Desarrollo del pensamiento Infinitesimal Leibniziano en una propuesta didáctica del cálculo para ingeniería

ISSN 1870-9095

Rogelio Romero Hidalgo[1], Javier Lezama[2], Ricardo Pulido Rios[1]
[1]*Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey. Av. Eugenio Garza Sada 2501 Sur, Tecnológico, 64849 Monterrey, N.L., México.*
[2] *Calz Legaria 694, Col. Irrigación, Miguel Hidalgo, 11500 Ciudad de México.*

E-mail: rogelioromerohidalgo@gmail.com

(Recibido el 5 de enero de 2022, aceptado el 27 de febrero de 2022)

Resumen
El uso de los diferenciales en la ingeniería ha conformado una práctica fundamental para la matematización de fenómenos que ahí se estudian, sin embargo, su enseñanza ha sido excluida o resulta confusa en los cursos tradicionales de Cálculo. En este trabajo se estudia una propuesta de enseñanza del cálculo que retoma este uso de los diferenciales. En particular se analiza una estrategia práctica con el uso de los diferenciales en el proceso de la matematización del flujo de un campo vectorial. Se constata la posibilidad de desarrollar el pensamiento infinitesimal Leibniziano como herramienta matemática indispensable para los estudios en ingeniería.

Palabras claves: Socioepistemología, Ingeniería, Cálculo, Matematización, Diferenciales.

Abstract
Use of differentials in engineering has formed a fundamental practice for the mathematization of phenomena that are studied there, however, its teaching has been excluded or confused in traditional Calculus courses. In this work a proposal for teaching calculus that takes up this use of differentials is studied. In particular, a practical strategy is analyzed with the use of differentials in the process of mathematizing the flow of a vector field. The possibility of developing Leibnizian infinitesimal thought as an indispensable mathematical tool for engineering studies is confirmed.

Keywords: Socioepistemology, Engineering, Calculus, Mathematization, Differentials

I. INTRODUCCIÓN

Cuando se desea coordinar curricularmente la enseñanza del cálculo y la física universitaria para las carreras de ciencias e ingeniería, los estudiantes presentan grandes dificultades para lograr una comprensión satisfactoria de los conceptos relacionados con el cálculo diferencial e integral, [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]. En estas investigaciones se identifica un bajo nivel de articulación en lo que se enseña en los cursos tradicionales de cálculo y la manera se usa este conocimiento otras disciplinas científicas. Particularmente en la investigación de Pulido [8, 11] se explica que en la física e ingeniería se recurre de manera significativa al uso de los argumentos geométrico-algebraico infinitesimales con diferenciales para muchos de sus procesos de matematización, mientras que en los cursos tradicionales de cálculo no existen este tipo de argumentos, de hecho, no existen los infinitesimales. Generándose, de esta forma, gran desconcierto en los estudiantes, pues se les presentan ideas y conceptos que difieren de la forma en que son usados en la matematización de la física e ingeniería.

En las carreras de ingeniería, el uso de los diferenciales ha conformado una práctica fundamental para la matematización de los fenómenos que ahí se estudian, así como para la construcción y definición de sus conceptos [12]. Este uso está asociado a una estrategia práctica con base epistemológica en el Cálculo de Leibniz, llamada Toma del Elemento Diferencial, cuya importancia en la matematización puede verse en los trabajos de Euler en dinámica de fluidos, Fourier en Transmisión del calor, Ampere en Electromagnetismo y Maxwell en la Teoría Electromagnética, así como para aplicaciones dentro de las áreas de Óptica, entre otros.

En particular, esta estrategia, ha jugado un papel fundamental para la matematización y comprensión de conceptos claves del cálculo vectorial como son los conceptos de Flujo y Circulación, que como se sabe son de gran importancia para la Física y la ingeniería, pues “solamente con estas dos nociones: flujo y circulación, podremos describir de una vez las leyes de la electricidad y magnetismo” [13].

En este artículo se presentan los resultados de una investigación que tuvo como objetivo evidenciar el desarrollo del pensamiento infinitesimal Leibniziano en una propuesta didáctica del cálculo, relativo al proceso de matematización del flujo de un campo vectorial. Propuesta que ha sido desarrollada con base en investigaciones doctorales como Alanís [7], Pulido [8] y presentada en los libros [14, 12, 15] y que tiene como característica fundamental el reconocimiento de las prácticas sociales como la base de la construcción del conocimiento matemático, así como, el uso declarado de los argumentos infinitesimales con diferenciales para los procesos de matematización.

La investigación se llevó a cabo en una institución educativa de estudios superiores al norte de México. La población de estudio fueron estudiantes del tercer semestre de las carreras de ingenierías y que están cursando la materia de Matemáticas III para Ingeniería. De manera particular para realización del estudio se eligieron tres grupos de clases de Matemáticas III y de tres profesores diferentes, considerando al profesor investigador. Estos grupos con la característica que han tomado previamente los cursos de Matemáticas I y II para Ingeniería, de dicha propuesta. En dos de los grupos se aplicaron pruebas piloto, que nos permitieron mejorar el examen diagnóstico con el cual obtuvimos finalmente los datos que se presentan en este escrito. Para la muestra de estudio se considera un grupo de 35 estudiantes de que cursan esta materia.

II. FUNDAMENTOS TEÓRICOS Y METODOLÓGICO

Se plantea en [16] que el conocimiento matemático, aun aquel que consideramos avanzado, tiene un origen y una función social asociados a un conjunto de actividades prácticas socialmente valoradas y normadas llamadas prácticas sociales. Y, en este sentido, se asume que el cálculo infinitesimal es un objeto cultural y tanto su enseñanza como su aprendizaje no pueden desvincularse de la práctica social que le dio sentido y significado.

Esta situación permite ubicar el presente estudio en el campo de la investigación en Matemática Educativa, disciplina académica que busca democratizar el aprendizaje de las matemáticas y en el marco de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME), la cual se ocupa del estudio de fenómenos didácticos ligados al saber matemático asumiendo la legitimidad de toda forma de saber, sea este popular, técnico o culto, pues considera que ellas, en su conjunto, constituyen la sabiduría humana.

