Juegos y rarezas matemáticas

Matemáticas védicas

Vedic Mathematics

Santiago Higuera de Frutos

Revista de Investigación

Volumen XII, Número 1, pp. 171–183, ISSN 2174-0410
Recepción: 1 Oct'21; Aceptación: 20 Nov'21

1 de abril de 2022

Resumen

En 1965 se publicó el libro «*Vedic Mathematics*», de Bharati Krishna, con una recopilación de procedimientos que permiten la realización de cálculos aritméticos de manera mental, sin lápiz ni papel. El autor afirma que se trata de una recopilación de los métodos matemáticos descritos en los antiguos *Vedas*. Hay serias dudas acerca de la veracidad de dicha afirmación, pero los procedimientos descritos en el libro ofrecen una herramienta valiosa que puede favorecer el aprendizaje de las matemáticas entre los más pequeños. En este artículo se explican los fundamentos de algunos de estos algoritmos matemáticos.

Palabras Clave: Matemáticas védicas, Cálculo mental, Cálculo aritmético

Abstract

In 1965, the book «Vedic Mathematics», by Bharati Krishna, was published with a compilation of procedures that allow arithmetic calculations to be carried out mentally, without pencil or paper. The author claims that it is a compilation of the mathematical methods described in the ancient *Vedas*. There are serious doubts about the veracity of this statement, but the procedures described in the book offer a valuable tool that can favour the learning of mathematics among the little ones. This article explains the fundamentals of some of these mathematical algorithms.

Keywords: Vedic Mathematics, Mental arithmetic, mental calculation.

1. Introducción

Sri Bharati Krishna Tirthaji fue un monje hindú que vivió en India entre 1884 y 1960. Sus conocimientos de sánscrito le permitieron estudiar en profundidad los «Vedas», los antiguos textos sagrados del hinduismo. En 1965, cinco años después de su muerte, se publicó su libro «Matemáticas Védicas» [1]. Bharati Krishna afirmaba haber redescubierto el antiguo método matemático de los Vedas a partir los escritos originales en sanscrito. Afirmaba que el sistema estaba basado en dieciseis *sutras*, o fórmulas matemáticas, que abarcan todas las ramas de las matemáticas puras y aplicadas.

El libro de Bharati Krishna describe diversos procedimientos para realizar operaciones aritméticas que facilitan la utilización de cálculos mentales, sin utilizar lápiz y papel. El método se podría comparar a otros existentes, como el método Trachtenberg [2], los descritos por Meyer [3] y los señalados por Stigler [4].

En el prefacio del libro de Bharati Krishna, el propio editor alude a las dudas acerca de la veracidad de que los métodos de cálculo descritos provengan realmente de los Vedas. S. G. Dani, profesor en el Indian Institute of Technology de Bombay, asegura que no hay evidencias científicas de que los métodos descritos por Bharati Krishna fueran conocidos en la época mencionada de los Vedas (entre 200 y 800 A.C) e incluso señala que algunos de los procedimientos matemáticos descritos se basan en conceptos posteriores que no eran conocidos en esa época. No obstante, considera que se trata de un trabajo de gran valor, producto de los conocimientos matemáticos de Bharati Krishna y de su dilatada experiencia en la experimentación con números [5].

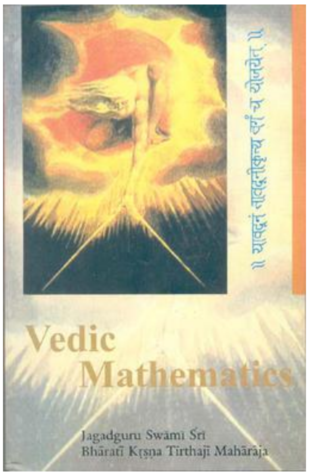


Figura 1. Portada de la edición actual del libro Vedic Mathematics de Sri Bharati Krisna

Alex Bellos, en su libro «*Alex's adventures in numberland*» [6], menciona haber encontrado algunos de los procedimientos de cálculo de Bharati Krishna en el libro de Fibonacci «*Liber Abaci*» [7], por ejemplo el correspondiente al sutra «*En vertical y cruzando*». Es claro que algunos de los artificios matemáticos descritos en el libro de Bharati ya eran comunes en Europa durante el renacimiento. Lo que no se sabe es si estos métodos procedían de India. Conviene recordar que el libro de Fibonacci fue el primero que recogió en Europa el sistema de numeración indo-arábigo.

Al margen de la veracidad o no de que los métodos de cálculo descritos procedan de la antigüedad, o sean una recopilación de procedimientos de cálculo mental realizada por el autor, hay que destacar el valor que pueden aportar para enseñar matemáticas a los niños. El propio Bharati Krishna menciona este asunto en el prólogo de su libro.

