CONTRIBUCIÓN A LA DOCENCIA https://doi.org/10.24844/EM3401.10

Un acercamiento al Teorema Fundamental del Cálculo a través de la Matemática Realista

An approach to the Fundamental Theorem of Calculus through Realistic Mathematics

Ingrid Janeth Jácome Anaya,[1]
Jorge Enrique Fiallo Leal,[2]
Sandra Evely Parada Rico[3]

Resumen: Aquí se reporta el diseño, implementación y evaluación de una actividad conformada por dos situaciones matemáticas realistas enmarcadas en el fenómeno de caída libre, en el marco de una investigación sustentada en la teoría de la Educación Matemática Realista, cuyo objetivo fue caracterizar los niveles de matematización logrados por estudiantes de un curso de Cálculo Integral en el estudio del Teorema Fundamental del Cálculo con el uso de tecnologías digitales. En el análisis de los modelos creados por los estudiantes en los tres primeros niveles de matematización descritos por la teoría, se evidencia que, a partir de las tareas diseñadas, los estudiantes logran representar algebraicamente la relación existente entre cantidad variable, acumulación de cambio y razón de cambio de acumulación, haciendo referencia al contexto físico presentado. Identifican la relación existente entre derivada e integral, manifestando explícitamente que están relacionadas de forma inversa, puesto que cada una deshace lo que hace la otra, relación que se evidencia en el Teorema.

Fecha de recepción: 19 de diciembre de 2020. **Fecha de aceptación:** 6 de agosto de 2021.

[1] Universidad Industrial de Santander, Colombia, jacomeai@correo.uis.edu.co, orcid.org/0000-0001-6043-7368
[2] Universidad Industrial de Santander, Colombia, jfiallo@uis.edu.co, orcid.org/0000-0002-3103-3994
[3] Universidad Industrial de Santander, Colombia, sanevepa@uis.edu.co, orcid.org/0000-0001-5468-0943

Palabras clave: *Teorema Fundamental del Cálculo, Matematización, Niveles de Matematización.*

Abstract: Here are reports the design, implementation and evaluation of an activity conformed by two realistic mathematical situations framed in the phenomenon of free fall, in the framework of an investigation supported by the theory of Realistic Mathematical Education, whose objective was to characterize the levels of mathematization achieved by students of a course of Integral Calculus in the study of the Fundamental Theorem of Calculus with the use of digital technologies. In the analysis of the models created by the students in the first three levels of mathematization described by the theory, it is evident that, from the tasks designed, the students manage to represent algebraically the existing relationship between variable quantity, accumulation of change and rate of change of accumulation, referring to the physical context presented. They identify the relationship between derivative and integral, explicitly stating that they are inversely related, since each one undoes what the other does, a relationship that is evidenced in the Theorem.

Keywords: *Fundamental Theorem of Calculus, Mathematization, Levels of Mathematization.*

INTRODUCCIÓN

La articulación entre las ideas de variación y acumulación que se establecen en el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) es compleja de comprender, pues como lo plantean Robles, Tellechea y Font (2014) y Ponce (2006), exige la integración de conceptos que forman parte de un razonamiento superior.

Muñoz (2000) señala que una de las problemáticas propias de la enseñanza del cálculo integral consiste en la separación entre lo conceptual y lo algorítmico, puesto que en los cursos hay excesivo énfasis en el cálculo de antiderivadas, centrándose en la definición de Cauchy o la de Riemann. Así mismo pasa con el estudio de la derivada, que se reduce a la memorización de expresiones algebraicas y cálculos algorítmicos; lo que conlleva a no relacionarlo con fenómenos de cambio y variación (Zambrano *et al.*, 2019).

Para propiciar el enlace entre lo algorítmico y lo conceptual, Muñoz (2000) identifica como condición necesaria el uso de situaciones problema, a partir de las cuales se formen nociones y procedimientos asociados a los elementos propios del cálculo. Freudenthal (1991) define estas situaciones problema como contextos y situaciones problemáticas realistas, en el sentido de representables, razonables e imaginables para los estudiantes. Dichas situaciones son las generadoras de su actividad matematizadora, refiriéndose a éstas como un proceso que conlleva a la organización de la realidad con medios matemáticos, incluida la matemática misma (Freudenthal, 1973).

Por otro lado, Tall y Sheath (1983) mencionan que las representaciones estáticas y limitadas de los libros de texto, restringen la naturaleza dinámica de los objetos y conducen a desarrollar una imagen restringida del concepto. Esta realidad justifica la introducción de las tecnologías digitales en los estudios de educación matemática, puesto que las tecnologías, tal como lo afirma Turégano, (1998, p. 245) están "ayudando a la formación, transformación de intuiciones y a la creación de imágenes del concepto" y favorecen el desarrollo del proceso de representación en relación a fenómenos de variación y cambio, lo que conlleva a considerar naturalmente los conceptos de tasa de variación (diferenciación) y cambio acumulado (integración), conceptos que el TFC explica como procesos inversos (Tall, 1997).

Frente a lo anterior, presentamos aquí resultados de una investigación que se planteó como pregunta ¿Qué niveles de matematización alcanzan los estudiantes de un curso de cálculo integral en la comprensión del TFC mediante el uso de tecnologías digitales?

EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA

La Educación Matemática Realista (EMR) busca favorecer en los estudiantes el desarrollo de herramientas matemáticas y la comprensión de conceptos para resolver problemas, para ello deben aprender matemáticas desarrollando y aplicando conceptos y herramientas matemáticas en situaciones realistas (representables, razonables e imaginables para ellos). En la EMR se da preponderancia a la actividad de organizar la matemática desde la realidad, por lo tanto, la mejor forma de aprender matemáticas es haciendo, y la matematización es el centro de la educación matemática (Freudenthal, 1971).

Treffers (1987) formula dos formas de matematización; I) La matematización horizontal: proceso donde los estudiantes presentan herramientas que pueden ayudar a organizar y resolver un problema del mundo real, esto es, traducir al mundo matemático una situación del "mundo real", comprendiendo así las relaciones entre el lenguaje cotidiano y el matemático, II) La matematización vertical: proceso de reorganización dentro del propio sistema matemático. Esto es, encontrar atajos, probar regularidades, descubrir conexiones y estrategias para luego usar dichos descubrimientos.

Los estudiantes pasan por diferentes niveles de matematización (figura 1), desde concebir situaciones informales conectadas con el contexto, hasta alcanzar un nivel de esquematización, y finalmente tener una visión de los principios generales detrás de un problema (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Una característica esencial de estos niveles consiste en que: la actividad matemática en un nivel inferior se convierte en un objeto de indagación en un nivel superior, de manera que las acciones organizativas llevadas a cabo inicialmente de manera informal, se vuelven acciones más formales; en términos de Freudenthal (1991, p. 98) "en el siguiente nivel esta actividad se hace consciente y puede convertirse en un tema de reflexión".