En coherencia con la investigación de corte científico en Educación y Matemática Educativa se considera un marco metodológico que ha sido desarrollado bajo las premisas y principios de la TSME, [17]. En este sentido, se hace un estudio sobre la problematización del saber matemático entorno al uso del estilo diferencial Leibniziano, en su naturaleza epistemológica, cognitiva, didáctica, así como su uso en el marco social. Es así, como se plantea en [18], el reconocimiento y validación de distintas argumentaciones, la emergencia de las diversas racionalidades contextualizadas, el entendimiento del carácter funcional del saber, la resignificación progresiva considerando varios marcos de referencia en la base de la construcción del conocimiento a las prácticas sociales.

A partir de los principios de la socioepistemología y la inclusión del pensamiento infinitesimal Leibniziano, se plantea el diseño de Situaciones de Aprendizaje para la matematización del flujo de un campo vectorial. Esto a través de Situaciones-Problemas, las cuales pueden ser entendidas como un conjunto de condiciones de un fenómeno o preguntas que propician una problematización y serán el instrumento que permite el desarrollo de acciones en el sistema didáctico [19], en este caso, que permitan la construcción de un modelo matemático para la predicción de los valores del flujo de un campo vectorial en un contexto específico. La intención es identificar el grado de activación de los procesos infinitesimales con diferenciales para la descripción matemática de dichos fenómenos físicos, que permita dar cuenta de un desarrollo del pensamiento infinitesimal Leibniziano en los estudiantes.

III PROBLEMATIZACION DEL ESTILO DIFERENCIAL LEIBNIZIANO

A. Dimensión epistemológica

Se acepta que Isaac Newton (1643-1727) y Gottfried W. Leibniz (1646-1716) son los fundadores de lo que hoy conocemos como el Cálculo [20], pues ellos crearon una visión general para tratar los problemas de geometría, heredados de los griegos y los “nuevos” problemas de la física. Sin embargo, en sus estilos de pensamiento se pueden advertir algunas diferencias, que nos permitimos identificar.

Newton, en la presentación de sus ideas recurre a argumentos basados en el movimiento y la dinámica de los cuerpos, en tal sentido considera que las magnitudes son generadas en el tiempo por un movimiento continuo: así, una curva puede ser considerada como generada por un punto en movimiento, un área generada por el movimiento de una línea, un sólido generado por el movimiento de un plano, etc. De esta manera las variables son vistas como algo que cambia o fluye en el tiempo, fluente, y a su razón de cambio con respecto al tiempo, fluxión. Así el problema fundamental de su cálculo es encontrar la relación entre las magnitudes que fluyen: las fluentes y sus fluxiones. El tiempo se considera una variable privilegiada o la variable independiente por excelencia.

Newton explica que la razón de las fluxiones es igual a la primera o a la última de las razones de los incrementos o decrementos de las variables respectivamente. El caso de la razón última, que alcanzan justamente antes de desvanecerse en el cero o en la nada, y en el caso de su razón primera, que es la que tienen justamente al surgir del cero o de la nada, así pues, la razón es exactamente igual a esta razón última de los incrementos “evanescentes" o, equivalente, a esta razón primera de los incrementos “nacientes”. En la idea de la razón última se ha ligado al concepto de límites usado en los libros tradicionales de cálculo. [21].

Por su parte el cálculo de Leibniz nace en el seno de la geometría del siglo XVII y tiene su origen en el estudio de las curvas. Como se plantea en [22], precisamente en el estudio de las relaciones entre distintas cantidades geométricas variable, asociadas a las curvas, como son:

abscisa, ordenada, tangente, longitud de arco, área entre curvas. A diferencia del pensamiento de Newton, el establecimiento de relaciones entre cantidades geométricas variables, por medio de ecuaciones algebraicas, no presupone la existencia de una variable dependiente de una independiente, el tiempo, en el caso de Newton. "Las curvas en el cálculo Leibniziano son consideradas como polígonos con un número infinito de lados" [22].

En el cálculo Leibniziano la variable se concibe como una secuencia de valores infinitamente próximos, y que, al tomar la diferencia infinitamente pequeña, que existe entre cada dos valores sucesivos de la variable, se obtiene nuevamente una variable, que es precisamente el diferencial de la variable. El diferencial de la variable "*y*" se denota por "*dy"*. Esta operación puede aplicarse reiteradamente consiguiendo así: "*ddy*", "*dddy*". Una cantidad que es infinitamente pequeña con respecto a otra puede ser despreciada si se compara con ésta.

En una curva asociada a una ecuación con variables *"x, y"*, entonces *"ds"* (diferencial de curva) se relaciona con *"dx"* y *"dy"* formando el llamado Triángulo Característico. "Encontrar una tangente es dibujar una línea recta que une dos puntos de la curva que tienen una distancia infinitamente pequeña, es decir, el lado prolongado del polígono infinito angular que para nosotros es lo mismo que la curva, como"[22].

B. La Toma del elemento diferencial

Con el análisis de algunas producciones intelectuales de reconocido científico del siglo XVII y XVIII, como Euler en dinámica de fluidos, Fourier en Transmisión del calor, Ampere en Electromagnetismo y Maxwell en la Teoría Electromagnética, se permite reconocer un modo de matematizar basadas, por un lado, en consideraciones geométricas infinitesimales al estilo Leibniziano: "aceptar el teorema de Pitágoras en lo infinitamente pequeño" [8]. Y por otro lado un proceso de constantificación donde se busca "determinar el carácter (estable o eventualmente constante) de algunas de sus variaciones" [23].