Nacho Ruíz destaca algunas de las ventajas que aportan los métodos de cálculo aritmético de las Matemáticas Védicas, frente a los métodos tradicionales [8]:

1. Sencillez: son fáciles de enseñar y de aprender
2. Flexibilidad: se pueden utilizar métodos diferentes para hacer las mismas cosas
3. La unión de sencillez y flexibilidad favorece la creatividad de los alumnos, que pueden desarrollar sus propios métodos de resolución de los problemas
4. Las operaciones se resuelven en una sola línea, lo que permite la realización de los cálculos de manera mental, sin lápiz ni papel, favoreciendo el desarrollo de la memoria y la agilidad y capacidad mental

En los años posteriores a la publicación del libro de Bharati Krishna, diversos matemáticos han profundizado y desarrollado los métodos védicos. Si bien las principales aplicaciones tienen que ver con las operaciones aritméticas (suma, resta, multiplicación, división, exponenciación y extracción de raíces), existen aplicaciones a la trigonometría, la geometría, la derivación, la integración y la resolución de sistemas de ecuaciones, entre otras [9; 10].

Existen algunos intentos de utilizar la algoritmia de los procedimientos de cálculo de las matemáticas védicas para su aplicación a cálculos con ordenador. Algunos autores afirman que la implementación de las técnicas de las matemáticas védicas en la arquitectura de alguno de los componentes de los procesadores aumenta la velocidad en las operaciones y reduce el tamaño de los mismos [11; 12; 13; 14]. También se han desarrollado filtros para el tratamiento de señales [15].

Los métodos védicos son interesantes y les resultarán divertidos a los amantes de la aritmética. Se trata de técnicas operativas que se pueden aplicar para la realización de cálculos mentales, como gimnasia del cerebro o como métodos para constatar algunas propiedades de los números enteros. Los métodos más sencillos pueden ayudar a motivar a los más pequeños en el aprendizaje de las matemáticas. Permiten la utilización de diferentes procedimientos para la resolución de las operaciones, y ello favorece la utilización de la competición y el juego a la hora de practicar la aritmética.

El objetivo de este artículo es dar a conocer el método védico a las personas que no lo conocen. A modo de muestra, en los siguientes apartados se explicarán algunas de las técnicas que se pueden utilizar para realizar algunas operaciones aritméticas. El lector interesado en profundizar más sobre las matemáticas védicas encontrará en el libro «Multiplica como nadie» de Nacho Ruíz una buena introducción [8]. También son muy interesantes y se han utilizado en la preparación de este artículo las referencias [9; 10; 16; 17].

2. Multiplicaciones de números de dos cifras

Los números de dos cifras van desde el número 10 hasta el número 99. El producto de dos de estos números estará comprendido entre 100 y 9801. El resultado de estas multiplicaciones será siempre un número de 3 o de 4 cifras. Sea a la primera cifra del primer operando y b su segunda cifra. Esto es, el primer operando será el número ab, donde a y b son sus dos cifras y cada una de ellas puede valer: $0, 1, 2..,9$. Análogamente, sean c y d las dos cifras que componen el segundo operando, cd. Si se realiza la multiplicación con el algoritmo tradicional, las operaciones que hay que realizar son las siguientes:

$$ab \times cd = d \times b + d \times a \times 10 + c \times b \times 10 + c \times a \times 100$$

Por ejemplo, si los operandos fueran 32 y 74, su producto sería:

$$32 \times 74 = (4 \times 2 + 4 \times 3 \times 10) + (7 \times 2 \times 10 + 7 \times 3 \times 100) = 128 + 2240 = 2368$$

Se puede ver que hay que hacer cuatro productos de dos cifras y luego sumar un número que puede tener 2 o 3 cifras con otro que puede tener 3 o 4 cifras. Las multiplicaciones por 10 o por 100 realmente no se hacen, van sobreentendidas por la forma en que se colocan los números al operar el algoritmo. En la parte izquierda de la figura 2 se muestra el algoritmo tradicional para esta operación.

Reordenando las operaciones individuales, el resultado de la multiplicación de $ab \times cd$ se puede calcular de la siguiente manera:

$$ab \times cd = a \times c \times 100 + (a \times d + b \times c) \times 10 + b \times d$$

Para el mismo ejemplo anterior, su producto sería:

$$32 \times 74 = 3 \times 7 \times 100 + (3 \times 4 + 2 \times 7) \times 10 + 2 \times 4 = 2100 + 260 + 8 = 2368$$

El esquema que hay que seguir para realizar la operación es el de la parte derecha de la figura 2, que en la literatura sobre matemáticas védicas se asocia al sutra «*En vertical y cruzando*».