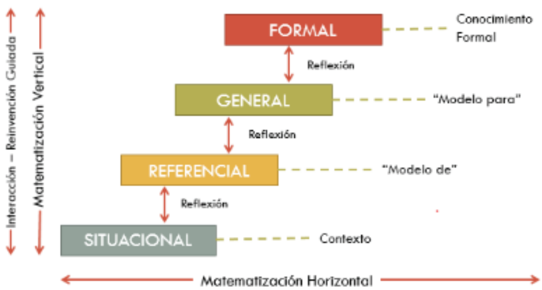


Figura 1. Niveles de Matematización. B*ressan*, *et al.* (2016)

El *Nivel Situacional*, está asociado al uso de estrategias ligadas totalmente al contexto de la situación misma y, las estrategias que utilizan para dar respuesta a los problemas y/o descubrir la matemática existente en el contexto, se apoyan en los conocimientos informales, el sentido común y la experiencia. A este proceso se le denomina matematización horizontal.

Los otros niveles están enmarcados dentro de la matematización vertical. Se caracterizan por la búsqueda de fórmulas, prueba de regularidades, formulación de un concepto nuevo, generalización, evolución y ajuste de modelos, entre otros.

En el *Nivel Referencial*, se parte de la reflexión del modelo creado en nivel situacional, aparecen las representaciones algebraicas, gráficas, retóricas, las descripciones, conceptos y procedimientos que esquematizan el problema, pero referidos a la situación particular. De allí que los modelos se consideren como "modelos de".

En el *Nivel General* a partir del modelo creado en el nivel Referencial, se da lugar al surgimiento de aspectos generalizables que son utilizables en un conjunto de problemas, donde las estrategias encontradas superan la referencia al contexto. De allí que los modelos se consideren como "modelos para" la resolución de un conjunto de problemas que tienen aspectos en común.

En el *Nivel Formal,* a partir de la reflexión del "modelo para", aparecen los conceptos, procedimientos, utilización de conceptos, y notaciones convencionales, propias de la rama de la matemática, que hacen parte de la matemática vinculada al contexto que se venía trabajando.

Los modelos son representaciones de situaciones problema que reflejan aspectos fundamentales de conceptos y estructuras matemáticas relevantes para la situación problema, pero que pueden tener diversas manifestaciones (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003), materiales de clase, bosquejos, situaciones, esquemas, diagramas y símbolos, que a su vez son modelos dentro de la teoría (Gravemeijer, 1994). Este término no se refiere a modelos preconstruidos e impuestos desde la matemática formal sino a modelos emergentes, "inventados" por los estudiantes y no por los profesores, guardan relación con los niveles. La función de los modelos es salvar la brecha entre la comprensión informal conectada con la realidad "real" e imaginada, por una parte, y la comprensión de los sistemas formales por otra (Gravemeijer, 1994).

Para lograr que los estudiantes pasen de un nivel a otro, es necesario permitirles que vean el conocimiento como propio, del que ellos mismos son responsables. En ese sentido, no se espera que los estudiantes reinventen todo por sí mismos, el énfasis está en el proceso de aprendizaje más que en la invención como tal. Por tal razón, el profesor debe guiar el proceso de descubrimiento, mediante una interacción donde se priorice la iniciativa de los estudiantes para que los modelos y su evolución se logren lo más natural posible, entendiéndose como "un balance sutil entre la libertad de inventar y la fuerza de guiar" (Freudenthal, 1991). A este proceso se le conoce como Reinvención guiada, provoca que cada miembro del proceso de aprendizaje reflexione a partir de las reinvenciones de los demás (Alsina, 2009).

Ante lo anterior, se propone la realización de un análisis fenomenológico didáctico con el fin de encontrar los fenómenos, situaciones y contextos en los cuales el objeto matemático de estudio es un organizador (Bressan, *et al.*, 2016), esto a través de un proceso de matematización desde el punto de vista de Freudenthal (1983). La investigación fenomenológica tiene como propósito mostrar la vinculación de conceptos y estructuras matemáticas con ciertos fenómenos que están en su origen, vinculados con los mundos natural, cultural, social y científico con la finalidad de dotar de sentido el aprendizaje de dichos conceptos y estructuras.

Desde el punto de vista curricular, la reinvención guiada, en tanto actividad de matematización, requiere de la fenomenología didáctica como metodología de investigación, en la que se consideren fenómenos presentes en la vida de los que se espera que aprendan (Freudenthal, 1983).

Entre los trabajos realizados en el marco de la Educación Matemática Realista (EMR) destacamos los de Gravemeijer y Doorman (1999), Van den Heuvel-Panhuizen (2003), González (2015), Henao y Vanegas (2012) y Drijvers *et al.* (2013), quienes utilizan la teoría para el diseño de actividades con el fin de promover el proceso de aprendizaje de objetos matemáticos específicos, resaltando a su vez que en el diseño de las actividades, la reinvención guiada es uno de los aspectos principales para lograr el paso de un nivel a otro.

METODOLOGÍA

El proceso metodológico del estudio siguió las orientaciones ofrecidas por la fenomenología didáctica de Freudenthal (1983), descrita en el apartado anterior y la metodología propuesta por Goldin (2000) para el diseño y análisis de las tareas.

Aunque la investigación no siguió la metodología de estudio de caso, para el análisis se siguieron las orientaciones de Stake (1999), quien menciona que para el análisis y reporte de resultados se pueden seleccionar sujetos participantes del estudio que exhiben evidencia de lo que se quería observar. Por esa razón, en ocasiones se usa el término de caso para referirse a los estudiantes de participantes del estudio de quienes se exhiben evidencias.

Para la identificación de los contextos, fenómenos y situaciones matemáticas realistas, donde el TFC tenga sentido y sea un organizador, es importante analizar y responder a los cuestionamientos ¿para qué y a qué problemas da respuesta el TFC? En la investigación, de la que emerge este documento, se realizó una revisión epistemológica de los objetos matemáticos inmersos en el TFC, derivada e integral respectivamente. Se hizo un análisis del contenido matemático escolar teniendo como referencia algunos libros utilizados usualmente en la enseñanza del cálculo integral. A través de dicho análisis se logró identificar el fenómeno de Caída Libre, donde interesan las situaciones de hallar la distancia a partir de la velocidad y hallar la velocidad a partir de la distancia.

