INTERNATIONAL JOURNAL OF PHILOSOPHY
Con-Textos Kantianos

CON-TEXTOS KANTIANOS.
International Journal of Philosophy
N.º 14, December 2021, pp. 135-160
ISSN: 2386-7655
Doi: 10.5281/zenodo.5775983

Kant sobre el método matemático

JAAKKO HINTIKKA

Universidad de Boston, USA

(Traducción de Rafael Reyna Fortes*)

1. EL MÉTODO MATEMÁTICO SE RESUELVE EN CONSTRUCCIONES

De acuerdo con Kant, "el conocimiento matemático es el conocimiento obtenido por la razón a partir de la construcción de conceptos". En este artículo, haré algunas sugerencias acerca de cómo debe entenderse esta caracterización del método matemático.

La caracterización es dada al final de la *Crítica de la razón pura*, en el primer capítulo de la Doctrina trascendental del método (A713/B741).[1] En este capítulo, Kant da una serie de observaciones adicionales sobre el asunto del método matemático. Estas consideraciones no han sido examinadas con suficiente atención por la mayoría de los estudiosos de los escritos de Kant. Frecuentemente, han sido tratadas como un tipo de apéndice a las teorías más conocidas de Kant respecto a espacio y tiempo, presentadas en la Estética trascendental. En este artículo, también quiero llamar la atención sobre el hecho de que la relación de las dos partes de la primera crítica es, en gran medida, notablemente diferente de su concepción más habitual.

* Universidad Complutense de Madrid. rareyna@ucm.es. Este trabajo de traducción se ha realizado bajo el marco del proyecto de la Universidad Complutense de Madrid "La deducción trascendental de las categorías: nuevas perspectivas" UCM PR65/19-22446. El equipo editor de CTK declina cualquier responsabilidad en la obtención de derechos de reproducción de los textos traducidos.

[1] Al referirme a la *Crítica de la Razón Pura*, usaré las convenciones estándar A = primera edición (1781), B = segunda edición (1787). Todas las buenas ediciones y traducciones dan la paginación de una o ambas ediciones. Al citar pasajes de la primera *Crítica* en inglés, seguiré normalmente la traducción de Norman Kemp Smith (MacMillan, Londres-Nueva York, 1933).

[Received: 21 de abril de 2021
Accepted: 6 de noviembre de 2021]

Para volver a la caracterización kantiana: el primer término importante que contiene es la palabra ‘construcción’. Este término es explicado por Kant al decir que construir un concepto es lo mismo que exhibirlo, a priori, en una intuición que corresponde al concepto.[2] Construcción, en otras palabras, es equivalente a la transición de un concepto general a una intuición que representa el concepto, dado que esto se hace sin recurrir a la experiencia.

2. UNA INTERPRETACIÓN CORRIENTE DE LAS CONSTRUCCIONES KANTIANAS

¿Cómo debe entenderse este término ‘construcción’? No es sorprendente encontrarlo en una teoría de las matemáticas, ya que fue, en tiempos de Kant, un uso establecido en, al menos, una parte de las matemáticas y, en particular, en geometría. Es, por tanto, natural, asumir que lo que Kant tiene en mente en primer lugar en el pasaje citado con anterioridad, son las construcciones de los geómetras. También puede parecer plausible decir que la referencia a la intuición en la definición de la construcción está pensada para preparar la base para la justificación del uso de tales construcciones, que Kant da en la estética trascendental. ¿Qué garantía hay, si la hubiera, de asegurar que las construcciones matemáticas son siempre posibles? Newton había encontrado la única fundamentación de las construcciones geométricas en lo que él llamó ‘práctica mecánica’ (ver el prefacio de los *Principia*). Pero, si esto es así, entonces, la certeza de la geometría no es mayor que la certeza de la mera práctica mecánica. Puede parecer natural que la apelación kantiana a la intuición sea designada para proveer de una mejor fundamentación a las construcciones geométricas. Kant parecería estar diciendo que no hay necesidad de construir una figura sobre un trozo de papel o en una pizarra. Todo lo que tenemos que hacer es representar la forma en cuestión por medio de la imaginación. Este procedimiento estaría justificado por el resultado de la estética trascendental, si es que éste puede ser aceptado. Ya que lo que se ha mostrado de modo manifiesto es que todas las relaciones geométricas son dependientes de la estructura de nuestra sensibilidad (nuestro aparato perceptivo, si preferimos el término); por esta razón,