Es así como en estos trabajos se ha podido identificar el nacimiento de todo un estilo de trabajo para la matematización de ciertos fenómenos de la naturaleza: "dividir el todo en partes infinitamente pequeñas, calcular las magnitudes correspondientes a ellas y sumarlas es parte de un proceso medular que corresponde a la necesidad de calcular el valor de una magnitud asociada a un todo" [15]. Lo cual se fue estableciendo como una estrategia práctica de uso común para analizar, cuantificar y matematizar ciertos fenómenos geométricos y de flujo continuo de la naturaleza.

El recurso de considerar un elemento de la curva cuando ésta es considerada como un polígono con un número infinito de lados rectos infinitamente pequeños, y donde cada lado puede medirse con un diferencial de longitud *dl*, o considerar una porción plana infinitesimal de área *dA* de una superficie curva visualizada como formada por un número infinito de superficies planas, es llamado un caso de la llamada "La Toma del elemento diferencial" [12].

C. Dimensión didáctica

A finales del Siglo XIX culminó la construcción del Análisis Matemático con lo que se obtuvo un fundamento riguroso del Cálculo. La noción épsilon-delta fue introducida en los argumentos demostrativos en aras de garantizar la legitimidad matemática. La idea, ampliamente difundida, de que los infinitesimales fueron eliminados por el triunvirato de Cantor, Dedekind y Weierstrass (señalados como los culminadores de la construcción del Análisis Matemático) es refutada en "Ten Misconceptions from the History of Analysis and Their Debunking" [21] señalando una larga cadena de trabajos en sistemas de números enriquecidos con infinitesimales.

De hecho, Michèle Artigue en [24], señala que cuando a finales del siglo XIX la construcción de los números reales a partir de los enteros y la definición moderna del límite proporcionaron fundamentos sólidos al cálculo diferencial e integral, los infinitésimos, y la metafísica que los rodeaba, fueron rechazados y su uso se volvió sinónimo de prácticas poco rigurosas, ya superadas. Afirma que, sin embargo, el lenguaje de los infinitésimos siguió siendo utilizado, por ejemplo, en la física; e incluso, continúa diciendo, en las matemáticas nunca desapareció por completo del discurso informal, del pensamiento heurístico de muchos investigadores.

Ahí mismo, Artigue se pregunta: ¿Es, pues, este lenguaje realmente incompatible con el rigor matemático? ¿Qué es lo que ofrece, interesante o específico, que explique su permanencia? Y luego responde: El Análisis no estándar, que se desarrolló en el siglo XX, ha permitido responder a estas preguntas y, a los infinitésimos, tomarse su revancha. La evidente utilidad en la física y la cuestionada legitimidad matemática marca claramente el inicio de una confrontación en el aspecto didáctico entre las matemáticas y la física que ha perdurado hasta nuestros días. Con respecto a esto en un escrito de [25], puede verse lo siguiente:

"*Así fue apareciendo un verdadero cisma entre la teoría y la práctica del cálculo, al mismo tiempo que el nivel de rigor en el propio cálculo iba subiendo: los que se dedicaban a cuestiones de fundamentos tenían un sistema de reglas y los aplicados otro.*" [25].

Es así como Abraham Robinson [26], a principios de la década de los 60's con la publicación de su libro Análisis no Estándar, introduce el concepto de número hiperreal que unido a construcciones basadas en la teoría de conjuntos, logra dar un significado preciso a los "infinitamente pequeños". Mostrándose así que el lenguaje de los infinitésimos es totalmente compatible con el rigor matemático. De esta manera son rehabilitados los infinitesimales en la Matemática, y así, cobra sentido el incorporar, sin sentimiento de culpa, el enfoque infinitesimal en la enseñanza. Es posible, entonces, aprovechar la simplicidad, advertida sobre todo por los físicos, de las ideas infinitesimales Leibnizianas en la matematización de los fenómenos de la naturaleza y en la formación de los conceptos relacionados con los problemas de la variación y cambio.

D. Dimensión Cognitiva

Después de que en el sistema didáctico se ha determinado un saber a enseñar, como se explica en Brousseau [27], éste se convierte en un saber transpuesto, despersonalizado, descontextualizado. Por lo que se convierte en labor del profesor proceder en sentido contrario al productor de tal conocimiento, debe contextualizar y repersonalizar el saber, es decir, debe buscar situaciones que den sentido a los conocimientos por enseñar. En este sentido se precisa del diseño de situaciones didácticas, que permitan establecer relaciones y controlar relaciones entre los componentes del sistema didáctico, a fin de favorecer la emergencia de aprendizaje en el contexto escolar.

En consideración con la Teoría de Situaciones Didáctica (TSD) el alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo ha hecho la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje, (Brousseau, 1986). Este supuesto constituye un elemento básico en la obra de Piaget, y se basa en principios de la psicología genética y de la psicología social, y se podrían resumir así: el aprendizaje se apoya en la acción.

En [28] se plantea que Brousseau, en su teoría considera la matemática como un conjunto organizado de saberes producidos por la cultura, lo cual permite concebir la diferencia entre el conocimiento que se produce en una situación particular y el saber estructurado y organizado. Resultando, entonces, que no se puede acceder al saber matemático si no se dispone de los medios para insertar las relaciones producidas en la resolución de un problema específico, en una construcción teórica que abarque dichas relaciones.

En este sentido, desde la perspectiva de la TSME [16], se plantea la necesidad de que la gestión didáctica responda a las exigencias del pensamiento, del aprendizaje y de los escenarios (culturales, históricos e institucionales) que requiere la actividad matemática; para ello, esta actividad se debe apoyar en los propios procesos mentales del estudiante: sus conjeturas, sus procesos heurísticos, sus ensayos y exploraciones; de esta manera se abre la posibilidad de que la intuición sirva como punto de partida para el trabajo en la clase.

"Para recuperar al conocimiento se debe regresar a su acción de partida, la acción de conocer, … los conocimientos desde el punto de vista de su contenido conceptual y su contenido factual, para ser objetivables, requieren del uso que da sentido al conocimiento, de herramientas y argumentos que tipifican al usuario y alas situaciones de aprendizaje, escolares o no, pero ligadas a la vida real donde se ponga en uso a dicho conocimiento, es decir, se constituya en saber" [16].