Para lograr la creación de modelos y su abstracción, dentro del proceso de matematización, es necesario el uso de situaciones problemáticas realistas. Por ello, en la experiencia que aquí se reporta, se diseñaron dos situaciones enmarcadas en el fenómeno de Caída Libre, puesto que permite establecer relaciones entre las representaciones de la velocidad, el tiempo y la distancia. Porque como lo afirma Edwards (1979, p. 138) "la aplicación del tiempo y los conceptos de movimiento al estudio de curvas condujo a Torricelli y Barrow a una comprensión intuitiva de la relación inversa entre los problemas de tangentes y cuadraturas, esto es, entre las operaciones de diferenciación e integración".

A partir de lo anterior, consideramos pertinente referirnos a ciertos fenómenos, situaciones y contextos presentes en la historia y en el contenido de estudio del curso de cálculo integral, en los cuales el TFC es un organizador. De acuerdo con Edwards (1979), en los problemas de movimiento, la idea intuitiva del TFC se refleja en el análisis de la razón de cambio del área bajo la curva velocidad. Por este motivo en las tareas diseñadas para cada situación matemática realista empezamos con esta idea.

Para cada situación se diseñaron tareas en el nivel Situacional y Referencial, y para su consolidación se diseñaron tareas en el nivel General. Cada nivel está conformado por dos momentos. Inicialmente, se presenta a los estudiantes la situación matemática para que la trabajen individualmente, y luego se da espacio para el principio de interacción (como se muestra en la figura 2, donde se indica que se discuta con los compañeros). Seguidamente, se presentan tareas individuales, para suscitar el principio de reinvención. Después se orienta la interacción con el software, sus pares y el profesor, para revisar los modelos creados en cada tarea.

Las evidencias aquí presentadas corresponden a tres estudiantes de ingenierías: Harold (18 años), Arturo (17 años) y Juliana (17 años) (pseudónimos). Ellos fueron seleccionados por: haber cursado la asignatura de cálculo integral por primera vez, participar activamente del mismo, expresar sus ideas explícitamente ante sus compañeros y, cursar en simultáneo las asignaturas de cálculo integral y física mecánica. Para la recolección de evidencias se tuvieron en cuenta las hojas de trabajo y la videograbación de las sesiones de la aplicación de las situaciones.

La intervención se realizó en una sesión de 4 horas fuera del horario de clase y sin antes haber visto el TFC. El investigador (autor 1) tomó el rol de profesor guía. En la sesión, los estudiantes usaron el software Tracker, el cual les permitió estudiar el fenómeno de caída libre a través del seguimiento manual y automatizado de objetos a partir de videos tomados de la realidad, obteniendo de forma inmediata información tabular y gráfica acerca de la posición y velocidad, así como la exploración de ideas de variación y acumulación, donde primero se enfrentaron a la situación de "hallar la distancia a partir de la velocidad" y luego a la situación de "hallar la velocidad a partir de la distancia".

DESCRIPCIÓN DE LAS TAREAS Y SU IMPLEMENTACIÓN

En este apartado se describen las tareas y la forma como se implementaron. Además, se exhiben los modelos creados por Juliana en las dos situaciones matemáticas realistas en el Nivel Situacional, Referencial y General, así como lo ocurrido en el principio de interacción y reinvención guiada. Cabe resaltar que, en este principio de interacción, intervienen el profesor y los tres estudiantes mencionados en la metodología.

Primera situación: hallar la distancia a partir de la velocidad

Nivel Situacional

Se presenta a los estudiantes un video en Tracker en el que se suelta una pelota a cierta altura, para que ellos lo observen y "hallen la distancia a partir de la velocidad".

Al promover el principio de reinvención guiada en este nivel, se espera que los estudiantes, a través de la realización de las tareas, la manipulación tabular y gráfica de la información suministrada por el software, identifiquen la relación entre las magnitudes variables velocidad y distancia con las ideas de acumulación; hallen un modelo que represente la relación de una magnitud variable en función de otra dada en un intervalo de tiempo.

1. Abra el archivo **Situación_1.1**, el cual muestra el video de la caída de una pelota de tenis, que se suelta desde 1,817 m de altura (primer piso del edificio Laboratorios Livianos de la universidad). A partir de la velocidad, halle la expresión algebraica que representa la distancia desde el punto de lanzamiento para cualquier instante de tiempo t.

Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.

Figura 2. Primera situación

En la implementación, Juliana (J), recurre a las ideas y conocimientos previos acerca del fenómeno de caída libre, usa las fórmulas físicas para hallar la distancia y la velocidad de la pelota en cualquier instante de tiempo trayendo la idea de que usando derivada o integral puede encontrar una magnitud conociendo la otra (figura 3). En su modelo se evidencia que relaciona el fenómeno presentado de la caída de la pelota con el fenómeno físico de Caída Libre y por esta razón la gravedad influye en el movimiento.

1 $h = 1{,}817\,m$ $v \to x \to t$

• Si la pelota se suelta sería caída libre y la gravedad se tendría en cuenta.

$y_f = \cancel{y_i}^0 + \cancel{v_i t}^0 + \frac{1}{2} a t^2$ $v_i = 0$ $v_f = g t$

$y_f = \frac{1}{2} a t^2$

→ uso la integral de la posición y obtengo la velocidad

Figura 3. Solución J

Principio de reinvención e interacción guiada

En la interacción entre pares y el profesor, Juliana no manifiesta conciencia de la relación entre derivada e integral, puesto que solo resalta que, usando las fórmulas (figura 3) puede resolver el problema. Ella, a pesar de haber encontrado la expresión algebraica de la velocidad y la distancia utilizando las fórmulas de caída libre, no halla la integral de la posición para verificar si dicho resultado corresponde a la velocidad de la pelota encontrada con la fórmula.

Seguidamente, Arturo muestra su procedimiento, manifestando que la situación puede solucionarse con la idea de que "la velocidad es igual a distancia por altura", a lo que Juliana comenta que "no se puede usar en este caso porque ahí no está teniendo en cuenta la gravedad". Con ello Arturo reconoce que la velocidad de la pelota depende de la gravedad y que lo que él consideró no se puede usar en este fenómeno porque no cumple las condiciones necesarias

En este momento de interacción, todos llegan a la conclusión que, para resolver la situación problema es necesario conocer la expresión algebraica de la velocidad; para ello, se diseñaron las siguientes tareas (figuras 4 y 5).

En la hoja de trabajo:

a. Describa el comportamiento de la velocidad de la pelota desde el punto de lanzamiento hasta que toca el piso. Explique su respuesta.

b. ¿Cuál es la velocidad inicial? Explique su respuesta.

c. ¿Cuál es la velocidad final? Explique su respuesta.

d. Ubíquese en la parte superior de la pantalla y en la opción Ventana oprima "Vista Derecha", describa el comportamiento de la velocidad de la pelota desde el punto de lanzamiento hasta que toca el piso. Explique su respuesta.

e. Represente gráficamente el comportamiento de la velocidad del movimiento de la pelota a través del tiempo.

Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.

