

# Solución equivalente del problema de Dirichlet usando transformada de Legendre y funciones de Green, representada por la fórmula integral de Poisson



Tifa De Jesús, Pedro Nazario y Toribio Milané, Juan

Universidad Autónoma de Santo Domingo (UASD), República Dominicana.

E-mail: D19B3849@educacion.edu.do

(Received 16 September 2021, accepted 27 October 2021)

## Resumen

Este artículo presenta la solución al problema de Dirichlet para un potencial dentro de una esfera unitaria utilizando dos técnicas de solución donde se recorren diferentes caminos para obtener una solución equivalente al problema a través de la integral de Poisson. Para lograr esta unificación de las técnicas mencionadas, se presentan las diferentes propiedades que justifican los procedimientos utilizados para su obtención.

**Palabras clave:** Problema de Dirichlet, transformada de Legendre, funciones de Green.

## Abstract

This article presents the solution to the Dirichlet problem for a potential within a unitary sphere using two solution techniques where different paths are traveled to obtain an equivalent solution to the problem through the Poisson integral. To achieve this unification of the techniques, the different properties that justify the procedures used to obtain them are presented.

**Key word:** Dirichlet problem, Legendre transform, Green Functions.

## I. INTRODUCCIÓN

Los diferentes problemas físicos se pueden modelar mediante ecuaciones diferenciales, la física se centra en resolver estas ecuaciones que involucran funciones derivables de manera que para su solución se introdujeron condiciones que pueden ser iniciales o contorno que permitan resolver las distintas ecuaciones, esas condiciones nos conducen a los principales problemas iniciales o de frontera tales como, el problema de Cauchy, el problema de Newman, el problema de Robin, el problema de Dirichlet entre otros, este último es uno de los grandes problemas clásicos, se han buscado diferentes métodos para su solución [1], originalmente se introdujo para dar solución a la ecuación de Laplace, luego se extendió a otras ecuaciones y con diferentes dominios, más adelante se introdujeron otros tipos de problemas como los problemas de Newman y Robin, y cuando se combinan dos de estos entonces tenemos un problema mixto [2]. En este artículo estudiamos el problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en una esfera unitaria, utilizando dos caminos diferentes para obtener la misma representación de la solución. Existen diferentes métodos y técnicas para resolver este problema para ciertos dominios, algunas de estas presentan limitaciones, por lo que los esfuerzos se enfocaron en encontrar métodos más eficientes para resolverlo.

Hasta 1920 los métodos conocidos fueron el método de funciones sub-armónicas, el método de ecuaciones integrales y el método variacional [3], luego George Green introduce

ciertas funciones llamadas funciones de Green, las que más tarde se demostró que existen para cualquier dominio de  $\mathbb{R}^n$ .

Otra técnica que puede usarse para tales propósitos son las transformadas, las más conocidas y usadas con mayor frecuencia son, la transformada de Fourier y la transformada Laplace, Fourier fue el precursor en el uso de esta técnica a partir de la cual se conocen muchos tipos de transformadas, en este artículo se propone utilizar una transformada poco conocida pero que para el problema en cuestión resulta ser muy novedosa, es la transformada de Legendre [4], que se define para una función  $f(x)$  en el intervalo  $-1 < x < 1$ , con la integral

$$\mathcal{T}_n \{f(x)\} = \int_{-1}^1 P_n(x) f(x) dx. \quad (1)$$

Su inversa se define por

$$f(x) = \mathcal{T}_n^{-1} \{ \tilde{f}(n) \} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{2n+1}{2} \right) \tilde{f}(n) P_n(x). \quad (2)$$

Este método nos permite acceder directamente a los polinomios de Legendre y sus propiedades los cuales son utilizados como núcleos de esta.