[2] *Loc. cit.*

CON-TEXTOS KANTIANOS
International Journal of Philosophy
N.º 14, December 2021, pp. 135-160
ISSN: 2386-7655
Doi: 10.5281/zenodo.5775983

pueden ser representados completamente en la imaginación sin ayuda de las impresiones sensibles.

Esta interpretación es la base de una crítica frecuente a la teoría kantiana de las matemáticas. Se dice, o es dado por hecho, que en matemáticas se puede prescindir de las construcciones en el sentido geométrico de la palabra. Todo lo que tenemos que hacer aquí es desarrollar ciertos argumentos lógicos que pueden ser completamente formalizados en términos de la lógica moderna. La única razón por la que Kant pensó que la matemática se basa en el uso de la construcción fue que las construcciones eran necesarias en la geometría elemental de su tiempo, derivada, en la mayoría de los casos, casi directamente de los *Elementa* de Euclides. Pero esto fue solo una característica accidental de ese sistema geométrico, y lo fue a causa de que el conjunto de los axiomas y postulados de Euclides era incompleto. Para probar todos los teoremas que Euclides quería probar era, por tanto, insuficiente desarrollar un argumento lógico. Él tenía que preparar un diagrama o figura de modo que él pudiera apelar tácitamente a nuestra intuición geométrica que, de este modo, podría suplir las asunciones latentes que él había omitido. Se afirma, por tanto, que la teoría kantiana de las matemáticas surge al tomar como un rasgo esencial de toda la matemática algo que sólo era una consecuencia de un defecto en la axiomatización particular de la geometría euclidiana.[3]

Esta interpretación, así como las críticas basadas en ella, no es irrelevante como objeción a la completa teoría kantiana del espacio, del tiempo y de las matemáticas tal y como aparece en la Estética Trascendental. Me parece, sin embargo, que no hace justicia al modo en que Kant llegó realmente a su teoría. No da cuenta suficientemente de las consideraciones precríticas de la matemática, e incluso parece fallar a la hora de dar sentido a los argumentos por medio de los cuales Kant intentó probar su teoría. Por tanto, no nos da la posibilidad de exponer completamente los verdaderos argumentos de Kant sobre espacio, tiempo y matemáticas, o criticarlos con justicia. No es tanto falso como estrecho.

[3] Una afirmación paradigmática de esta interpretación aparece en la *Introducción a la filosofía de la matemática* de Bertrand Russell (George Allen & Unwin, Londres, 1919), p. 145: "Kant, having observed that the geometres of his day could not prove their theorems by unaided arguments, but required an appeal to the figure, invented a theory of mathematical reasoning according to which the inference is never strictly logic, but always requires the support of what is called 'intuition'." No hace falta decir que no parece haber ningún tipo de evidencia para atribuir a Kant la 'observación' que Russell menciona.

3. LA NOCIÓN KANTIANA DE INTUICIÓN

Empezamos a tomar en consideración la insuficiencia de la anterior interpretación cuando examinamos la noción de construcción más en detalle. La definición de este término hace uso de la noción de *intuición*. Tenemos que preguntar, por tanto: ¿qué pretendía decir Kant con el término 'intuición'? ¿Cómo definió él ese término? ¿Cuál es la relación de esa noción de intuición con lo que estamos acostumbrados a asociarle?