Figura 4. Modelos gráficos velocidad

1.1 Halle la velocidad de la pelota en los instantes de tiempo dados

Tiempo	Velocidad
$0s$	
$0.031s$	
$0,05s$	
$0.145s$	
$0,28s$	
$0,34s$	
$0,48s$	
$0.6s$	
t	

a. En Tracker, ubíquese en la parte superior de la pantalla y en la opción Ventana oprima "Herramienta de Datos… (Analizar…)" y maximice la nueva ventana, oprima el botón ***Analyze***, seleccione **Ajustes**. ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la velocidad de la pelota?

b. Verifique las velocidades encontradas en el ítem 1.1 ¿son iguales los resultados? ¿por qué?

Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.

Figura 5. Modelos algebraicos velocidad

Ante las tareas propuestas, los estudiantes exploran la situación en Tracker y con base en los conocimientos previos, la representación tabular y gráfica de los puntos que representan la velocidad e interacción entre pares, estudiante-software y estudiante-profesor. Ellos concluyen que la velocidad de la pelota es afectada por la gravedad (g), esto es, a medida que pasa el tiempo, la velocidad aumenta por la acción de la gravedad, por tanto, la expresión que representa la velocidad de la pelota en cualquier instante de tiempo está dada por $v = gt$.

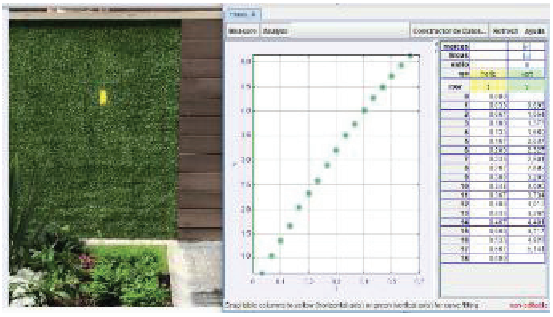


Figura 6. Representación en Tracker

Posteriormente, se espera que los estudiantes realicen una regresión para encontrar la curva de mejor ajuste para validar lo encontrado. Aquí es importante cuestionarlos sobre: el dominio de la curva obtenida, la curva que mejor se ajusta y su linealidad.

Al buscar la regresión de los puntos que representan la velocidad de la pelota en cualquier instante de tiempo, el profesor debe motivarlos a la selección de expresiones cuadráticas, cúbicas, sinusoidales, entre otras. Además, cuestionarlos sobre la pertinencia de esas curvas para modelar el comportamiento de la velocidad de la pelota de forma global.

En este punto, las justificaciones de los tres estudiantes en cuanto a las fórmulas que representan la velocidad de la pelota no son evocadas. Más bien, están basadas en el reconocimiento de la situación, el análisis de las variables que actúan al momento de soltar la pelota y en la velocidad con que cae. Después de verificar la expresión algebraica que representa la velocidad con la que cae la pelota, mediante la regresión lineal, los estudiantes concluyen que ésta es aproximadamente igual a la predicha inicialmente, dado que las condiciones de la situación no son ideales, pero los datos suministrados por el software se ajustan a la realidad.

Posteriormente, se les presentan las siguientes tareas (figura 7), con el objetivo de que descubran la matemática existente en la situación problema, por medio de la exploración de la idea de acumulación de cambio de la velocidad en intervalos de tiempo y la distancia recorrida en los mismos intervalos.

1.2 Con ayuda del archivo anterior,

a. En la gráfica de la velocidad contra el tiempo ¿dónde se evidencia el cambio de la variable velocidad con respecto al cambio de tiempo? ¿qué representa geométricamente la acumulación del cambio de la velocidad con respecto al cambio de tiempo?

b. En la ventana "Herramienta de Datos", oprima el botón **Mesaure** y seleccione **Area**. Halle la acumulación del cambio de la velocidad con respecto al cambio de tiempo dado.

Intervalo de tiempo	Área
[0.1 : 0.133]	
[0.2 : 0.233]	
[0.3 : 0.333]	
[0.367 : 0.4]	
[0.4 : 0.433]	

c. Abra el archivo Situación_1.2, sabiendo que *r* representa la distancia recorrida por la pelota desde el punto de lanzamiento a través del tiempo. Halle la distancia recorrida por la pelota en los siguientes intervalos de tiempo.

Intervalo de tiempo	Distancia
[0.1 , 0.133]	
[0.2 , 0.233]	
[0.3 , 0.333]	
[0.367 , 0.4]	
[0.4 , 0.433]	

d. Compare la tabla del ítem *b* con la tabla del ítem *c*, ¿qué relación existe entre los datos contenidos en ellas? Plantee una conjetura y explique ampliamente.

Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.

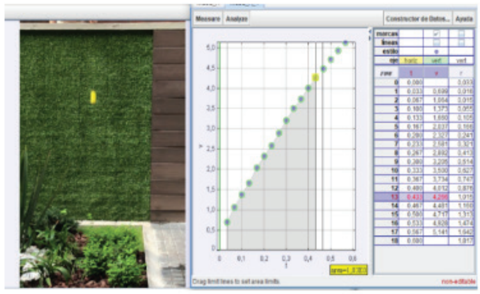


Figura 7. Relación entre velocidad y distancia con ideas de acumulación

Con la realización de dichas tareas, los estudiantes pueden encontrar gráfica y numéricamente la acumulación del cambio de la velocidad en algunos intervalos de tiempo y comparar dicha información con la distancia recorrida en los mismos intervalos. El software permite el cálculo del área bajo la curva, la velocidad en intervalos de tiempo de forma rápida y sencilla. Teniendo en cuenta que el dominio de la función velocidad son los reales positivos, las áreas bajo la curva velocidad son siempre positivas.

Los estudiantes mostraron dificultades al interpretar la representación geométrica de la acumulación del cambio de la velocidad con respecto al cambio de tiempo; pero, gracias al principio de interacción, lograron construir el significado geométrico de la acumulación del cambio.

Al momento de comparar los datos de la tabla área con los de la tabla distancia recorrida, por la pelota en los mismos intervalos de tiempo, los estudiantes logran conjeturar la relación entre la distancia recorrida por la pelota y la velocidad utilizando la idea del área bajo la curva velocidad.

En el caso de Juliana, a pesar de que las tablas representan las magnitudes del área y la distancia en intervalos de tiempo, ella asume la relación de forma general (figura 8), aclarando que el área debe ser bajo la curva velocidad contra el tiempo, puesto que si se tiene otra curva su significado no se ajustaría al contexto presentado en esta situación; suceso que muestra la importancia de la presencia del contexto e interpretación del área bajo la curva en el mismo.

d) De acuerdo a los datos que halle
según el sofware son muy similares
a los del ítem b.