**Ejemplo 1.** Si  $|x| \leq 1$ ,

$$\mathcal{T}_n \left\{ (1 - 2xr + r^2)^{-\frac{1}{2}} \right\} = \frac{2r^n}{(2n+1)}. \quad (3)$$

**Ejemplo 2.** Si  $|x| \leq 1$ ,

$$\mathcal{T}_n \left\{ (1 - 2xr + r^2)^{-\frac{2}{3}} \right\} = \frac{2r^n}{(1-r^2)}. \quad (4)$$

Esta técnica hereda las principales propiedades de los operadores de espacios como la unicidad, la linealidad, la continuidad, otras se demuestran en los siguientes teoremas:

**Teorema 1. (Forma diferencial)**

Si  $f'(x)$  y  $f''(x)$  son continuas e integrables en un subintervalo cerrado de  $-1 \leq x \leq 1$ , si además  $\mathcal{T}_n \{f(x)\}$  existe y

$$\lim_{|x| \rightarrow 1} (1 - x^2)f(x) = \lim_{|x| \rightarrow 1} (1 - x^2)f'(x) = 0, \quad (5)$$

entonces

$$\{R[f(x)]\} = n(n - 1)\tilde{f}(n). \quad (6)$$

$\{R[f(x)]\}$  es llamada la forma diferencial de  $f$  y está dada por la expresión

$$\{R[f(x)]\} = \frac{d}{dx} [(1 - x^2) \frac{d}{dx} f(x)], \quad n > 0. \quad (7)$$

**Prueba.** La prueba consiste en aplicar la definición de la transformada de Legendre y con la ayuda de la técnica integral por partes llegamos a la ecuación de Legendre y su solución (1)

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_n \{R[f(x)]\} &= \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} [(1 - x^2) \frac{d}{dx} f(x)] P_n(x) dx \\ &= \frac{d}{dx} \left[ (1 - x^2) \frac{d}{dx} P'_n(x) \right] + n(n + 1)P_n(x) = 0 \\ &\rightarrow T_n \{R[f(x)]\} = T_n \{-n(n + 1)f(x)\}. \end{aligned}$$

**Colorario 2**

$$T_n \{R^k [f(x)]\} = (-1)^k n^k (n + 1)^k \tilde{f}(n). \quad (8)$$

La prueba se realiza aplicando el principio de inducción Matemática.

**Teorema 3. (Convolución) Si**

$$\mathcal{T}_n \{f(x)\} = \tilde{f}(n) \quad \text{y} \quad \mathcal{T}_n \{g(x)\} = \tilde{g}(n), \text{ entonces}$$

$$\mathcal{T}_n \{f(x) * g(x)\} = \tilde{f}(n) \cdot \tilde{g}(n), \quad (9)$$

donde la convolución  $f(x) * g(x)$  está dada por:

$$f(x) * g(x) = h(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(\cos \mu) \sin \mu \, d\mu \int_0^\pi g(\cos \lambda) \, d\beta, \quad (10)$$

con  $x = \cos(v)$  y  $\cos \lambda = \cos \mu \cos v + \sin \mu \sin v \cos \beta$ .

**Prueba.** Aplicando la definición de transformada dada en (1) y la propiedad de convolución

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_n \{f(x)\} &= \mathcal{T}_n \{f(\cos \mu)\} = \tilde{f}(n) = \int_0^\pi f(\cos \mu) P_n(\cos \mu) \sin \mu \, d\mu. \\ \mathcal{T}_n \{g(x)\} &= T_n \{g(\cos \lambda)\} = \tilde{g}(n) = \int_0^\pi g(\cos \lambda) P_n(\cos \lambda) \sin \lambda \, d\lambda. \end{aligned}$$

$$\rightarrow \tilde{f}(n) \cdot \tilde{g}(n) = \int_0^\pi f(\cos \mu) P_n(\cos \mu) \sin \mu \, d\mu \int_0^\pi g(\cos \lambda) P_n(\cos \lambda) \sin \lambda \, d\lambda,$$

agrupando los  $P_n$

$$\begin{aligned} \tilde{f}(n)\tilde{g}(n) &= \int_0^\pi f(\cos \mu) \sin \mu \, d\mu \\ &[\int_0^\pi g(\cos \lambda) P_n(\cos \lambda) P_n(\cos \mu) \sin \lambda \, d\lambda] d\mu. \end{aligned}$$