La interpretación que he bosquejado brevemente antes asimila la noción kantiana de una intuición a priori a lo que podemos llamar imágenes mentales. Intuición es algo que puedes poner ante los ojos de la mente, algo que puedes visualizar, algo que puedes representar a tu imaginación. Este no es, sin embargo, para nada el significado básico que Kant mismo quiso dar a la palabra. De acuerdo con su definición, presentada en el primer parágrafo de sus lecciones de lógica, toda idea particular, a diferencia de los conceptos generales, es una intuición. En otras palabras: todo lo que en la mente humana representa un individuo es una intuición. No hay, podría decirse, nada de 'intuitivo' en las intuiciones así descritas. La 'intuitividad' [o el carácter intuitivo] significa, simplemente, individualidad.[4]

Por supuesto, sigue siendo verdadero que más tarde, en su sistema, Kant llegó a hacer intuitivas las intuiciones de nuevo, y lo hace, en particular, arguyendo que todas nuestras intuiciones humanas están vinculadas a la sensibilidad, es decir, con nuestra facultad de percepción sensible. Pero tenemos que mantener en la mente que esta conexión entre intuiciones y sensibilidad no fue tomada por Kant como una mera consecuencia lógica de la definición de intuición. Al contrario, Kant insiste a lo largo de toda la Crítica de la razón pura, que no es impensable que otros seres puedan tener intuiciones por medio de otros sentidos.[5]

[4] Véase, por ejemplo, la *Dissertatio* de 1770 de Kant, sección 2, §10; *Crítica a la razón pura* A320/B376-377; *Prolegomena* §8. Otras referencias se encuentran en la obra de H. Vaihinger *Commentar zu Kants Kritik der reinen Vernunft* (W. Spemann, Stuttgart, 1881-1892), vol. 2, pp. 3, 24. Véase también C. C. E. Schmid, *Wörterbuch zum leichteren Gebrauch der Kantischen Schriften* (4th ed., Cröker, Jena, 1798) en *Anschauung*.

[5] "No podemos afirmar de la sensibilidad que ella sea el único tipo posible de intuición" (A254/B310). Véase, por ejemplo, A27/B43, A34-35/B51, A42/B59, A51/B75, y la característica expresión 'uns Menschen wenigstens' en B33.

CON-TEXTOS KANTIANOS
International Journal of Philosophy
N.º 14, December 2021, pp. 135-160
ISSN: 2386-7655
Doi: 10.5281/zenodo.5775983

La conexión entre sensibilidad e intuición era, para Kant, algo que debía ser probado, y no algo que deba ser asumido.[6] Las pruebas que él dio para asumir esta conexión (en el caso de los seres humanos) son presentadas en la Estética Trascendental. Por tanto, estamos en nuestro derecho de asumir la conexión entre sensibilidad e intuiciones solo en aquellas partes del sistema kantiano que son lógicamente posteriores a la Estética Trascendental.

4. LA PRIMACÍA SISTEMÁTICA DE LA TEORÍA KANTIANA DEL MÉTODO MATEMÁTICO

Mi principal sugerencia para una interpretación de la teoría kantiana del método matemático, como la presentada al final de la primera Crítica, es que esta teoría no es posterior, sino más bien sistemáticamente previa a la Estética Trascendental. Si esto es así, se sigue que, dentro de esta teoría, el término 'intuición' debería ser tomado en el sentido 'no intuitivo' que Kant le dio al definir esta noción. En particular, la caracterización kantiana de las matemáticas como basadas en el uso de las construcciones tiene que ser tomada como queriendo decir meramente que, en matemáticas, uno está todo el tiempo introduciendo representaciones particulares (*particular representatives*) de conceptos generales, y desarrollando argumentos en los términos de tales representaciones particulares, argumentos estos que no pueden ser desarrollados solamente por medio de conceptos generales. Puesto que, si la metodología de las matemáticas kantiana es independiente de sus pruebas para conectar intuiciones y sensibilidad en la Estética, e incluso antes de ella, entonces, no tenemos dentro de la teoría kantiana del método matemático ninguna justificación en absoluto para asumir una conexión tal. Es decir, ninguna justificación para dar a la noción de intuición otro significado que el que le da Kant por medio de su propia definición.