E. Dimensión Social

Se identifica a la predicción como una práctica social que permite la construcción del conocimiento matemático, [16], pues ante la imposibilidad de controlar el tiempo a voluntad obliga a los grupos sociales a predecir, a anticipar los eventos con cierta racionalidad. De igual manera a través de la problematización del saber matemático se han podido establecer argumentos que permiten identificar la estrategia de la Toma del elemento diferencial, en su rol de práctica de referencial dentro de la física e ingeniería, esto es conocer el todo a través de sus partes. La acción de descomponer algo en sus partes para reconocerlas y luego volver a juntarlas es una práctica recurrente en el ámbito social. Dentro de las ciencias física e ingeniería, esto se ha establecido como una estrategia para la matematización de fenómenos y conceptos llamada "Toma del Elemento Diferencial" [15].

Igualmente se identifica la linealización y a la constantificación como elementos de un mecanismo de práctica funcional. La linealización y constantificación es simplemente reconocer que así, como las curvas en lo infinitamente pequeño son rectas y el valor de una magnitud (la razón de cambio) se supone constante en un tramo infinitesimal, las superficies curvas son planas en lo infinitamente pequeño y un campo vectorial puede considerarse constante sobre un área infinitesimal de una superficie.

Sin duda, estos elementos que tienen su origen en las prácticas sociales permiten la creación de nuevos argumentos que constituyen herramientas para desentrañar los fenómenos de la naturaleza, que son de interés de la física e ingeniería. De hecho, las ideas de flujo llevadas a lo infinitamente pequeño, vía el pensamiento infinitesimal, permiten la construcción de una nueva derivada, como es la divergencia de un campo vectorial y establecerse el teorema: de la divergencia de Gauss; Éste, a su vez, permite un poderosos modo de caracterizar los campos vectoriales con sendas ecuaciones diferenciales parciales: como son las ecuaciones de Maxwell en su forma diferencial y la ecuación del calor.

IV. SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

Con el fin de construir una fórmula general para calcular el flujo de un campo vectorial sobre una superficie, se plantea distintas actividades de aprendizaje como "Situación-Problema". La manera en que se van desarrollando estas situaciones de aprendizaje es en término a la solución de una problemática en contextos reales afines al interés de los estudiantes. Se inicia con el tratamiento de una situación particular, simple y conocida, para luego desembocar en un caso más general. La idea es hacer emerger nociones, procedimientos y resultados del cálculo a través de una problemática relacionada al fenómeno de origen, en su forma simple, y que a su vez resulten familiares a los estudiantes [15].

Se inicia con el análisis del fenómeno del flujo de agua, que en principio es donde se originó el término y a su vez resulta familiar al estudiante y se contextualiza dentro de un salón de clase. Se plantea la necesidad de calcular la cantidad de agua que entra al salón de clase en un intervalo de tiempo dado. Aquí se introduce el concepto de campo vectorial, vector velocidad y Flujo. El campo de velocidades del agua en movimiento dará paso a la idea de campo vectorial en general. El flujo es considerado la razón a la que atraviesa un fluido (o cualquier otro fluido) una superficie imaginaria, en un intervalo de tiempo y una dirección determinada. La visualización gráfica juega un papel importante en la concreción de las ideas.

Estas actividades se proponen que sean realizadas como actividad central en el salón de clases. Primeramente, se proponen en forma individual, luego se propone una discusión por equipos de tres o cuatro estudiantes y al final el profesor coordina una puesta en común de las respuestas de los equipos. Por ello, como se plantea en [7], se pretende que los alumnos interactúen con el objeto de conocimiento, discutan entre iguales las ideas que de él se formen y que se dé un proceso de socialización de estas; respetando con esto lo que nos indican la psicología cognitiva y psicología social. Favoreciéndose a su vez que los estudiantes conduzcan sus reflexiones hacia formulaciones y validaciones. Cada Situación Problema consta de secuencias de actividades. En cada una se prevé la emergencia del pensamiento infinitesimal Leibniziano como recurso para atender la necesidad de construir la formulación matemática.

Caso 1. Fluido con velocidad constante y perpendicular a una superficie plana.

Situación Problema

Se parte de la situación más simple, donde el campo de velocidades del fluido del agua es constante y atravesando perpendicularmente una superficie plana. Se pide imaginar una compuerta en el piso del salón de clases y que por cada punto de ella fluye agua al interior del salón en forma perpendicular al piso y con rapidez constante.

El dibujo de la compuerta en el piso del salón de clase se corresponde a una región rectangular en el plano *"xy"*.

Como se ha considerado que el agua fluye de manera perpendicular al piso del salón, donde está la compuerta y lo hace a velocidad constante hacia el interior del salón, entonces la representación de cada vector en las esquinas es un vector con la misma magnitud, dirección y sentido. Si se el vector velocidad en cada uno de los puntos de la compuerta se formaría una caja rectangular sólida, formada por todos los vectores de igual magnitud, dirección y sentido que se corresponde con todos los vectores de la región del plano que forma la compuerta. Esto se corresponde a un ortoedro sólido con la base rectangular en el piso del salón. Figura 1.

Ahora para calcular la cantidad de agua que entra al interior del salón de clase en un segundo, se hace notar que éste se corresponde con el volumen de la figura formada. Esta idea permite ir asociando el concepto de flujo con la de volumen, solo considerando que el volumen es una magnitud no negativa y el flujo puede ser positivo o negativo en dependencia de la velocidad y la dirección a la que se mide el flujo. La base de la caja está determinada por los lados de la compuerta y la altura por la magnitud del vector velocidad.