»El área bajo la curva se puede
interprelar como la distancia, pero
cuando las otras variables son t y
velocidadad

Figura 8. Conjetura J

Con las conjeturas realizadas por los estudiantes, se muestra que el proceso de reinvención guiada e interacción, juega un papel importante en el conocimiento de la situación y en la búsqueda de relaciones entre la velocidad y la distancia, esto es, la acumulación del cambio de la velocidad contra el tiempo, entendiendo que el tiempo está definido para los números reales positivos.

Nivel Referencial

Las tareas diseñadas para este nivel (figura 9), apuntan a que los estudiantes identifiquen y representen la distancia recorrida como la acumulación del cambio de la velocidad, y la relación existente entre las magnitudes variables distancia y velocidad con la acumulación, así como el planteamiento de modelos algebraicos y/o retóricos para encontrar una magnitud en función de otra magnitud dada.

e. ¿Qué relación existe entre el área bajo la curva velocidad y la distancia recorrida en un instante de tiempo? Plantee una conjetura y explique ampliamente.

f. De acuerdo con la conjetura planteada, halle la distancia de la pelota a partir de la velocidad en cualquier instante de tiempo *t*. Justifique ampliamente sus respuestas.

g. Realice el análisis de regresión de los puntos que representan la distancia de la pelota con respecto al tiempo, para ello, des-seleccione la opción Mesaure - Area, ubíquese en r y con clic sostenido trasládela al lado derecho de la columna t y des-seleccione la opción marcas en la columna v. Compare los resultados obtenidos en el ítem anterior con los dados por el software. ¿Qué puede concluir? Explique ampliamente sus respuestas y represente gráficamente los sucesos del ítem e y f.

Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.

Figura 9. Modelos relación entre distancia y acumulación de cambio

A partir del modelo realizado en el nivel situacional, se esperaba que los estudiantes generalizaran la conjetura para instantes de tiempo, pero la pregunta del ítem “e” (figura 9) les generó confusión, puesto que argumentaron que en un instante de tiempo no se recorre distancia. Al preguntar ¿en el instante $t = 0.267s$ la pelota no ha recorrido nada? ¿la distancia recorrida es cero? se logró que los estudiantes comprendieran mejor la pregunta, por lo tanto, consideramos que esta pregunta debe replantearse así: ¿qué relación existe entre el área bajo la curva velocidad y la distancia recorrida por la pelota hasta un instante de tiempo?

Juliana realiza un modelo retórico formal (figura 10) para describir la relación encontrada en el nivel situacional; menciona que hay una equivalencia con la integral de la función velocidad en un intervalo de tiempo, el área bajo la curva y la distancia recorrida; pero no explicita que son equivalentes siempre y cuando sean los mismos intervalos de tiempo, hecho que aclara al momento de la interacción entre pares.

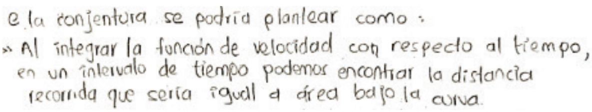

e la conjentura se podria plantear como:
» Al integrar la función de velocidad con respecto al tiempo, en un intervalo de tiempo podemos encontrar la distancia recorrida que sería igual a área bajo la curva.

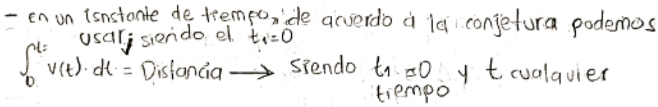
Figura 10. “Modelo de” J

Principio de interacción y reinvención guiada

Al momento de pedirles hallar la expresión algebraica que representa la distancia recorrida por la pelota a partir de la velocidad para cualquier instante de tiempo, el modelo creado por Juliana y Arturo hacen referencia a: $x(t) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$, donde $x(t)$ es la distancia recorrida, y $t_2 > t_1$.

Con el proceso de interacción, los estudiantes reconocieron la importancia de interpretar las representaciones algebraicas dadas y el significado de la integral definida e indefinida, mostrando a su vez, la importancia de la situación contexto en la toma de decisiones al momento de desistir de la integral indefinida.

Juliana plantea el siguiente modelo algebraico (figura 11), que representa la distancia recorrida por la pelota en el intervalo $[0, t_1]$.


– en un isnstante de tiempo, de acuerdo a la conjetura podemos usar $\int$ siendo el $t_1=0$

$\int_0^{t} v(t)\cdot dt$ = Distancia $\longrightarrow$ siendo $t_1=0$ y t cualquier tiempo

Figura 11. "Modelo de" algebraico J

Al comparar la expresión algebraica obtenida en el modelo de regresión y la integral de la velocidad con respecto al tiempo de 0 a t surgieron argumentos referidos totalmente a la situación ubicada en el contexto real.

A pesar de las interacciones anteriores, donde se usó la integral definida para resolver la situación, surgieron confusiones acerca de la diferencia entre antiderivar e integrar. Para aclarar dichas dudas, el proceso de interacción entre pares jugó un rol importante, puesto que llevó a los estudiantes a argumentar sus ideas y definir el significado de integración y antiderivación.

De acuerdo con los modelos creados por Arturo, Harold y Juliana, los cuales están basados en ideas matemáticas y el uso de vocabulario adecuado, podemos concluir que es un "modelo de" la situación puesto que, a partir de la reflexión y organización del modelo creado en el nivel anterior, identificaron la distancia recorrida por la pelota hasta un instante de tiempo como el área bajo la curva velocidad en el intervalo $[0, t]$.

Segunda situación: hallar la velocidad a partir de la distancia

Nivel Situacional

En este nivel se les presenta la segunda situación (figura 12). Los estudiantes tienen a su disposición el video en Tracker, las expresiones algebraicas de la velocidad y distancia de la pelota con respecto al tiempo obtenidas en la solución de la primera situación. El objetivo principal es que resuelvan la situación con ayuda de los presaberes, la experiencia y la intuición, dando lugar a la discusión de las soluciones dadas por sus compañeros, estructuración y organización de estas.

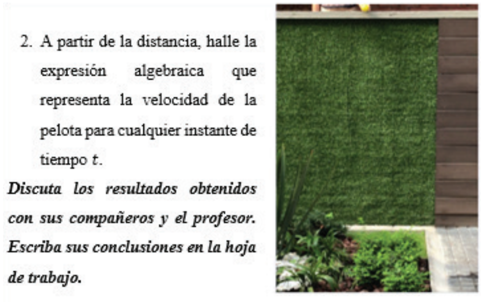


Figura 12. Segunda situación

Al enfrentarse a la segunda situación sin interacción ni reinvención guiada, Juliana representa de forma algebraica la relación entre distancia y velocidad directamente con la derivada (figura 13). Dado que en la situación anterior se había enfrentado a las ideas de integral de la función velocidad contra el tiempo y traía la idea de que, para resolver este tipo de situaciones se puede utilizar la derivada o la integral.