Hay, de hecho, muy buenas razones para concluir que la discusión del método matemático en la Doctrina del método es previa y presupuesta por la discusión kantiana típicamente crítica del espacio y el tiempo en la Estética Trascendental. Uno de ellos debería ser suficiente: en *Prolegomena*, en el trabajo en el cual Kant quiso dejar clara la estructura

[6] Las afirmaciones iniciales parecen vislumbrar una conexión rápida y precisa entre todas las intuiciones y la sensibilidad. Como apunta Paton, sin embargo, ellas deben ser tomadas parcialmente como una afirmación de lo que Kant quiere probar. Véase, H. J. Paton, *Kant's Metaphysic of Experience* (George Allen & Unwin, Londres, 1936), vol. I, pp. 93-94.

de su argumento, él apela explícitamente a sus discusiones de la metodología de las matemáticas al final de la Crítica de la razón pura al comienzo y durante el argumento que corresponde a la Estética Trascendental, haciendo así explícita la dependencia de la última sobre la primera. Esto ocurre tanto cuando Kant discute la sinteticidad de las matemáticas (*Prol*. AA: IV, 272) como cuando discute su carácter intuitivo (Ibidem, 282; cf. p. 266).

Otra razón persuasiva es que, en momentos decisivos de la Estética Trascendental, Kant por intuiciones quiere decir precisamente lo que su propia definición nos dice. Por ejemplo, él argumenta como sigue acerca del espacio: "El espacio no es… Un concepto de relaciones de cosas en general, sino una intuición pura. Ya que… nos podemos representar solo un espacio… El espacio es, esencialmente, uno; su multiplicidad y, por tanto, también el concepto universal de espacios, depende solamente de la introducción de limitaciones. Por consiguiente, se sigue que una… intuición subyace a todos los conceptos de espacio" (A24-25 = B39). Aquí, el carácter intuitivo es inferido directamente de la individualidad, y no quiere decir otra cosa que la última.

5. LA PRIMACÍA HISTÓRICA DE LA TEORÍA KANTIANA DEL MÉTODO MATEMÁTICO

Pero me temo que, a pesar de las excelentes razones que pueda haber para revertir el orden de la exposición kantiana en la primera *Crítica*, y para poner antes de la Estética Trascendental la discusión de las matemáticas en la *Methodenlehre*, mis lectores podrían estar aún poco convencidos de ellas. ¿Pudo Kant realmente no haber querido decir nada más que esto con su caracterización del método matemático? ¿Pudo él haber pensado que el hecho de que los matemáticos hagan uso de casos especiales de conceptos generales, mientras que los filósofos no, sea una peculiaridad importante del método de los matemáticos, a diferencia del método de los filósofos? ¿No es sugerir esto llevar la definición kantiana de intuición demasiado lejos?

Pienso que la respuesta a esto es que hubo un tiempo en el que Kant creyó que una de las principales particularidades del método matemático es considerar representaciones

CON-TEXTOS KANTIANOS
International Journal of Philosophy
N.º 14, December 2021, pp. 135-160
ISSN: 2386-7655
Doi: 10.5281/zenodo.5775983

particulares de conceptos generales.[7] Este punto de vista fue presentado en el texto precrítico premiado de 1764. Su interpretación es bastante independiente de los escritos críticos kantianos. En particular, la formulación de esta teoría precrítica de Kant no involucra para nada la noción de intuición. Se sigue, por tanto, que la idea del método matemático como basado en el uso de conceptos generales *in concreto*, es decir, en la forma de instanciaciones individuales, era el punto de partida de las consideraciones más elaboradas de las matemáticas. Si la lectura que sugiero de la caracterización kantiana de las matemáticas es o no exhaustiva, esto es, si intuición allí significa o no algo más que una idea particular, en cualquier caso, esta lectura es la única desde la que tenemos que empezar a intentar entender las consideraciones kantianas sobre la matemática.