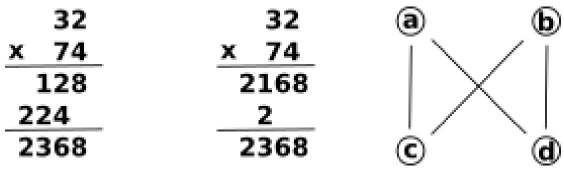


Figura 2. Izda: algoritmo tradicional para multiplicar dos números de dos cifras. Centro: algoritmo védico. Dcha: esquema de la operación realizada según el sutra «en vertical y cruzando»

Esta forma de organizar la operación tiene la ventaja de que se pueden ir calculando las cifras del resultado de manera individual, con lo que se facilita realizar la operación en la cabeza, sin utilizar lápiz y papel. Además, las cifras del resultado se pueden calcular operando de izquierda a derecha o de derecha a izquierda. La manera de proceder para calcular las cifras del resultado es la siguiente:

- Lado izquierdo: $a \times c$.
- Cifra central: $a \times d + b \times c$. Si el resultado de esta operación es mayor que 9, las decenas resultantes hay que sumárselas a la cifra izquierda dejando como cifra central del resultado solo las unidades
- Cifra derecha: $b \times d$. Como antes, si el resultado fuera mayor que 9, las decenas se sumaran a la cifra central. Si como consecuencia de ello, la cifra central pasara de 9, las decenas se pasarán al lado izquierdo.

En la descripción anterior se ha puesto «lado izquierdo» pues, según la operación concreta, podrá constar de 1 o de 2 cifras. La parte central de la figura 2 muestra cómo se podría organizar el algoritmo si se hace con lápiz y papel. Se ha calculado primero 7×3, y se ha escrito 21. A continuación se ha calculado $3 \times 4 + 7 \times 2$, que da 26, escribiendo el 2 debajo del 1 del resultado anterior. Por último, se ha calculado 4×2, escribiendo el 8 en su lugar. La suma muestra el resultado final.

Resulta más difícil explicarlo con palabras que hacerlo siguiendo el esquema de la parte derecha de la figura 2. Al principio se puede practicar utilizando lápiz y papel, pero es fácil ejercitarse a hacerlo de cabeza. A algunas personas, al hacerlo de cabeza, les resulta más sencillo calcular primero la cifra central, y luego el resto. Al principio puede parecer más sencillo operar de derecha a izquierda, pero con un poco de práctica, se opera mejor de izquierda a derecha.

3. Multiplicación de números de 3 cifras

Los números de tres cifras van desde el 100 hasta el 999. El resultado de multiplicar dos números de tres cifras estará comprendido entre 10000 y 998001, con lo que tendrá 5 o 6 cifras. El esquema para realizar la operación según el método védico es el de la parte izquierda de la figura 3. Como en el caso de los productos de números de dos cifras, al operar con lápiz y papel se irán escribiendo las cifras individuales del resultado en una línea, pudiendo operar de izquierda a derecha o de derecha a izquierda. En la parte derecha de la figura 3 se puede ver la aplicación a un caso concreto.

Con tres cifras, operar de cabeza es más complicado, pero con un poco de práctica también se pueden obtener buenos resultados. En cualquier caso, si se hace con lápiz y papel, resulta bastante más sencillo que el algoritmo tradicional.

Un caso particular es el de tener que multiplicar un número de 3 cifras por uno de 2 cifras. En ese caso, se opera como indica la figura 4. Se omite el cálculo de la cifra central. Las cifras del

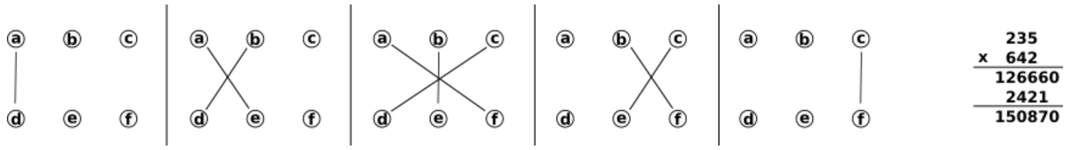


Figura 3. Izda: esquema védico para el producto de dos números de tres cifras. Dcha: aplicación a un caso concreto y forma de operar con lápiz y papel

lado izquierdo se calculan alineando el número de dos cifras al lado izquierdo y utilizando los dos esquemas de productos de la izquierda. Las cifras del lado derecho se calculan alineando el número de dos cifras al lado derecho y operando con los dos esquemas de la derecha del método general.

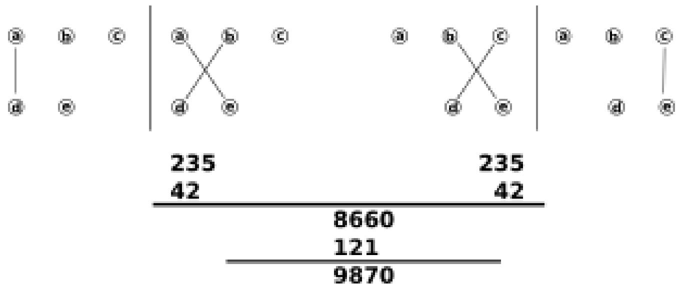


Figura 4. Esquema védico para el producto de un número de tres cifras por uno de dos cifras

Aunque el método descrito para calcular el producto de un numero de 2 cifras por uno de 3 cifras es sencillo, también se podría utilizar el método general para números de 3 cifras, poniendo un cero delante del número de 2 cifras para convertirlo en un número de 3 cifras.