2 $\frac{dr}{dt} = v(t)$ → Derivo la función distancia con respecto al tiempo y obtengo la función velocidad

$r(t) = 4{,}9t^2$ Derivo $v(t) = 9{,}8t$ (Parte teórica)

$r(t) = 4{,}178\,t^2$ Derivo $v(t) = 8{,}356\,t$ (Parte experimental)

Figura 13. Solución J SIT2

Principio de interacción y reinvención guiada

Los tres estudiantes derivaron la distancia para obtener la velocidad y al solicitarles justificar, ellos argumentaron que al derivar la expresión algebraica de la distancia obtienen la expresión algebraica de la velocidad.

Para promover el principio de reinvención, se presentan tareas dirigidas para que los estudiantes conjeturen sobre la razón de cambio promedio del área bajo la curva velocidad (distancia) en los intervalos de tiempo dados, identificando que se aproxima a la velocidad promedio en los mismos intervalos (figura 14). Las tareas pueden ser ejecutadas con la información suministrada por Tracker, puesto que tienen a su disposición los datos que representan la velocidad de la pelota en algunos instantes de tiempo y pueden calcular el área bajo la curva velocidad en cualesquiera intervalos.

En la ventana "Herramienta de Datos" del archivo anterior, oprima la Ctrl O y abra el archivo **Ventana 1.2**.

a. Cuál es la magnitud aproximada de la velocidad que lleva la pelota cuando el tiempo cambia de:

   $0{,}1\,s$ a $0{,}133s$
   $0{,}2s$ a $0{,}233s$
   $0{,}3s$ a $0{,}333s$
   $0{,}367s$ a $0{,}4s$
   $0{,}467s$ a $0{,}5s$

b. Cuantifique el cambio del área bajo la curva velocidad en cada uno de los cambios de tiempo anteriores.

c. ¿Cuál es la rapidez del cambio del área bajo la curva velocidad en los cambios de tiempo anteriores?

d. Compare los resultados obtenidos en el ítem a con el ítem c ¿Qué puede concluir? Plantee una conjetura. Explique ampliamente sus respuestas.

Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.

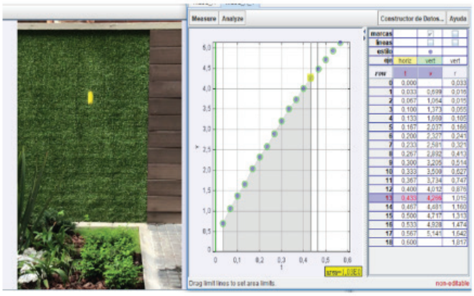


Figura 14. Relación entre distancia y velocidad con ideas de variación

Los estudiantes, con la información tabular dada en el software, hallan la velocidad aproximada que lleva la pelota en un intervalo de tiempo determinado relacionándolo con la velocidad promedio que lleva la pelota en dichos intervalos.

El proporcionar ejemplos cotidianos a los estudiantes y cuestionarlos acerca del significado de la rapidez del cambio, da lugar a que hallen de forma más sencilla la rapidez del cambio del área bajo la curva velocidad, donde, a través de la comparación de la tabla que representa la velocidad aproximada y la rapidez del cambio del área bajo la curva velocidad. Teniendo en cuenta esto, Juliana plantea la siguiente conjetura.

la velocidad aproximada es igual a la rapidez del cambio del área bajo la curva veloudad en el cambio de tiempo.

Figura 15. Conjetura J

Al interactuar y discutir las conjeturas planteadas por cada uno, concluyen que: la rapidez del cambio del área bajo la curva velocidad corresponde a la rapidez del cambio de la distancia con respecto al tiempo, puesto que, en la primera situación, el área bajo la curva velocidad contra el tiempo corresponde a la distancia recorrida por la pelota.

Nivel Referencial

El objetivo principal de este nivel apunta a que los estudiantes: identifiquen y representen la velocidad instantánea, como la razón de cambio instantánea de la acumulación del cambio de la velocidad (razón de cambio instantánea de la distancia); relacionen la velocidad con la variación; y planteen modelos algebraicos de una magnitud en función de otra dada. Para ello se presentan las siguientes tareas:

e. Si los intervalos de tiempo se hacen cada vez más pequeños, ¿qué sucede con la razón de cambio del área con respecto al tiempo (rapidez)? Explique ampliamente y plantee una conjetura.

f. Halle la velocidad de la pelota a partir de la distancia en cualquier instante de tiempo t. Compare el resultado con la velocidad encontrada en la primera situación, ¿Qué puede concluir?

g. En la gráfica del área bajo la curva velocidad con respecto al tiempo (distancia con respecto al tiempo) ¿qué representa geométricamente la razón de cambio promedio y la razón de cambio instantánea?

h. Represente gráficamente los sucesos del ítem d y e.

Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.

Figura 16. Relación entre velocidad y razón de cambio instantánea de distancia

Al presentarles la tarea del ítem “e” (figura 16), los tres estudiantes, de acuerdo con la reflexión del modelo creado en el Nivel Situacional en la segunda situación, deducen que, si los intervalos de tiempo se hacen cada vez más pequeños, la razón de cambio del área con respecto al tiempo tiende a la velocidad instantánea.

Juliana, relaciona el suceso de la disminución de la magnitud de los intervalos de tiempo con el límite cuando el delta del tiempo tiende a cero, expresando dicho suceso de forma retórica y algebraica (figura 17). En este momento es importante resaltar la diferencia de la notación algebraica, del hecho de que los intervalos de tiempo se hacen cada vez más pequeños en la razón de cambio promedio del diferencial de la distancia con respecto al diferencial del tiempo.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \text{velocidad en un instante}$$

Figura 17. “Modelo de” J

Los estudiantes concluyeron que el hecho de que los intervalos de tiempo se hagan cada vez más pequeños afecta de forma directa a la velocidad promedio; dicho suceso permite acercase a la velocidad instantánea y se denota como un límite; pero no explicitaron su significado.

Principio de reinvención e interacción guiada

Al discutir con los estudiantes el significado del límite expresado en las conjeturas anteriores manifiestan que ese límite corresponde a la definición derivada; por lo que usan la derivada de la distancia para obtener la velocidad (figura 18). Cuando compararon las expresiones evidenciaron que son aproximadamente iguales.