Es útil observar en este punto que la lectura de Kant que estoy sugiriendo no es enteramente incompatible con la otra interpretación más tradicional. Por un lado, una imagen mental completamente concreta representa un particular y, por tanto, una intuición en el sentido de la definición más amplia. Por otro lado, las instanciaciones particulares de conceptos generales son frecuentemente más fáciles de tratar que los conceptos generales mismos; son mucho más intuitivos, en el sentido ordinario de la palabra, que los conceptos generales. Las dos interpretaciones no están en desacuerdo de manera tan amplia a como pudiera parecer a primera vista. Lo que realmente las hace distintas es si Kant tuvo alguna vez en mente, además de las intuiciones 'habituales', en el sentido de representaciones mentales o imágenes, otros entes individuales que son efectivamente usados en argumentos matemáticos. Pienso que esto es algo que debemos tomar en consideración.

6. KANT SOBRE EL ÁLGEBRA

De hecho, si miramos más de cerca a la verdadera teoría de las matemáticas tal y como se presenta en el final de la Crítica de la razón pura, veremos que algunas cosas se nos hacen más obvias si tenemos en mente la noción de intuición como una idea particular en contraposición a los conceptos generales. Habitualmente, se lee la teoría kantiana del método

[7] Esto ha sido considerado clara y enérgicamente por E. W. Beth, por cuyos escritos sobre Kant estoy en deuda, aunque no comparta completamente la evaluación filosófica de Beth sobre las teorías de Kant. Véase 'Kants Einleitung der Urteile in Analytische und Synthetische', *Algemeen Nederlands Tijdschrift voor Wijsbegeerte en Psychologie* **46** (1953-54) 253-264; *La crise de la raison et la logique* (Gauthier-Villars, Paris, 1957); *The Foundations of Mathematics* (North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1959), pp. 41-47.

matemático a la luz de lo que él dice en la Estética Trascendental. En otras palabras, se lee 'intuición' como si significara una 'representación mental' o 'una imagen ante el ojo de nuestra mente', o algo de este género. Pero entonces se hace muy difícil entender por qué Kant se refiere al álgebra y a la aritmética como basadas en el uso de la intuición. La utilidad de usar los símbolos algebraicos no es, ciertamente, proveernos a nosotros mismos con imágenes o representaciones mentales más vívidas. Los académicos han intentado reconciliar las afirmaciones de Kant sobre el álgebra y la aritmética con sus doctrinas críticas tal y como aparecen en la Estética Trascendental. El resultado de estos intentos es recogido adecuadamente, pienso, por el Profesor C. D. Broad, en un conocido ensayo sobre 'la teoría kantiana del razonamiento matemático y filosófico', donde él dice que "Kant no ha dado en absoluto una teoría del razonamiento algebraico".[8] Esto es, en mi opinión, completamente correcto si leemos la descripción kantiana del método matemático a la luz de lo que él dice en la Estética Trascendental. Pero entonces, la idea de Broad se vuelve, me parece, casi una *reductio ad absurdum* de la asunción de que la Estética Trascendental es, en la mente de Kant, lógicamente previa a la discusión de las matemáticas del final de la primera Crítica. Ya que, en esta asunción, las afirmaciones que Kant hace sobre aritmética y álgebra no son solo privadas de su verdad, sino también de su significado. Si la Estética Trascendental fuera lógicamente previa a la metodología kantiana de las matemáticas, se haría completamente incomprensible lo que realmente Kant podría haber querido decir con sus afirmaciones sobre aritmética y álgebra que tan obviamente están en desacuerdo con sus teorías profesadas.