Donde

$$P_n(\cos \lambda) P_n(\cos \mu) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi P_n(\cos v) \, d\alpha,$$

con  $\cos v = \cos \lambda \cos \mu + \sin \lambda \sin \mu \cos \alpha$  el producto permanece como sigue

$$\begin{aligned} \tilde{f}(n)\tilde{g}(n) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(\cos \mu) \sin \mu \\ &[\int_0^\pi \int_0^\pi g(\cos \lambda) P_n(\cos v) \sin \lambda \, d\alpha d\lambda] d\mu. \quad (11) \end{aligned}$$

Usando un artificio geométrico dentro del corchete

$$\int_0^\pi \int_0^\pi g(\cos \mu \cos v + \sin \mu \sin v \cos \beta) P_n(\cos v) \sin v \, dv \, d\beta, \quad (12)$$

cambiando el orden de integración

$$\begin{aligned} \tilde{f}(n)\tilde{g}(n) &= \int_0^\pi P_n(\cos v) \sin v \\ &[\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi f(\cos \mu) \sin \mu g(\cos \lambda) \, d\mu d\beta] \, dv. \end{aligned}$$

Tomando la expresión dentro del corchete y nombrándola como  $h$

$$h(\cos v) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(\cos \mu) \sin \mu \int_0^\pi g(\cos \lambda) \, d\beta. \quad (13)$$

$$\rightarrow \tilde{f}(n)\tilde{g}(n) = \int_0^\pi h(\cos v) P_n(\cos v) \sin v \, dv. \quad (14)$$

**II. FUNCIONES DE GREEN**

Las funciones de Green son un caso particular de distribuciones, estas funciones se usan a menudo para resolver problemas de la teoría de Sturm Louville, también se usan para resolver problemas de borde cuando fallan los otros métodos.

Para problemas de la física, las funciones de Green se utilizan comúnmente para encontrar soluciones para una fuente que ocupa dominios de espacio y tiempo finitos al representar la fuente como una distribución densa de fuentes puntuales impulsivas. Estas funciones pueden ser escalares, diádicas o tensores. Las diádicas se utilizan con frecuencia en electromagnetismo. Una diádica se considera equivalente a una matriz cuadrada: más comúnmente, una matriz de orden (3x3). Al caracterizar el proceso físico representado por una ecuación diferencial lineal, la función diádica de Green mapea una fuente general (un vector) en la solución correspondiente (un vector) de una ecuación diferencial [5].

Las funciones de Green no tienen una forma específica, se definen en función de las propiedades que tienen y, a veces, encontrar estas funciones tiene un poco de dificultad. A continuación, se presenta una definición que nos proporciona una idea de cómo identificar una función de Green [6], pero en general tales funciones deben cumplir con las propiedades propuestas en el teorema descrito más adelante.

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un abierto no vacío y acotado tal que  $\partial\Omega$  es de clase  $C^1$ . Sea  $A(\Omega) = (\bar{\Omega} \times \Omega) \cup A = \{(x, y) \in \bar{\Omega} \times \Omega, x \neq y\}$ . Una función de Green en  $\Omega$  (para el problema de Dirichlet-Laplace) es una función  $G = A(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $G(x, y) = \Phi(x - y) - \varphi_x(y)$ ,  $\forall (x, y) \in \partial\bar{\Omega} \times \Omega$ .

A la función  $P(x, y) = -\partial_n G(x, y)$ ,  $x \in \Omega \wedge y \in \partial\bar{\Omega}$ , se le llama **núcleo de Poisson**.

**Teorema 4. (Propiedades de las funciones de Green)**

Dado una región  $\Omega$  con frontera  $\partial\Omega$  se tienen las siguientes propiedades de las funciones de Green:

- (i) **Armonicidad.**  $G(x, y)$  es una función armónica de  $(x, y)$  en  $\{\Omega - (x_0, y_0)\}$ .
- (ii) **Nulidad.**  $G(x, y) = 0$  para todo  $(x, y)$  en la frontera  $\partial\Omega$ .
- (iii) **Negatividad.**  $G(x, y; x_0, y_0) \leq 0$  para todo  $(x, y)$  en  $\{\Omega - (x_0, y_0)\}$ .
- (iv) **Unicidad.** La función de Green es única y determinada por la región.
- (v) **Simetricidad.**  $G(x, y; x_0, y_0) = G(x_0, y_0; x, y)$ ,  $\forall (x_0, y_0) \text{ y } (x, y)$  en  $\Omega$ .