4. Multiplicación de números de cuatro cifras

Los números de cuatro cifras son los comprendidos entre el 1000 y el 9999. El producto de dos de estos números estará comprendido entre 1000000 y 99980001. Por tanto, estos resultados siempre tendrán 7 u 8 cifras. El esquema para realizar la multiplicación es el de la figura 5, donde se indica cómo calcular las siete cifras. La octava, de haberla, se obtendrá cuando la cifra de la izquierda sea mayor que 9.

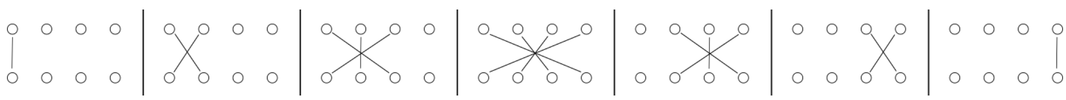


Figura 5. Esquema védico para el producto de dos números de cuatro cifras

El esquema puede parecer complicado, pero la operación que resulta es más sencilla de realizar que con el algoritmo tradicional. En la parte izquierda de la figura 6 se muestra la operación para un caso concreto utilizando el algoritmo tradicional; en la parte derecha de la figura se muestra la misma operación realizada con el esquema védico.

```
      6545
x     3278
     52360
    45815
   13090
  19635
  21454510
```

```
6545 x 3278
 18746870
   260764
   1
 21454510
```

Figura 6. Izda: multiplicación tradicional de dos números de cuatro cifras. Dcha: multiplicación de dos números de cuatro cifras utilizando el algoritmo védico

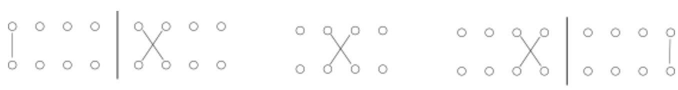
Una vez más, el algoritmo védico, además de ser más sencillo, permite realizar la operación en menos líneas y operando de izquierda a derecha o de derecha a izquierda. Si se realiza un conteo de las operaciones individuales de cada algoritmo, en ambos casos se realizan 16 productos de dos números de una cifra, 2 sumas de una cifra, 2 sumas de dos cifras y 2 sumas de tres cifras. Pero mientras que en el algoritmo tradicional hay que realizar 2 sumas de cuatro cifras, en el algoritmo védico se realiza una sola de esas sumas.

El caso particular de la multiplicación de un número de 4 cifras por uno de 3 cifras se muestra en la figura 7. Como se hacía en el apartado anterior al multiplicar un número de 3 cifras por uno de 2 cifras, hay que ir desplazando el número de menos cifras y utilizar solo una parte de los esquemas de multiplicación. Algo similar sucede al multiplicar un número de 4 cifras por uno de 2 cifras. En la figura 8 se muestra un ejemplo resuelto, indicando los esquemas de operaiones que hay que realizar en cada desplazamiento del número de 2 cifras.

```
6545                      6545
237                         237

        6545 x 237
         1285735
          26543
         1551165
```

Figura 7. Esquema védico para el producto de un número de cuatro cifras por uno de tres cifras



```
2368        2368        2368
32            32          32

        2368 x 32
         63466
         1231
         75776
```

Figura 8. Esquema védico para el producto de un número de cuatro cifras por uno de dos cifras

En cualquier caso, se podrían añadir ceros delante de los números con menos cifras y utilizar el esquema general de cálculo.

5. Realización de restas

Existe un método general para la realización de cualquier tipo de resta, que puede ser muy didáctico para practicar con los más pequeños. Para un adulto que sepa restar por el método tradicional, seguramente no aporta muchas ventajas. Se puede consultar la referencia [9] para aprender su funcionamiento. Aquí solo se va a describir cómo realizar determinados tipos concretos de restas, que permiten su realización de cabeza de manera sencilla, y que resuelven problemas habituales en la vida cotidiana.

En la literatura sobre matemáticas védicas se denominan «bases primarias» a los números múltiplos de 10, por ejemplo, $10, 100, 1000, \ldots$. Se denominan «bases de trabajo» o también «bases secundarias», a los números acabados en 0 que no son potencia exacta de 10, por ejemplo $50, 250, 500, \ldots$.

Se va a explicar cómo restar un número de una base. Para ello, los libros sobre matemáticas védicas dicen que se utiliza el sutra «*todos de nueve y el último de diez*», por el motivo que quedará claro a continuación.

Supóngase que se quiere realizar la resta $100 - 17$. El resultado se obtiene, de izquierda a derecha, restando cada cifra del sustraendo (17) de 9, excepto la última que se restará de 10. En el ejemplo indicado, el resultado de la resta será 83 (Se ha hecho de izquierda a derecha $9 - 1$ y $10 - 7$). La figura 9 muestra el esquema de la operación aplicado a otro caso concreto.