Por otro lado, si asumimos que por 'intuición' Kant solo quiso referirse a una representación de un individuo cuando él trataba sobre aritmética, un número de cosas, aunque no necesariamente todas, se vuelven obvias. Si podemos asumir que los símbolos que usamos en álgebra sirven como números individuales, entonces se vuelve trivialmente verdadero decir que el álgebra está basada en el uso de intuiciones, es decir, en el uso de representaciones de individuos, a diferencia de conceptos generales. Al fin y al cabo, las variables del álgebra elemental comprenden los números y no toman los predicados de los números como sus valores sustitutivos, como sí podrían hacer las variedades de la silogística formalizada. Entonces, podemos también entender lo que Kant tenía en mente cuando llamó construcciones a las operaciones algebraicas, tales como la suma, la multiplicación y la

[8] *Proceedings of the Aristotelian Society* 47 (1941-42) 1-24.

CON-TEXTOS KANTIANOS
International Journal of Philosophy
N.º 14, December 2021, pp. 135-160
ISSN: 2386-7655
Doi: 10.5281/zenodo.5775983

división. ¿Qué ocurriría si, al combinar nosotros en álgebra dos letras, *a* y *b*, con un signo funcional, digamos *f* o *g* o + o · o :, obteniendo así una expresión como *f*(*a*, *b*) o *g*(*a*, *b*), o *a*+*b*, *a*·*b* o *a*:*b*? Esas expresiones, obviamente, hacen referencia a números individuales o, más generalmente, a magnitudes individuales, habitualmente, a individuos diferentes a los que hacían referencia *a* y *b*. Lo que ha pasado, por tanto, es que hemos introducido una representación para un nuevo individuo. Y una tal introducción de representaciones para nuevos individuos, es decir, nuevas intuiciones, era justo lo que, de acuerdo con la definición kantiana, ocurre cuando construimos algo. Se puede decir que los nuevos individuos representan los conceptos 'la suma de *a* y *b*', 'el producto de *a* y *b*', etc.

Las afirmaciones de Kant sobre el álgebra, por tanto, adquieren un significado natural bajo una interpretación, muy distinto al de la cuestión de si este significado es reconciliable, en último término, con lo que Kant dice en la Estética Trascendental. Podríamos decir que el propósito del uso de Kant del término 'intuición' en este punto es decir que el álgebra es *nominalista* en el sentido de Quine: el único valor aceptable de las variables son *individuos*.

7. KANT SOBRE LAS ECUACIONES ARITMÉTICAS

Las afirmaciones de Kant sobre aritmética presentan un problema algo más complicado. No las trataré aquí completamente, aunque se podría mostrar que estas se alinean con la interpretación que estoy sugiriendo. Solo hay un punto que quiero tratar aquí.

En el caso de la aritmética de números pequeños, tales como 7, 5 y 12, la lectura ordinaria de las afirmaciones de Kant no es implausible. Lo que Kant parece estar diciendo es que para establecer que 7+5=12 tenemos que visualizar los números 7, 5 y 12 por medio de puntos, dedos o alguna otra ilustración adecuada, de modo que podamos inmediatamente percibir la ecuación deseada. Él incluso llega a decir que las ecuaciones como 7+5=12 son inmediatas e indemostrables (A164 B204). Esto no es fácil de reconciliar con el hecho de que Kant, en cualquier caso, describió un procedimiento que sirve, le podamos llamar o no prueba, para establecer la verdad de la ecuación en cuestión, y que él dijo que su interpretación se hace más natural al aplicarse a números grandes (B16). Espero ser capaz de mostrar más tarde lo que Kant quiso decir al afirmar que las ecuaciones como 7+5=12 son 'inmediatas' e 'indemostrables'. Él no pretendió decir que la ecuación puede ser establecida sin un argumento que podríamos llamar una prueba. ‘Inmediatas’ e ‘indemostrables’ no servían para distinguir percepciones inmediatas de un argumento articulado, sino para distinguir una cierta subespecie de argumentos particularmente claros de otro tipo de pruebas. La interpretación ordinaria de la teoría kantiana, por tanto, yerra aquí también. Intentaré más tarde echar un vistazo a la interpretación correcta.