**Prueba.** Para (i), por definición  $G(x, y)$  es una función de clase  $C^2(\Omega)$ , ya que  $G(x, y)$  se define por la solución fundamental  $\Phi(x)$  la cual es armónica. Luego  $\nabla^2 G(x, y) = 0$ .

En (ii) es consecuencia de la definición. Para la prueba en (iii), (iv), (v) se toma un disco centrado en  $(x_0, y_0)$  se utiliza el hecho de que  $G$  es armónica [6]. Las funciones de Green se utilizan a menudo como núcleo integral conocidas como el núcleo integral de Poisson, esta integral se construye de forma distintas dependiendo de las condiciones descritas en la frontera de un dominio dado, para nuestro caso que es la esfera se construyen utilizando el método de imágenes [7]. El problema de Dirichlet en un dominio  $\Omega$  con frontera suficientemente suave  $\partial\Omega$  tiene como solución una expresión de la forma

$$u(x) = - \int g(y) \partial_n G(x, s) dS_y. \tag{15}$$

**III. EL PROBLEMA DE DIRICHLET**

Dado un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  y una función  $f: \Delta\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , el problema de Dirichlet consiste en encontrar una función  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{\Delta\Omega} = f. \end{cases}$$

Los resultados del siguiente teorema nos permiten determinar que, si existe una solución al problema, entonces esta es única.

**Teorema 5. (Principio del máximo débil)**

Si  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  es un abierto no vacío y  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  es una función tal que  $-\Delta u \leq 0$  en  $\Omega$ , entonces

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u. \tag{16}$$

Por otro lado, se tiene que

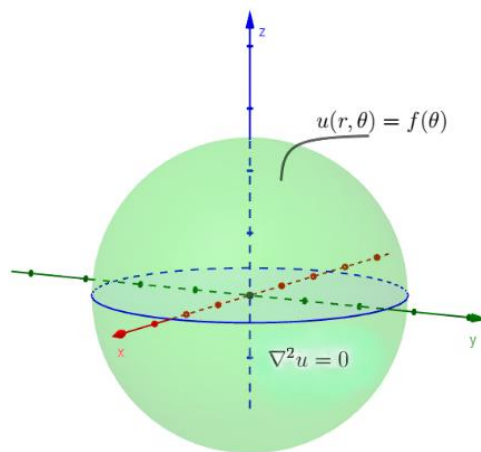
$$u \leq 0 \text{ en } \partial\Omega \rightarrow u \leq \bar{0}. \tag{17}$$

**Colorario 6.** Existe como máximo una única función  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  que es solución de

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } \Omega, \\ u = g \text{ en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Para la prueba del teorema y su colorario consulte [6].

Ahora, considere una esfera unitaria en  $\mathbb{R}^3$ , sin fuentes externas sometidas a una temperatura constante, donde en la frontera la temperatura está dada por una función  $f(\theta)$  conocida, como describe la figura 1.



**Figura 1.** Problema de Dirichlet en la esfera.

#### IV. RESULTADOS

##### Teorema 7. (Solución equivalente del problema de Dirichlet en la esfera)

Tomando una esfera unitaria con las condiciones descritas en la figura 1 el problema de Dirichlet a resolver será

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0, \\ u(1, \theta) = f(\theta). \end{cases}$$

La solución del problema de Dirichlet en una esfera unitaria con simetría está dada por la integral de Poisson.

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi f(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta \int_0^\pi \frac{(1-r^2)d\phi}{(1-2r \cos v + r^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (18)$$

**Prueba.** Para encontrar la solución equivalente al problema, primero usaremos transformada de Legendre [4].

Escribiendo el problema de Dirichlet en coordenadas esféricas con simetría, tomando un cambio de variables apropiado y luego aplicando transformada de Legendre se tiene