Para que funcione el método, el número de cifras del sustraendo tiene que ser igual que el número de ceros de la base. Si tuviera menos, se completará a la izquierda con ceros. Por ejemplo, $1000 - 17 = 1000 - 017 = 983$.

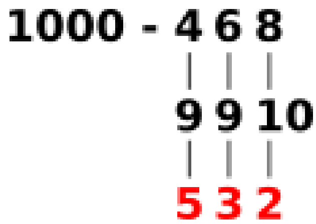


Figura 9. Ejemplo de resta de izquierda a derecha con el método «Todos de nueve y el último de diez»

Se puede utilizar como minuendo una base que no sea primaria. Por ejemplo, si se quisiera hacer la resta $5000 - 248$, se podría descomponer (mentalmente) en $4000 + (1000 - 248)$, lo que equivale a restar de 1000 y poner a la izquierda del resultado una unidad menos que la base, esto es: $5000 - 248 = 4752$.

Si el sustraendo tuviera el mismo número de cifras que el minuendo, habría que ajustar la cifra de la izquierda de acuerdo a la operación concreta, por ejemplo, $3000 - 1732 = (2000 - 1000) + (1000 - 732) = 1268$

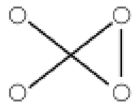
Si el número que hay que restar acaba en cero, se hace la resta quitando el último cero a la base y al sustraendo y se añade un cero al resultado: $100 - 30 \rightarrow 10 - 3 = 7 \rightarrow 70$.

El lector puede comprobar lo sencillo que resulta hacer las operaciones de cabeza. Puede ser de utilidad para calcular «las vueltas» de pequeñas compras. Por ejemplo, para calcular cuánto dinero se debe devolver al pagar con un billete de 20 euros una compra de 6,45 euros, se puede hacer $2000 - 645 = 1355 \rightarrow 13{,}55$ euros.

6. Multiplicación de números próximos a una base

Se va a explicar un procedimiento sencillo para multiplicar de cabeza dos números que se encuentren cercanos a una base primaria. En la figura 10 se muestra el esquema de lo que se va a explicar a continuación.

Supóngase que se quiere multiplicar 12×14. Son números próximos a la base 10. El procedimiento consiste en formar un cuadro, poniendo a la derecha de cada número su diferencia con la base, con su signo. La parte izquierda del resultado se obtiene sumando uno de los números con la diferencia a la base del otro. Da igual cuál de los dos operandos se escoja, el resultado es el mismo. En el ejemplo, la parte izquierda del resultado sería $12 + 4 = 14 + 2 = 16$. La parte derecha del resultado se obtendrá multiplicando con su signo la columna de las diferencias. En el ejemplo, la parte derecha del resultado sería $2 \times 4 = 8$. Al juntar la parte izquierda y la parte derecha se obtiene el resultado de la multiplicación, en este caso 168.



$$\begin{array}{rcr} 12 & & +2 \\ 14 & & +4 \\ \hline 16 & / & 8 \\ & 168 & \end{array}$$

Figura 10. Ejemplo de multiplicación de dos números próximos a una base

Un caso particular sería cuando el producto para obtener la parte derecha de un número mayor que 9. En ese caso, las decenas se añadirán a la parte derecha. Por ejemplo, para multiplicar 13×17, la parte izquierda da inicialmente $13 + 7 = 17 + 3 = 20$. Al operar la columna de las diferencias se obtiene $3 \times 7 = 21$, con lo que el 2 habra que sumarlo a las decenas de la parte izquierda, resultando finalmente $13 \times 17 = 221$.

Otro caso particular se da si uno de los operandos está por encima de la base y el otro por debajo de la base. Por ejemplo, al operar 13×9. En este caso, el producto de las diferencias da -3. Lo que habrá que hacer es extraer una decena de la parte izquierda y dejar como parte derecha el complemento a 10. La figura 11 muestra el procedimiento.

$$\begin{array}{rcr} 13 & & +3 \\ 9 & & -1 \\ \hline 12 & / & -3 \\ 11 & / & 7 \\ & 117 & \end{array}$$

Figura 11. Caso particular de multiplicación de dos números próximos a una base

Al operar la columna de las diferencias hay que tener en cuenta que la parte derecha del resultado tiene que tener tantos dígitos como ceros tenga la base. Por ejemplo, para operar 103×107, la base es 100 y, por tanto, la parte derecha del resultado tiene que tener dos cifras. En este caso, la parte izquierda sería $103 + 7 = 107 + 3 = 110$, y la parte derecha sería $3 \times 7 = 21$, con lo que el resultado sería 11021. Si hubiera menos cifras, se completan con ceros. Puede ser cómodo, para no olvidarse, poner ya las diferencias con los ceros necesarios. Por ejemplo, para operar 102×104, la parte izquierda sería $102 + 4 = 104 + 2 = 106$; las diferencias serían $+02$ y $+04$. El producto de las diferencias sería 08 y el resultado total de la operación 10608.