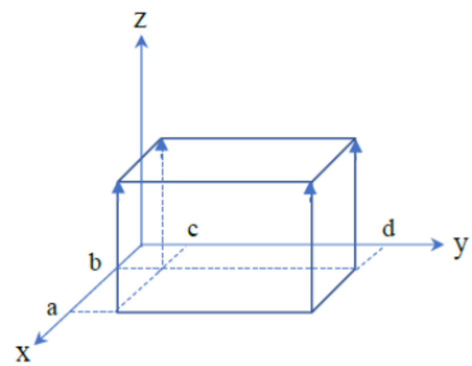

FIGURA 1. Representación gráfica del volumen formado al imaginar una compuerta rectangular en el piso del salón de clases y que por cada punto de ella fluye agua al interior del salón en forma perpendicular al piso, pero ahora con velocidad constante.

Caso 2. Fluido con velocidad variable y perpendicular a una superficie plana.

Situación Problema

En esta situación se considera, nuevamente, imaginar una compuerta rectangular en el piso del salón de clases y que por cada punto de ella fluye agua al interior del salón en forma perpendicular al piso, pero ahora con velocidad variable. Al dibujar los vectores de velocidad correspondiente a las esquinas de la compuerta, en los lados y al interior, se reconoce que la figura que se formaría no es un ortoedro como en el caso anterior. Aquí se presenta el reto de calcular el volumen del sólido formado. Figura 2

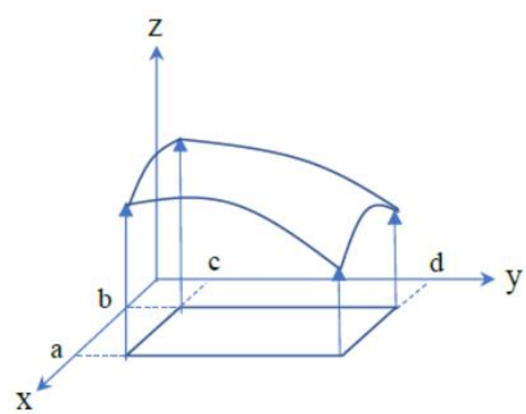

FIGURA 2. Representación gráfica del volumen formado al imaginar una compuerta rectangular en el piso del salón de clases y que por cada punto de ella fluye agua al interior del salón en forma perpendicular al piso, pero ahora con velocidad variable.

Se hace notar que no puede usarse la manera de resolver el caso anterior pues la figura ya no es un ortoedro. La propuesta es la de encontrar el volumen del sólido por medio de la descomposición en rebanadas infinitesimales y sumarlas: $V = \int dV$. Esto se corresponde al uso de la estrategia de la Toma del Elemento diferencial, mismo que ha sido usado en situaciones anteriores para encontrar, longitud de curvas, áreas, masas, así como volumen de un sólido de revolución. Esto consiste en imaginar cortes a la figura en forma de rebanadas infinitesimales. En este caso es viable hacer cortes con planos paralelos al plano *"yz"* en dirección del eje "*x*" o cortes con planos paralelos al plano *"xy"* en dirección del eje *"y"*. Como puede notarse se generan dos maneras de obtener el mismo volumen.

Si se considera el corte en dirección del eje *"x"* el volumen de cada rebanada se corresponde a un diferencial de volumen *dV*, cuyo valor puede obtenerse de calcular el área correspondiente multiplicado por el ancho de la rebanada infinitesimal *dx*. Luego sumando todos los diferenciales de volumen a lo lardo del intervalo [*a*, *b*] se obtiene el volumen del sólido, el cual correspondería al flujo deseado.

$$V=\int_a^b dV=\int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy\,. \tag{1}$$

De la misma manera si se considera el corte en dirección del eje " y " el volumen de cada rebanada se corresponde a un diferencial de volumen *dV*, cuyo valor puede obtenerse de calcular el área correspondiente multiplicado por el ancho de la rebanada infinitesimal *dy*. Luego sumando todos los diferenciales de volumen a lo lardo del intervalo [*c*, *d*] se obtiene el volumen del sólido, el cual correspondería al flujo deseado.

$$V=\int_c^d dV=\int_c^d\int_a^b f(x,y)dydx\,. \tag{2}$$

Caso 3. Fluido con velocidad constante no perpendicular a una superficie plana.

Situación Problema

Nuevamente se pide imaginar una compuerta rectangular en el piso del salón de clases y que por cada punto de ella fluye agua al interior del salón de clases, pero ahora en forma no perpendicular al piso, pero con velocidad constante. Al dibujar los vectores de velocidad correspondiente a dicho fluido se observa que se forma un ángulo con la dirección perpendicular (normal $\hat{N}$) del plano. Figura 3.

En este caso se considera el fluido atravesando una superficie plana rectangular pero no perpendicular a dicha superficie. En este caso, la componente escalar de la velocidad en la dirección normal a la superficie: $(\vec{F}\cdot\hat{N})$ es la que contribuye al flujo, obteniéndose la fórmula para el flujo como:

$$Flujo=\left|\vec{F}\right|\cos(\theta)A=(\vec{F}\cdot\vec{N})A\,. \tag{3}$$

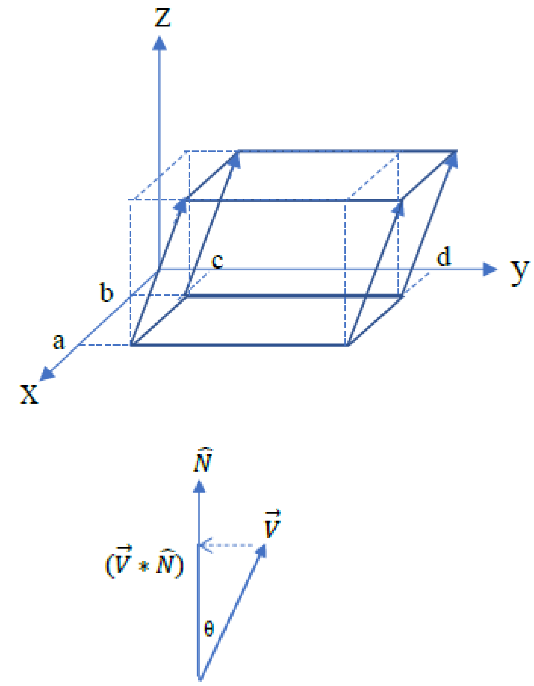

FIGURA 3. Representación gráfica del volumen formado al imaginar una compuerta rectangular en el piso del salón de clases y que por cada punto de ella fluye agua al interior del salón en forma no perpendicular al piso, pero ahora con velocidad constante.