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2} \tilde{u}(r, n) + 2r \frac{d}{dr} \tilde{u}(r, n) - n(n+1)\tilde{u}(r, n) = 0. \quad (19)$$

$$\tilde{u}(r, n) = \tilde{f}(n). \quad (20)$$

Que tiene como solución

$$\tilde{u}(r, \theta) = \tilde{f}(n)r^n, \quad 0 < r < 1, \text{ para } n = 0, 1, 2, \dots \quad (21)$$

aplicando transformada inversa a ambos lados en (21)

$$\mathcal{T}_n^{-1} \tilde{u}(r, n) = \mathcal{T}_n^{-1} \tilde{f}(n)r^n,$$

recordando el ejemplo (2)

$$\mathcal{T}_n^{-1} r^n = \frac{1}{2} (1-r^2)(1-2xr+r^2)^{-\frac{2}{3}}, \quad (22)$$

y con ayuda del teorema (3)

$$f(x) * g(x) = h(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(\cos \mu) \sin \mu \, d\mu \int_0^\pi g(\cos \lambda) \, d\beta. \quad (23)$$

Sustituimos (22) en (23) para obtener (18)

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi f(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta \int_0^\pi \frac{(1-r^2)d\phi}{(1-2r \cos v + r^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Donde  $\cos v = \cos \theta' \cos \theta_0 + \sin \theta' \sin \theta_0 \cos(\phi' - \phi_0)$   
 $\wedge r = r_0, \theta = \theta' - \theta_0, \phi = \phi' - \phi_0.$

Por otro lado, utilizando funciones de Green [11], se construye un punto de la forma

$$||\tilde{x}_0|| = \frac{R^2}{||x_0||}, \quad (24)$$

entonces la técnica a seguir será construyendo una función de la forma  $G_{x_0} = w_{x_0} + h_{x_0}$ , tal que se cancele en los puntos de la frontera, con ayuda del método de las imágenes y la ley del coseno, una función válida para cualquier par de puntos dentro de la esfera, siempre que se verifique que

$$||x - \tilde{x}_0|| = \frac{R^2}{r_0} ||x - x_0||. \quad (25)$$

Las funciones de Green serán la suma de esta función y la solución fundamental del Laplaciano [7], de tal forma que

$$G_{x_0} = \frac{R}{4\pi r_0 ||x - \tilde{x}_0||} - \frac{1}{4\pi ||x - x_0||}. \quad (26)$$

luego aplicando la derivada normal se tiene

$$\frac{dG_{x_0}(x)}{dS} \Big|_{r=R} = \frac{dG_{x_0}(x)}{dr} \Big|_{r=R} = \frac{1}{4\pi R} \frac{R^2 - r^2}{(1-2r \cos v + r^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (27)$$

Finalmente, aplicando el teorema de las identidades de Green y cambiando el elemento de superficie

$$u(r, \theta, \phi) = \int_{\partial\Omega} f(r, \theta, \phi) \partial_n G_{x_0}(x) dS = \iint_{\Omega} f(r, \theta, \phi) \partial_n G_{x_0}(x_0) d\Omega, \quad (28)$$

Donde  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ . Sustituyendo (27) en (28) se obtiene

$$u(r, \theta, \phi) = \frac{R^2 - r^2}{4R\pi} \int_0^\pi d\theta \int_0^\pi \frac{f(\theta) \sin(\theta) d\phi}{(r^2 + R - 2Rr \cos v)^{\frac{3}{2}}}. \quad (29)$$

Donde  $\cos v = \cos \theta' \cos \theta_0 + \sin \theta' \sin \theta_0 \cos(\phi' - \phi_0)$   
 $\wedge r = r_0, \theta = \theta' - \theta_0, \phi = \phi' - \phi_0.$

Aprovechando la simetría que brinda el sistema y tomando  $R=1$  obtenemos la solución (18).

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi f(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta \int_0^\pi \frac{(1-r^2)d\phi}{(1-2r \cos v + r^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Utilizando procesos de construcción distintas para las técnicas propuestas en este artículo obtenemos la solución equivalente al problema.