Cuando los números están próximos a una base secundaria, hay que utilizar una base primaria de referencia. Por ejemplo, suponga que se quiere multiplicar 48×47. Ambos números son próximos a la base de trabajo 50. El procedimiento se esquematiza en la parte izquierda de la figura 12. Se escoge una base primaria que servirá para fijar el número de cifras de la parte derecha del resultado y el factor por el que habrá que multiplicar o dividir la parte izquierda que se obtiene. Solo se aplica el factor a la parte izquierda. En el ejemplo que nos ocupa, si se escoge como base primaria 10, el resultado obtenido para la parte izquierda habrá que multiplicarlo por 5. La parte izquierda será inicialmente: $48 - 3 = 47 - 2 = 45$, que multiplicado por 5 da como resultado 225. La parte derecha será como siempre $-3 \times -2 = 6$. Tiene una cifra, como la base primaria es 10, que tiene un solo cero, no hay que hacer nada más. Al unir las dos partes dará el resultado: $48 \times 47 = 2256$.

Base primaria: 10	**Base primaria: 100**
Base trabajo : 50	**Base trabajo : 50**
Factor: 50/10 = 5	**Factor: 50/100 = .5**
48 -2	**48 -02**
47 -3	**47 -03**
45 / 6	**45 / 06**
225 / 6	**22.5 / 06**
2256	**22 / 56**
	2256

Figura 12. Multiplicación con base de trabajo secundaria. Izda: la base de trabajo es mayor que la base de referencia. Dcha: la base de trabajo es menor que la base de referencia

Suele ser más cómodo elegir la base primaria de referencia menor que la base de trabajo, para que el resultado de la parte izquierda haya que multiplicarlo y no dividirlo. Por ejemplo, la operación anterior se podría haber hecho con base de referencia 100, resultando el esquema de cálculo de la parte derecha de la figura 12. Se puede ver que hay que dividir por 2 el resultado obtenido para la parte izquierda con lo que da un ,5, que hay que pasar como decenas a la parte derecha, resultando un poco más engorrosa la operación mental.

En todos los casos, aunque se trate de números próximos a una base, se podría utilizar también el método general de multiplicación «*En vertical y cruzando*» que se explicó en apartados anteriores.

7. Algunas casos particulares de multiplicaciones

7.1. Multiplicaciones por 11

Cuando el número tiene una cifra, simplemente se repite dos veces. Por ejemplo, $7 \times 11 = 77$.

Si el número tiene dos cifras, serán la primera y la última cifra del resultado. La cifra central del resultado se obtendrá sumando ambas cifras. Si esta suma da mayor que 9, habrá que pasar la decena a la primera cifra del resultado. Los siguientes ejemplos aclaran la cuestión:

$$\begin{aligned} 12 \times 11 &= 1 \mid 1+2 \mid 2 = 132 \\ 98 \times 11 &= 9 \mid 9+8 \mid 8 = 1078 \end{aligned} \tag{1}$$

Si el número tiene más de dos cifras, el procedimiento es similar. La primera y la última cifra se mantienen. En medio se van sumando dos a dos:

$$175 \times 11 = 1 \mid 1+7 \mid 7+5 \mid 5 = 1925$$

Otra forma de entender el procedimiento es situar poner un cero antes y después del número a multiplicar e ir sumando desde la derecha cada número con el que tiene a su izquierda:

$$2745 \times 11 = 0\ 2\ 7\ 4\ 5\ 0 \to 30195$$

Con esta técnica, se puede multiplicar por 111. Para ello, hay que poner dos ceros delante y otros dos detras del número e ir sumando los números de tres en tres. En todos los casos, si la suma da más de 9, se pasan las decenas a la siguiente suma:

$$34 \times 11 = 0\ 0\ 3\ 4\ 0\ 0 \to 3744$$

Similar es multiplicar por 1111. Se ponen tres ceros delante y detrás del número y se van haciendo sumas de cuatro cifras:

$$2172 \times 1111 = 0\ 0\ 0\ 2\ 1\ 7\ 2\ 0\ 0\ 0 \to 2413092$$

7.2. Multiplicación por 5, 50, 25, 125, 625

Para multiplicar por 5, se añade un cero y se divide por 2:

$$42 \times 5 = 420/2 = 210$$

Para multiplicar por 50, se añaden dos ceros y se divide por 2:

$$47 \times 50 = 4700/2 = 2350$$

Para multiplicar por 25, se añaden dos ceros y se divide por 4. La división por 4 se puede hacer dividiendo dos veces por 2. Por ejemplo:

$$16 \times 25 = 1600/4 = 800/2 = 400$$

Para multiplicar por 125, se pueden añadir tres ceros y dividir por 8. Una vez más, dividir por 8 se puede hacer dividiendo tres veces por 2:

$$624 \times 125 = 624000/8 = 312000/4 = 156000/2 = 78000$$

Para multiplicar por 625, se añaden cuatro ceros y se divide por 16:

$$428 \times 625 = 4280000/16 = 2140000/8 = 1070000/4 = 535000/2 = 267500$$

7.3. Producto de números cuyas últimas cifras suman 10 y el resto son iguales

Se dividen los números en dos partes: la parte izquierda con las cifras que son iguales y la parte derecha con la última cifra. La parte derecha del resultado será el producto de las últimas cifras de los números. La parte izquierda será el producto de la parte izquierda por la parte izquierda más 1:

$$\begin{aligned} 46 \times 44 &= (4 \times (4+1)) \mid (6 \times 4) = 2024 \\ 113 \times 117 &= (11 \times (11+1)) \mid (3 \times 7) = 13221 \end{aligned} \tag{2}$$