Caso 4. Fluido con velocidad variable atravesando una superficie curva.

Situación Problema

Aquí se presenta un caso general donde se pide calcular el flujo del fluido con velocidad variable atravesando una superficie curva. El fluido se desplaza con velocidad variable $\vec{F}(x,y,z)$, en magnitud y dirección, y atravesando una superficie curva *S*.

En este caso general no podemos usar alguno de los casos anteriores, por lo que de igual manera se considera la estrategia de Toma del elemento diferencial para hacer la formulación matemática. Para el caso de la superficie de la curva consideramos los elementos diferenciales de superficie *dS*, que se linealizan en lo infinitesimal. De igual manera para cada porción de superficie infinitesimal se constantifica la velocidad, esto es considerar que es constante en dicha porción infinitesimal. De aquí se obtiene que el flujo infinitesimal. Finalmente, al sumar todas las diferenciales de flujos, correspondiente, a todas las porciones infinitesimales de superficies S se obtiene que el flujo total. Figura 4.

$$Flujo=\iint_S(\vec{F}\cdot\hat{N})dS\,. \tag{4}$$

A la integral resultante en el planteamiento del cálculo del flujo se le llama Integral de Superficie, porque el objeto donde se integran o suman los diferenciales de flujo es una superficie.

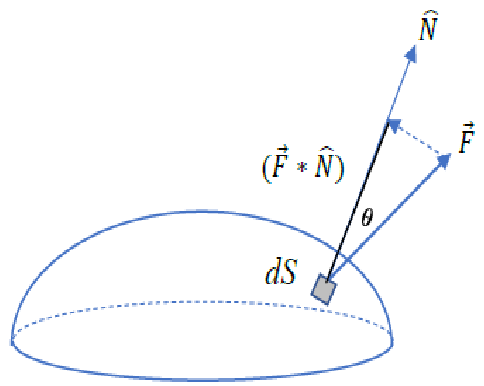

FIGURA 4. Representación gráfica del volumen formado al imaginar una compuerta rectangular en el piso del salón de clases y que por cada punto de ella fluye agua al interior del salón en forma no perpendicular al piso, pero ahora con velocidad variable.

V. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

En esta parte, con el objetivo de evidenciar la comprensión del uso de la Toma del elemento diferencial, relativos al proceso de matematización del flujo, se presentan los resultados de las actividades exploratorias y de estudio realizadas. Para ello se consideraron tres grupos de clases. Tomando en consideración el alcance exploratorio de esta investigación, se consideró un grupo de clases de 37 estudiantes que están cursando Matemáticas para Ingeniería III, curso que ha sido impartido por el profesor investigador. Como muestras para el análisis, se eligieron las respuestas de tres estudiantes del grupo. Como se indica en (Hernández Sampieri et al., 2014), en los estudios cualitativos el tamaño de la muestra no posee importancia, ya que el interés del investigador no es generalizar los resultados de su estudio a una población más amplia. Se ha de considerar el número de casos que permita responder a las preguntas de investigación y acorde a la contribución que se piensa hacer con ella.

Primeramente, se consideró aplicar una pregunta exploratoria a dos de los grupos participantes, para un total de 72 estudiantes. Luego se consideró la aplicación las preguntas del estudio al tercer grupo, de 37 estudiantes. Estas preguntas fueron incluidas como preguntas complementarias en el examen final del curso.

Pregunta Exploratoria

Para construir la fórmula general para calcular el flujo de un campo a través de una superficie en una dirección dada se recurrió a la estrategia de tomar un diferencial de superficie, ¿cómo es que esta estrategia ayuda en el cálculo de flujo?

A continuación, se muestran algunas de respuestas planteadas por los estudiantes:

Respuesta: "*Si el campo vectorial varía de manera no lineal de acuerdo con la posición, no se podría determinar el flujo de manera geométrica. Con el diferencial se obtiene el flujo en cada parte minúscula de la superficie y al sumarlas todas en una integral se obtiene el flujo total de manera exacta"*

Respuesta: "*La estrategia ayuda porque la superficie no es curva. Se necesita encontrar los flujos en cada porción infinitesimal para luego sumarlos y que nos dé el flujo total*

Respuesta: "*Ya que el flujo no es el mismo en cada superficie. Es de ayuda evaluarlo en un tramo pequeño para posteriormente realizar una sumatoria con límites establecidos. El uso del diferencial de superficie simplifica la operación y permite la evaluación ya sea en una figura irregular o una fuerza variable"*

El análisis de estas respuestas permitió hacer un ajuste a la pregunta del estudio y cambiar algunos elementos de ésta. Para el estudio se aplicó una pregunta a un grupo de 37 estudiantes. Como inicialmente es el estudio de investigación estaba considerando la matematización del flujo y la matematización de la circulación, se incluyeron preguntas de ellos en dos tipos de examen Tipo A y Tipo B. Finalmente debido a lo extenso que podría resultar el análisis, y tomando en cuenta que el objetivo de la investigación se podía cumplir tomando en cuenta un solo concepto, se consideró hacer el análisis para el tema relacionado a la matematización del Flujo. En este caso la cantidad de estudiantes de estudio es 17 estudiantes.

Pregunta de estudio

Se desea calcular el flujo de un campo vectorial variable a través de una superficie curva. Describa con sus palabras un procedimiento general que permita obtener el valor de la del flujo del campo vectorial a través de una superficie.

En esta pregunta se plantea el cálculo del flujo de un campo vectorial para el caso más general, donde el campo es variable y atravesando una superficie curva. En este sentido se pide que haga una descripción del procedimiento que de manera general puede usar convenientemente para calcular el flujo total. Se espera que el estudiante reconozca la pertinencia del pensamiento infinitesimal Leibniziano para encontrar la fórmula general del flujo. En lo que sigue describimos la respuesta de cada alumno con su respectivo análisis.

