical Surfaces*. New York: Academic Press. <<https://www.amazon.com/Physical-Surfaces-J-Bikerman/dp/0124053858>>
- Brenner, S. 2016. *Topics in Numerical Partial Differential Equations and Scientific Computing*, New York: Springer. <doi:<https://www.springer.com/gp/book/10.1007/978-1-4939-6399-7>>
- Burden R.; Faires J. 2015. *Numerical Analysis*. Boston: Brooks/Cole.. <<https://www.amazon.com/Numerical-Analysis-Richard-L-Burden/dp/1305253663>>
- Chivers, I.; Sleightholne, J. 2018. *Introduction to Programming with Fortran*, Suiza: Springer.<<https://www.springer.com/gp/book/9783319755014> >
- Deitel, P.; Deitel, H. 2010. *C++ How to Program*, New Jersey: Pearson. <<https://www.amazon.com/How-Program-10th-Paul-Deitel/dp/0134448235> >
- Donea, J; Huerta, A; Ponthot, J.; Rodriguez-Ferran, A. 2004. *Arbitrary Lagrangian-Eulerian Methods*. New York: Wiley Online Library. <<https://doi.org/10.1002/0470091355.ecm009>>
- Eaton, W; Bateman, D; Hauberg, S.; Wehbring, R. 2020. GNU Octave - Free Your Numbers. 6ta Edición. Boston: Free Software Foundation. <<https://octave.org/octave.pdf> >
- Langtangen, H.; Linge, S. 2017. *Finite Difference Computing with PDEs*, Switzerland: Springer.<<https://www.springer.com/gp/book/9783319554556> >
- Melink, R.; Makrov, R.; Belair, J. 2017. *Recent Progress and Modern Challenges in Applied Mathematics, Modeling and Computational Science*, Switzerland: Springer

Science.<<https://www.springer.com/gp/book/9781493969685> >

Savitch, W. 2009. *Problem Solving with C++*. Boston: Pearson Education Inc. <<https://www.amazon.com/Problem-Solving-9th-Walter-Savitch/dp/0133591743>>

Tannenhill, J; Anderson, D; Pletcher, R. 1997. *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*. Washington, DC: Taylor & Francis.<<https://www.amazon.com/Computational-Fluid-Mechanics-Heat-Transfer/dp/B0086HWIKE> >

Tomono, H; Kurz, W; Heinemann, W. 1981. «The liquid steel meniscus in molds and its relevance to the surface quality of casting». *Metal. Mater. Trans. B* 12B. 409-411. <<https://doi.org/10.1007/BF02654475>>

Vynnycky, M.; Zambrano, M; Cuminato, J. 2015. «On the avoidance of ripple marks on cast metal surfaces». *Int. J. Heat Mass Transfer*. 86. 43-54. <<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.02.063>>

Recepción: 15/09/21

Aceptación: 28/10/21

### **Correspondencia**

Jube Ciro Portalatino Zevallos

[jubeportalatino@gmail.com](mailto:jubeportalatino@gmail.com)