7.4. Elevar al cuadrado un número que acaba en 5

Sea el número $a5$, donde a representa su primera cifra. El resultado constará de la parte derecha, que es $5^2 = 25$, y la parte izquierda que será $a \times (a+1)$:

$$85^2 = (8 \times (8+1)) \mid 25 = 7225$$

Si el número tiene más de dos cifras, el procedimiento es el mismo:

$$\begin{aligned} 115^2 =& (11 \times (11+1)) \mid 25 = 13225 \\ 245^2 =& (24 \times (24+1)) \mid 25 = 60025 \end{aligned} \tag{3}$$

7.5. Cuadrado de un número próximo a una base

El resultado consta de dos partes: la parte izquierda sera la suma del número más la desviación con la base, con su signo; la parte derecha será el cuadrado de la desviación. La parte derecha tiene que tener el mismo número de cifras que los ceros de la base. Si tiene más, se pasan a la parte izquierda. Si tiene menos, se añaden ceros a la izquierda. Algún ejemplo:

$$\begin{aligned} &13^2 \to Base = 10, Desv = 3 \to (13+3) \mid 9 = 169 \\ &16^2 \to Base = 10, Desv = 6 \to (16+6) \mid 36 = (16+6+3) \mid 6 = 256 \\ &91^2 \to Base = 100, Desv = -09 \to (91-9) \mid 81 = 8281 \\ &97^2 \to Base = 100, Desv = -03 \to (97-3) \mid 09 = 9409 \end{aligned} \tag{4}$$

8. Comprobación de resultados: sacando nueves

Con cualquier número entero se puede hacer la operación denominada «sacar nueves». Consiste en sumar las cifras de un número entero de manera recursiva, eliminando los nueves hasta que solo quede un dígito menor que 9. Se debe eliminar cualquier cifra 9 que haya. También se pueden eliminar, para facilitar la operación, cualquier combinación de cifras que sume 9. Al final tiene que quedar una única cifra menor que 9, o 0. Vea un ejemplo:

$$754236 \to 27 \to 9 \to 0$$

Se han ido sumando todas las cifras, al final al eliminar el 9 queda 0. Pero se podrían haber eliminado el 7 y el 2, que suman 9, y el resultado sería el mismo:

$$754236 \to 5436 \to 36 \to 0$$

En una operación aritmética entre números enteros se cumple que, si se operan los resultados de sacar nueves a los operandos, se obtiene el mismo valor que si se sacan nueves al resultado de la operación. Esto se cumple con la suma, la resta, la multiplicación, la exponenciación y otras. Esta propiedad se conoce con el nombre de «teorema de los restos chinos». El teorema de los restos chinos se conoce desde el siglo III y se atribuye al matemático chino Sun Tzu. En la literatura védica, al número que resulta de sacar nueves se le llama el «Navasesh».

Por ejemplo, en la operación $123 \times 145 = 17835$, si se sacan nueves de 123 se obtiene 6, si se sacan nueves de 145 se obtiene 1 y si se sacan nueves del resultado se obtiene 6. Observe que el Navasesh del resultado es igual al producto de los Navasesh de los operandos.

Si los valores coinciden, no se tiene garantizado que la operación esté bien hecha, pero si no coinciden, sí que se tiene garantizado que la operación está mal hecha. Es una técnica sencilla para comprobar el resultado de las operaciones, al menos, para detectar resultados incorrectos.

9. Conclusiones

Hay otras técnicas de cálculo en la literatura védica que no se han explicado en este artículo. La intención no era mostrarlas todas, sino mostrar algunas de ellas con el fin de despertar la curiosidad del lector. En la bibliografía que acompaña a este artículo se puede encontrar material para ampliar conocimientos sobre el tema.

Si se ha mostrado en el artículo, en opinión del autor, lo suficiente para poder valorar la utilidad de los métodos propuestos, tanto para ejercitar el cerebro mediante el cálculo mental, como para que la enseñanza de las matemáticas en las edades tempranas se pueda hacer de una forma más amena que simplemente forzando a los chicos a repetir interminables operaciones de multiplicar con el algoritmo clásico. Los métodos que se muestran en este artículo no tratan de sustituir a métodos los clásicos, sino más bien complementarlos.