En particular, para el análisis de las respuestas a esta pregunta se consideraron indicadores cuatro elementos que caracterizan al pensamiento infinitesimal Leibniziano y que fueron identificados en el estudio epistemológico:

- descomposición infinitesimal,
- la linealización,
- constantificación y
- suma de infinitesimales.

A continuación, se muestran algunas significativas de tres estudiantes antes la pregunta de estudio.

Respuesta Alumno 1 – "*Primero se toma una porción de la superficie infinitamente pequeña, que es un cuadrado (plano). Luego se analiza la contribución infinitesimal del* *campo en este específico punto, tomando en cuenta cómo se comporta y el área del cuadrado, esto se hace para que el campo en este punto sea constante. Una vez que se tiene la contribución infinitesimal, se busca acumular todas estas contribuciones dentro de la región de la superficie".*

Respuesta	Categoría
Primero se toma una porción de la superficie infinitamente pequeña, que es un cuadrado (plano).	Descomposición infinitesimal
Luego se analiza la contribución infinitesimal del campo en este específico punto, tomando en cuenta cómo se comporta y el área del cuadrado,	Linealización
esto se hace para que el campo en este punto sea constante.	Constantificación
Una vez que se tiene la contribución infinitesimal, se busca acumular todas estas contribuciones dentro de la región de la superficie.	Suma infinitesimal

Respuesta Alumno 2 - La superficie se divide en muchas porciones o regiones infinitamente pequeñas. En cada una de esas superficies diminutas, es posible calcular cuánta proyección o contribución en sentido perpendicular ejerce el campo vectorial. Además, se dice que, en cada porción infinitesimal, se mantiene constante el campo vectorial. A este proceso se le llama constantificación. Finalmente se suman todas las pequeñas cantidades de flujo a lo largo de la superficie para encontrar el flujo total.

Respuesta	Categoría
La superficie se divide en muchas porciones o regiones infinitamente pequeñas.	Descomposición infinitesimal
En cada una de esas superficies diminutas, es posible calcular cuánta proyección o contribución en sentido perpendicular ejerce el campo vectorial	
Además, se dice que, en cada porción infinitesimal, se mantiene constante el campo vectorial. A este proceso se le llama constantificación.	Constantificación
Finalmente se suman todas las pequeñas cantidades de flujo a lo largo de la superficie para encontrar el flujo total.	Suma infinitesimal

Respuesta Alumno 3 - Se necesita conocer la función del campo vectorial que actúa sobre esta superficie. Como es una superficie curva se tomarán pequeñas porciones de ésta y se considerarán planas. Una vez que tengamos esta pequeña porción de área, se considerará la pequeña porción de flujo que pasa a través de ella (dF), y este se calculará a partir de la función del campo vectorial dada y multiplicarla por el vector normal (que nos indica la dirección del flujo respecto a nuestra superficie). Una vez obtenido éste se debe sumar todos los pequeños flujos que existen en nuestra superficie curva considerando los límites de nuestra región.

Respuesta	Categoría
Se necesita conocer la función del campo vectorial que actúa sobre esta superficie.	
Como es una superficie curva se tomarán pequeñas porciones de ésta y se considerarán planas.	Linealización
Una vez que tengamos esta pequeña porción de área, se considerará la pequeña porción de flujo que pasa a través de ella (dF), y este se calculará a partir de la función del campo vectorial dada y multiplicarla por el vector normal (que nos indica la dirección del flujo respecto a nuestra superficie).	Constantificación
Una vez obtenido éste se debe sumar todos los pequeños flujos que existen en nuestra superficie curva considerando los límites de nuestra región.	Suma infinitesimal

Respuesta Alumno 4 - Normalmente para calcular el flujo necesitamos multiplicar la velocidad por el área, pero, siendo ésta una superficie curva y partiendo de un campo vectorial variable, debemos de tomar un elemento infinitesimal en la cual la superficie curva tienda a ser lineal (linealización). Así mismo, debemos tomar un elemento infinitesimal del campo para que se constantifique su valor. Después vamos a sumar las contribuciones para evaluar el flujo.

Respuesta	Categoría
Normalmente para calcular el flujo necesitamos multiplicar la velocidad por el área, pero, siendo ésta una superficie curva y partiendo de un campo vectorial variable, debemos de tomar un elemento infinitesimal	Descomposición infinitesimal
en la cual la superficie curva tienda a ser lineal (linealización).	Linealización
Así mismo, debemos tomar un elemento infinitesimal del campo para que se constantifique su valor.	Constantificación
Después vamos a sumar las contribuciones para evaluar el flujo.	Suma infinitesimal

VI. CONCLUSIONES

Con la implementación de las situaciones de aprendizaje presentada en este estudio, a fin de construir una fórmula general para calcular el flujo, fue posible identificar argumentos y hechos que permiten afirman que es factible el desarrollado el pensamiento infinitesimal Leibniziano, así como favorecer un cambio significativo en la relación del saber del estudiante en torno al uso de los diferenciales. El análisis de las respuestas de los estudiantes puede notarse como se evocan algunos indicadores característicos del pensamiento infinitesimal Leibniziano, mismos que fueron identificados en el estudio epistemológico realizado.

En este diseño de las situaciones de aprendizaje para la matematización del flujo no se privilegia el carácter lógico deductivo del cálculo, sino que se enfatiza la activación de las prácticas de predicción, medición, matematización. De esta forma se permite ir más allá de los procedimientos algorítmicos y las fórmulas y provocar la activación de los argumentos geométricos, algebraicos y visuales en el contexto de lo infinitesimal.