"Sea $r(t) = 4{,}178t^2$ la función que representa la posición de la pelota con respecto al tiempo, $\frac{dr}{dt} = v$ entonces $v = 2(4{,}178t)$ de esa ecuación se puede concluir que la velocidad aumenta linealmente a medida que pasa el tiempo" (Arturo)

Figura 18. Justificación A

CONSOLIDACIÓN DE LAS DOS SITUACIONES

Nivel General

En las tareas diseñadas para este nivel (figura 19) se espera que los estudiantes: generalicen lo encontrado en el nivel anterior; planteen una conjetura acerca de la relación existente entre distancia-velocidad y velocidad-distancia con los objetos matemáticos pertinentes, de acuerdo con la asociación de las ideas de variación − derivada y acumulación − integral; encuentren y representen la relación entre cantidad variable, acumulación de cambio (integral) y razón de cambio instantánea de acumulación (derivada).

3. Plantee una conjetura acerca de la relación, en general, entre distancia–velocidad y velocidad-distancia. ¿cómo hallar una magnitud variable conociendo la otra? Plantee una conjetura.

   a. ¿La conjetura es válida para cualquier fenómeno que implique magnitudes variables con el mismo comportamiento? Argumente y justifique ampliamente sus respuestas.

   b. ¿Qué relación hay entre cantidad variable, acumulación de cambio (área bajo la curva) y razón de cambio de acumulación? Justifique sus respuestas.

   c. Represente algebraicamente la relación encontrada.

Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.

Figura 19. Relación entre variable, acumulación de cambio y razón de cambio de acumulación

Al pedirles conjeturar la relación general entre distancia-velocidad y velocidad-distancia, los estudiantes declararon las relaciones encontradas en las dos situaciones anteriores (figura 20), mencionando que dicha relación se cumple siempre por el hecho de ser magnitudes que dependen del tiempo, puesto que como nada alterará dicha variable, la velocidad y la distancia no cambiarán abruptamente su comportamiento lineal y parabólico respectivamente.

Para hallar la distancia cuando tenemos la velocidad integramos de está manera

$$\int_0^t v(t)\cdot dt = x(t)$$

cuando tenemos la distancia para encontrar la velocidad derivamos de está manera

$\frac{dx}{dt} = v(t)$, que también se podría plantear así:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta d}{\Delta t} = v(t)$$

Figura 20. "Modelo para" J

Las justificaciones anteriores, muestran la influencia del contexto en la toma de decisiones y justificaciones de acuerdo con la reflexión de los "modelos de" creados en el nivel Referencial.

Teniendo claras las relaciones entre las magnitudes variables involucradas en el fenómeno de caída libre; al momento de preguntarles si dichas relaciones se cumplen en otros fenómenos con magnitudes variables que tengan el mismo comportamiento, Juliana afirma que la conjetura es válida en cualquier otro fenómeno, pero siempre que se refiera a las magnitudes velocidad y distancia (figura 21), justificándolo por el hecho de que, si deriva la posición obtiene la velocidad, despreciando el comportamiento de estas. A pesar de que en justificaciones verbales manifiesta que, la derivada se puede interpretar como la pendiente de la recta tangente a una curva en cualquier punto, en su afirmación retórica afirma que al derivar obtiene una recta tangente y esta corresponde a la velocidad, suceso que evidencia dificultades en el proceso de comunicación puesto que confunde el significado de la derivada con la recta tangente al momento de escribir sus conjeturas.

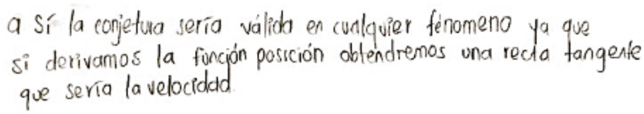

a sí la conjetura sería válida en cualquier fénomeno ya que
sí derivamos la función posición obtendremos una recta tangente
que sería la velocidad

Figura 21. Respuesta J

A pesar de que en la tarea "a" (figura 19) se hace referencia a otras magnitudes que tengan comportamiento lineal y cuadrático en fenómenos no necesariamente físicos, los estudiantes lo asociaron con el significado ubicado en el mismo contexto, es decir, tuvieron en cuenta solo fenómenos en los cuales estuvieran presentes las magnitudes velocidad y distancia.

Principio de reinvención e interacción guiada

Al preguntarle a los estudiantes explícitamente sobre la relación entre cantidad variable, acumulación del cambio y razón de cambio de la acumulación, les fue sencillo relacionar dichas ideas con la integral y derivada. A partir de los "modelos de" creados en las situaciones presentadas, ellos concluyen que la derivada y la integral están relacionadas de forma inversa, en el sentido de que lo hecho por una la otra lo deshace.

A pesar de que Harold (figura 22) representa algebraicamente dichas relaciones, refiriéndose a la distancia y la velocidad, y hace operaciones con ellas, concluye de forma general que, la integral es opuesta a la derivada, sin verificar de forma algebraica, si se cumple lo mismo al relacionar la derivada con la integral.

En la interacción Harold manifiesta que tanto la integral como la derivada están relacionadas de forma inversa, dando el significado de inversa a la idea de que, por ejemplo, al integrar una derivada obtiene la función original, argumentado siempre sus conjeturas por el proceso algebraico realizado, donde se evidencia la falta de conceptualización de la integral indefinida, ya que no tiene en cuenta la constante de integración.

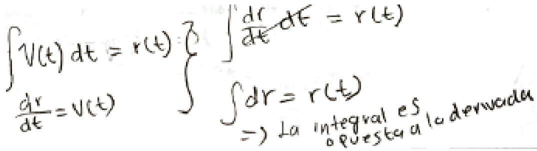
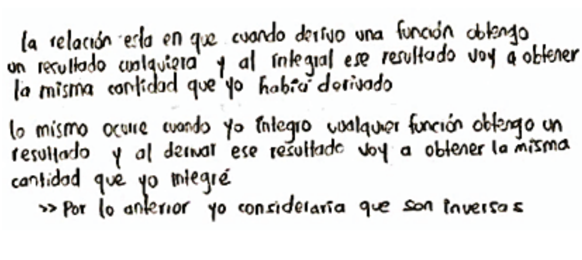


Figura 22. "Modelo para" H

En la argumentación dada por Arturo se evidencia la influencia del contexto al momento de realizar su conjetura, puesto que, a partir de lo observado en el comportamiento de las magnitudes variables velocidad y distancia con las ideas de integral y derivada, concluye que están relacionadas de forma opuesta, momento en el cual, Juliana le aclara que ella no las llamaría opuestas porque eso está relacionado con el signo de una magnitud, para ella son inversas porque "si hace una cosa y luego la otra, se devuelve".