Recuerdo que cuando yo tenía diez años, mi abuelo me enseñó el algoritmo de la raíz cúbica. Mi abuelo lo había aprendido en el colegio. A mí, en el colegio me enseñaron el algoritmo para calcular raíces cuadradas. Desconozco si se sigue enseñando. Lo que sí puedo asegurar es que, a excepción de los ejercicios que hice en el colegio, nunca he utilizado dicho algoritmo para calcular una raíz cuadrada. A día de hoy, ya no recuerdo cómo se hace. Prefiero calcular las raíces tanteando multiplicaciones de números cercanos. Las matemáticas védicas disponen de un método similar de tanteo para calcular raíces cuadradas y cúbicas, aunque no se ha explicado en este artículo. Mucho me temo que, lo que me ha pasado a mí con el algoritmo de la raíz cuadrada, le pasa hoy en día a un número importante de personas con los algoritmos de la multiplicación y de la división. Las personas que necesitan hacer multiplicaciones y divisiones en su trabajo o en su vida diaria, utilizan una calculadora.

Los métodos de cálculo descritos en este artículo, y otros similares que no se han descrito, son fáciles de aprender y de utilizar. Pero quizás, lo más importante es que desarrollan la inventiva y la imaginación de los aprendices, haciéndoles utilizar y entender propiedades de los números. Quién sabe si alguno de ellos no verá en estas propiedades un campo interesante de profundización. Saber hacer de manera sencilla y de cabeza pequeñas operaciones podría propiciar que algunas veces no sientan la necesidad de utilizar la calculadora para realizar determinados cálculos.

Es por ello que creo que, sin dejar de enseñar los métodos clásicos para realizar las operaciones aritméticas, se debería dedicar algo de tiempo a provocar en los alumnos el ejercicio del cálculo mental y de la comprensión de las propiedades de los números.

Problemas parecidos a los indicados para el caso del aprendizaje de la aritmética en la enseñanza primaria, han sido detectados por el autor en la enseñanza de las matemáticas superiores en los estudios universitarios de ingeniería. Pero esa es otra historia, y no corresponde abordarla aquí.

Referencias

[1] B. Krishna. *Vedic Mathematics, or Sixteen Simple Mathematical Formulae from the Vedas*. Motilal Banarsidass, 1965.

[2] J. Trachtenberg. *The Trachtenberg Speed System of Basic Mathematics*. ISHI Press International, 1960.

[3] L. Meyers. *High-Speed Math*. D. Van Nostrand Company Ltd., Canada, 1957.

[4] J. W. Stigler. "Mental Abacus": The Effect of Abacus Training on Chinese Children's Mental Calculation. *Cognitive Psicology*, 16:145–176, 1984.

[5] S. G. Dani. Myths and reality : On 'Vedic mathematics'. *Frontline: India's National Magazine*, October 1993:10, 1993.

[6] A. Bellos. *Alex's Adventures in Numberland*. Bloomsbury, 2010.

[7] L. de Pisa. *Liber Abaci*. 1202.

[8] N. Ruiz Cía. *Multiplica Como Nadie*. Penguin Random House, 2019.

[9] R. Kumar Thakur. *The Essentials of Vedic Mathematics*. Rupa Publications India Pvt. Ltd., 2013.

[10] R. Kumar Thakur. *Advanced Vedic Mathematics*. Rupa Publications India Pvt. Ltd., 2019.

[11] S. R. Huddar, S. R. Rupanagudi, M. Kalpana, and S. Mohan. Novel high speed vedic mathematics multiplier using compressors. In *2013 International Mutli-Conference on Automation, Computing, Communication, Control and Compressed Sensing (iMac4s)*, pages 465–469, Kottayam, Mar. 2013.

[12] S. Akhter, V. Saini, and J. Saini. Analysis of vedic multiplier using various adder topologies. In *2017 4th International Conference on Signal Processing and Integrated Networks (SPIN)*, pages 173–176, Noida, Delhi-NCR, India, Feb. 2017.

[13] H. Thapliyal and H. R. Arabnia. A Time-Area- Power Efficient Multiplier and Square Architecture Based On Ancient Indian Vedic Mathematics. page 7, 2004.

[14] H. Thapliyal and M. B. Srinivas. High Speed Efficient N X N Bit Parallel Hierarchical Overlay Multiplier Architecture Based On Ancient Indian Vedic Mathematics. page 4, 2004.

[15] A. Savadi, R. Yanamshetti, and S. Biradar. Design and Implementation of 64 Bit IIR Filters Using Vedic Multipliers. *Procedia Computer Science*, 85:790–797, 2016. ISSN 18770509.

[16] A. Gupta. *The Power of Vedic Maths*. Jaico Publishing House, 2004.

[17] D. Bathia. *Vedic Mathematics Made Easy*. Jaico Publishing House, 2012.

Sobre el autor:
Nombre: Santiago Higuera de Frutos
Correo electrónico: santiago.higuera@upm.es
Institución:
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Universidad Politécnica de Madrid).