Con el desarrollo del presente trabajo se pretende contribuir al mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo universitario. En este sentido, se aportan elementos a favor de una reconstrucción entre la didáctica del cálculo y la didáctica de la física e ingeniería, que logre articular los contenidos asociados al uso de los diferenciales, en términos a la manera como éste es usados en otras áreas de la ciencia. Y de este modo, favorecer el aprecio del conocimiento matemático en su calidad de herramienta para resolver problemas en contextos reales afines a sus aspiraciones académicas de los estudiantes.

VII. REFERENCIAS

[1] Freudenthal, H., *Mathematics as an Educational Task*, (D Reidel. Dordrecht, *Dordrecht-Holland*, 1973).

[2] Imaz, C., *Breve teoría infinitesimalista de las ecuaciones diferenciales*' en Investigaciones en Matemática Educativa II, Didáctica, (Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1998), pp. 363-367.

[3] Artigue, M., *Reaction. Learning and teaching analysis: What can we learn from the past in order to think about the future?* En Coray, D., Furinghetti, F., Gispert, H., Hodgson, B.R., Schubring, G. (Eds.), One Hundred Years of L'Enseignement Mathématique: Moments of Mathematics Education in the Twentieth Century, Monograph **39**. Génova: L Enseignement Mathématique, 211–223 (2003).

[4] Cantoral, R., *Desequilibrio y equilibración. Categorías relativas a la apropiación de una base de significados propias del pensamiento físico para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las funciones analíticas*, Tesis de Doctorado, Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México, México, (1990). Consultado: el 9 de mayo de 2017.

[5] Farfán, R. M., *Construcción de la noción de convergencia en ámbitos fenomenológicos vinculados a la ingeniería. Estudio de caso.*, Tesis de Doctorado, CINVESTAV IPN, (1993).

[6] Cordero, F., *Cognición de la integral y la construcción de sus significados: un estudio del Discurso Matemático Escolar*, Tesis de Doctorado, Cinvestav del IPN, México, (1994).

[7] Alanís, J. A., *La Predicción: un hilo conductor para el rediseño del discurso escolar del cálculo*, Tesis de Doctorado, Cinvestav del IPN, México, (1996).

[8] Pulido, R., *Un estudio teórico de la articulación del saber matemático en el discurso escolar: La transposición didáctica del diferencial en la física y la matemática escolar,* Tesis de Doctorado, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México, (1998).

[9] Salinas, P., *Un estudio socioepistemológico sobre el Método de Euler como generador de procedimientos y nociones del Cálculo en el contexto del estudio del cambio.*, Tesis de Doctorado, CICATA del IPN, México, (2010).

[10] Castro, C., *La enseñanza y el aprendizaje del concepto de flujo del campo eléctrico en el nivel superio*, Tesis de Doctorado, ITESM, México, (2013).

[11] Pulido, R., *La enseñanza de los diferenciales en las escuelas de ingeniería desde un enfoque socioepistemológico*, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* **13**, 85–97, (2010).

[12] Salinas, P., Alanís, R. Pulido, F. Santos, J. C. Escobedo, y J. L. Garza, *Cálculo aplicado: Competencias matemáticas a través de contextos. Tomo II*, **2**, (CENGAGE Learning, México, 2012).

[13] Feynman, R., Leighton, R. B., Sands, M., L., Gómez, R., *Lecciones de física de Feynman*, (Prentice-Hall Logman , Person Educación, México, 1998).

[14] Salinas, P., Alanís, J. A., Pulido, R., Santos, F., Escobedo, J. C. & Garza, J. L., *Matemáticas preuniversitarias. Significado de nociones y procedimientos*, (Trillas, México, 2003).

[15] Salinas P., Alanís, J. A., Pulido, R., Santos, F., Escobedo, J. C., Garza, J. L., *Cálculo Aplicado: Competencias matemáticas a través de contextos. Tomo III*, vol. 3. (CENGAGE Learning, México, 2013).

[16] Cantoral, R., *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*, Segunda edición, (Gedisa, Barcelona, 2016).

[17] Buendía, G. & Montiel, G., "Propuesta metodológica para la investigación socioepistemológica.", *Memorias de la XIV Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, pp. 443–454, (2011).

[18] Reyes-Gasperini, D. & Cantoral, R., *Socioepistemología y Empoderamiento: la profesionalización docente desde la problematización del saber matemático*, Boletim de Educação Matemática **28**, 360–382 (2014).

[19] Suárez, L., *Modelación-graficación una categoría para la matemática escolar: Resultados de un estudio socioepistemológico*, Tesis de Doctorado no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México D.F., México, (2008).

[20] Kleiner, I., *History of the Infinitely Small and the Infinitely Large in Calculus* **48**, No. 2/3, Infinity: The Never-Ending Struggle, *Educational Studies in Mathematics* **48**, 137-174 (2001).

[21] Błaszczyk, P., Katz, G., & Sherry, D., *Ten Misconceptions from the History of Analysis and Their Debunking*, *Found. Sci*. **18**, 43–74, (2013).

[22] Bos, H. J. M., *Differentials, higher-order differentials and the derivative in the Leibnizian calculus*, Archive for History of Exact Sciences, (1974).

[23] Cantoral, R., *Matemática educativa: Un estudio de la formación social de la analiticidad*, (Grupo Editorial Iberoamérica, México D. F., 2001).

[24] Spoenemann, S., *La revancha de los infinitésimos*, *Blog Proyecto Klein*, (2014).

[25] Grattan-Guinness, I., *Del Cálculo a la Teoría de Conjuntos, Una Introducción Histórica*, *(Alianza Editorial, Madrid*, (1984), pp. 1630 1910.

[26] Robinson, A., *Non-standard analysis*, (Princeton University Press, Princeton, N. J, 1996).
[27] Brousseau, G., *La théorie des situations didactiques*, (La Pensée Sauvage, Grenoble, 1999).
[28] Sadovsky, P., *La Teoría de Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática*. En Alagia, H., Bressan, A., Sadovsky, P.Kulesz, O., *Reflexiones teóricas para la educación matemática*, (Libros del Zorzal, Buenos Aires, (2005), pp. 14–68.