Juliana (figura 23) realiza una conjetura retórica de acuerdo con las relaciones establecidas en las situaciones presentadas anteriormente. A pesar de que dichas relaciones hacen referencia a las funciones velocidad y distancia con respecto al tiempo, su conjetura en general está asociada a la idea de que la derivada y la integral son inversas, refiriéndose a que si deriva una función integral o si integra una función derivada llega a la función que estaba integrando y derivando respectivamente.


la relación esta en que cuando derivo una función obtengo
un resultado cualquiera y al integral ese resultado voy a obtener
la misma cantidad que yo había derivado

lo mismo ocurre cuando yo integro cualquier función obtengo un
resultado y al derivar ese resultado voy a obtener la misma
cantidad que yo integré

>> Por lo anterior yo consideraría que son inversas

Figura 23. "Modelo para" J

REFLEXIONES Y ORIENTACIONES PARA LOS PROFESORES

Frente al objetivo de la investigación, de la que se extrae la experiencia aquí reportada, se obtienen las siguientes reflexiones:

- En la primera situación en el Nivel Referencial, los estudiantes lograron identificar y representar retórica y algebraicamente la distancia recorrida por la pelota hasta un instante de tiempo t, como la acumulación del cambio de la velocidad desde el inicio del movimiento hasta ese instante. Inicialmente hubo confusiones acerca del significado y las diferencias entre la integral definida e indefinida, las cuales se aclararon gracias a la influencia del contexto físico y el análisis del efecto de las integrales en la situación. Aunque en las tareas se les pedía graficar la relación entre la distancia recorrida por la pelota y el área bajo la curva velocidad, solamente un estudiante logró hacerlo.
- En la segunda situación del Nivel Referencial, los estudiantes crearon modelos algebraicos y retóricos para representar la relación de la distancia recorrida en un intervalo de tiempo como la razón de cambio promedio; y la distancia recorrida en un instante de tiempo como la razón de cambio instantánea, interpretándola como el límite de la razón de cambio promedio de la velocidad cuando el intervalo de tiempo tiende a cero. Así mismo, soportaron sus argumentos en la representación algebraica de la relación entre la razón de cambio y la velocidad.
- A partir de la reflexión de los "modelos de" los estudiantes lograron identificar y representar la relación existente entre las magnitudes distancia y velocidad, con las ideas de acumulación del cambio de la velocidad y razón de cambio de acumulación de la velocidad.
- En el Nivel General, los estudiantes identificaron la relación existente entre derivada e integral, manifestando de forma explícita que están relacionadas de forma inversa, puesto que cada una deshace lo que hace la otra; sin embargo, los estudiantes no llegaron a establecer que la "integral de la función derivada no es la función original, sino que se diferencian en una constante" por tanto no se puede concluir que la comprensión del TFC es plena, motivo por el cual se considera que al trabajar hasta el nivel Formal puede llegarse a la comprensión plena del mismo, puesto que, en dicho nivel, a partir de la reflexión del "modelo para" puede cuestionarse y/o validarse lo encontrado.

Respecto a las tareas diseñadas, debemos mencionar que el tiempo es uno de los limitantes principales, puesto que para cada fenómeno se dedicaron 4 horas de clase, sin embargo, con la implementación de uno de ellos, consideramos que se logra introducir el TFC a partir del estudio de situaciones matemáticas realistas.

Implementar el EMR requiere un estudio riguroso de los fenómenos que den cuenta de los objetos matemáticos de estudio. Actualmente, el uso de las nuevas tecnologías puede ofrecer oportunidades que permiten un acceso ilimitado a sistemas de información y bases de datos que resultan útiles en la búsqueda de situaciones matemáticas realistas.

Promover el principio de interacción e invención guiada, es fundamental para que el paso de un nivel de matematización a otro se dé de forma natural, por tal razón, el papel del profesor debe ser de mediador y guía en el proceso de interacción. En este sentido, se tienen tres tipos de interacción, estudiante–software, estudiante–estudiante y estudiante–profesor. Antes de realizar cualquier tipo de ellas, es necesario que el estudiante se enfrente a la situación de forma individual para así fomentar el uso de sus presaberes y con la interacción, poder direccionarlo hacia el nivel Referencial y General.

REFERENCIAS

Alsina, A. (2009). El aprendizaje realista: una contribución de la investigación en educación matemática a la formación del profesorado. En M. J. Gonzáles, M. T. Gonzáles y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática* XIII (pp. 119-127). SEIEM.

Bressan, A., Gallego, M., Pérez, S. y Zolkower, B. (2016). E*ducación Matemática Realista. Bases Teóricas*. GPDM.

Drijvers, P., Boon, P., Doorman, M., Bokhove, C. y Tacoma, S. (2013). Digital design: RME principles for designing online tasks. En C. Margolinas (Ed), *Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22* (vol 1, pp. 56-62). Oxford.

Edwards, C. (1979) *The Historical Development of the Calculus*. Springer-Verlag.

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics, 3*, 413–435.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. D. Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education: China Lectures.* Kluwer Academic Publisher.

Goldin, G. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. En A. Kelly y R. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 517-544). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Gonzáles, O. (2015). Caracterización de la actividad argumentativa de estudiantes de educación media cuando trabajan en procesos de matematización de situaciones (Tesis de maestría no publicada), Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Gravemeijer, K. (1994). Educational development and developmental research in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(5), 443–471.

Gravemeijer y Doorman (1999). Context problems in realistic education: A calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics 39*, 111–129.

Gravemejer, K. y Terwuel, J. (2000). Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. *J. Curriculum Studies*, *32*(6), 777–796.

Henao, S. y Vanegas, J. (2012). La modelación matemática en la educación matemática realista: un ejemplo a través de la producción de modelos cuadráticos (Tesis de pregrado no publicada) Universidad del Valle.

Muñoz, G. (2000). Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo Integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 3*(2), 131–170.

Ponce, J. (2006). La argumentación y enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo en Profesores de Matemáticas. *Acta latinoamericana de Matemática Educativa, 20,* 79–83.

Robles, M., Tellechea, E. y Font, V. (2014). Una propuesta de acercamiento alternativo al teorema fundamental del cálculo. *Educación Matemática*, *26*(2), 69-109.

Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Ediciones Morata.

Tall, D. y Sheath, G. (1983). Visualizing Higher Level Mathematical Concepts Using Computer Graphics. En *Proceedings of the Seventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 357–362).

Tall, D. (1997). Functions and calculus. En A. J. Bishop *et al.* (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 289-325). Kluwer.

Turégano, P. (1998). Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las Ciencias, 16*(2), 233–249.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions: A model of goal and theory description in mathematics Instruction: The Wiskobas project.* Kluwer Academic Publishers.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: an example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics, 54*, 9–35.

Zambrano R., Escudero, D. y Medrano, E. (2019). Una introducción al concepto de derivada en estudiantes de bachillerato a través del análisis de situaciones de variación. *Educación Matemática, 31*(1), 258–280.

Ingrid Janeth Jácome Anaya

Dirección: Calle 11 # 13B-30 Torre 1 Apartamento 504.
Colombia, Departamento: Santander, Lebrija

Teléfono: +57 3128845234