**Ejemplo 3.** Encontrar el estado estacionario de la temperatura dentro de una esfera unitaria, donde en un punto del hemisferio superior de la misma es de  $80^\circ$  y en la parte inferior es de  $0^\circ$ . Las condiciones de frontera están planteadas por la función

$$f(\theta) = \begin{cases} 80 \text{ si } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \\ 0 \text{ si } \frac{\pi}{2} < \theta < \pi. \end{cases}$$

Solución. Usando la integral de Poisson (18), la solución del problema es

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi 80 \, d\theta \int_0^\pi \frac{(1-r^2)d\phi}{(1-2r \cos v+r^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (30)$$

Pero la integral no nos proporciona la información necesaria, por lo que al transformar la expresión usando (2) obtenemos una solución en serie

$$u(r, \theta) = 80 \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{2n+1}{2} \right) r^n P_n(\cos \theta). \quad (31)$$

Usando la fórmula de Rodríguez para obtener los polinomios y calculando los coeficientes de la serie, la solución se puede escribir en la forma

$$u(r, \theta) = 40 + 20 \sum_{n=0}^{\infty} (4n+3) \frac{(-1)^n (2n!)}{2^{2n} (n!)^2 (n+1)} r^{2n+1} P_{2n+1}(\cos \theta). \quad (32)$$

## V. CONCLUSIONES

Encontrar las funciones de Green en cierto tipo de problemas físicos puede resultar una tarea tediosa, ya que no existen un conjunto de procedimientos que nos orienten como encontrar tales funciones, sin embargo, si el problema es del tipo Sturm-Liouville, entonces existen tales procesos que nos guían cuando las ecuaciones son de primer orden. Por otro lado para ciertos dominios si queremos encontrar las funciones de Green podemos usar el método de las funciones analíticas en variables complejas, mientras que en otros se puede lograr usando algún tipo de transformada y en nuestro caso mediante procesos geométricos, pero en general no existe un conjunto de procedimientos que nos guíen en la construcción o determinación de las funciones de Green para todos los dominios, por lo que se consideran funciones sin forma específica ya que estas varían de dominios en dominios. La transformada de Legendre permite resolver problemas tipo Dirichlet de forma más práctica, ya que, los polinomios de Legendre (utilizados como núcleo integral) aparecen en la solución de forma natural, lo que permite aprovechar las

propiedades de estos y resolver los problemas, obteniendo como resultado una solución más práctica y amigable.

Para estudios futuros se recomienda extender el uso de las transformadas de Legendre a otros dominios y ver con cuales técnicas podría esta relacionarse. Finalmente, se puede concluir que por el método de la transformada nos permite obtener mayores ventajas de aproximación que los métodos numéricos, ya que no tenemos que preocuparnos por los errores de aproximación.

## REFERENCIAS

- [1] Iturrán-Viveros, U., *Legado e historia del método de elementos de frontera (BEM)*, (Seminario de análisis numérico y computo científico, México, 2014).
- [2] Álvarez, N., *Polinomios Ortogonales: Historia y Aplicaciones*, (Boletín Sociedad Española de matemática Aplicada, **18**, pág. 19-45, España, 2001).
- [3] Carro, M., *El problema de Dirichlet y otros problemas de peso*, (Universidad de Barcelona, España, 2015).
- [4] Debnath, L. & Bhatta, D., *Integral Transforms and Their Applications*, (3rd Edition by Chapman y Hall / CRC, United State, 2015).
- [5] Muhammad, F. & Akhlesh, L., *Infinite-Space Dyadic Green Functions in Electromagnetism*, (Publisher IOP Concise Physics, Pakistán, 2018).
- [6] Asmar, N., *Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems*. (Pearson Prentice Hall, USA, 2004).
- [7] Fernández, J., *Ecuaciones diferenciales parciales*, (Departamento de Matemática Facultad de Ciencias Exactas y Naturales Universidad de Buenos Aires, 2014).
- [8] San Martín, L., *El Problema  $L_p$  Dirichlet para la Ecuación de Laplace*, (Universidad de Sonora, Departamento de Matemáticas, Tesis de grado. México, 2011).
- [9] Sansone, G., *Orthogonal Functions*, (Dover Publications; Revised edition, United States, 2004).
- [10] Martín, J. y Real, J., *Ecuaciones en Derivadas Parciales y Análisis Funcional*, (Apuntes, Madrid, España, 2011).
- [11] *Ecuaciones Diferenciales*, Recuperado en Julio 20 del 2019 de <https://ocw.upm.es/matematica-aplicada/Ecuaciones/diferenciales/contenidos/desarrollo-tema/tema7.pdf>.