8. EUCLIDES COMO PARADIGMA PARA KANT

Un buen modo de llegar a entender la teoría kantiana de las matemáticas es preguntar: ¿cuáles eran los paradigmas sobre los cuales fue modelada esta teoría? El paradigma más obvio y, de hecho, uno reconocido por el propio Kant, era el sistema euclidiano de la geometría aritmética.[9] Al comienzo de este trabajo vimos que una crítica habitual de la teoría kantiana de las matemáticas está basada en una comparación entre la teoría de Kant y el sistema de Euclides. Sin embargo, me parece que no es suficiente dar una vaga comparación general. Es mucho más útil preguntar con precisión la presentación de Euclides en la que Kant estaba pensando en su teoría. En vista de la interpretación de la noción kantiana de intuición que he sugerido, la cuestión cambia: ¿hay algo en particular en el procedimiento de Euclides que apoye la idea de que las matemáticas están basadas en el uso de instancias particulares de conceptos generales?

Es fácil ver que sí lo hay. Ya que, ¿cuál es la estructura de una proposición en Euclides? Habitualmente, una proposición consiste en 5 (o algunas veces, 6) partes.[10] Primero hay una *enunciación* de una proposición general. Por ejemplo, en la proposición 20 de los *Elementa*: “en cualquier triángulo, dos lados tomados de cualquier modo, son más grandes que el restante.” Esta parte de la proposición fue llamada la πρότασις.

Sin embargo, Euclides nunca hace nada solamente sobre la base de la enunciación. En toda proposición, él primero aplica el contenido de la enunciación a la figura particular que él asume que debe trazarse. Por ejemplo, después de haber enunciado la proposición 20,

[9] Véase la edición académica de los trabajos de Kant, vol. 2, p. 307. Con respecto a los *Elementa*, véase la traducción y el comentario de Sir Thomas Heath, *The Thirteen Books of Euclid’s Elements* (Cambridge University Press, Cambidge, 1926).
[10] Heath, *op. cit*., Vol. 1, pp. 129-131.

CON-TEXTOS KANTIANOS
International Journal of Philosophy
N.º 14, December 2021, pp. 135-160
ISSN: 2386-7655
Doi: 10.5281/zenodo.5775983

Euclides continúa diciendo: "sea un triángulo *ABC*. Yo digo que en un triángulo *ABC*, dos lados tomados de cualquier manera son más grandes que el restante, a saber, *BA* y *AC* son más grandes que *BC*; *AB* y *BC* más grandes que *CA*; *BC* y *CA* más grandes que *AB*." Esta parte de la proposición euclidiana era llamada *exposición* o *ecthesis* (ἔκθεσις, en latín, *expositio*). Quizá no es un accidente que Kant usara el equivalente alemán para exponer (*Darstellen*) al explicar su noción de construcción, y que él usara el término exposición para un proceso análogo al de la construcción matemática.

La exposición o *ecthesis* está estrechamente relacionada a lo siguiente, o la tercera parte de la exposición euclidiana, la *construcción auxiliar*. Esta parte era frecuentemente llamada la *preparación* o *aparato* (κατασκευή). Consistía en afirmar que la figura construida en la exposición debía ser completada dibujando ciertas líneas, puntos y círculos adicionales. En nuestro ejemplo, la preparación se lee como si: "sea *BA* trazado a través del punto *D*, sea *DA* hecho igual a *CA*, y séale unido *DC*."

La construcción era seguida por la *apodeixis* (*ἀπόδειξις*) o *prueba*, propiamente. En la prueba no se desarrollaban consideraciones adicionales, lo que ocurría era que eran extraídas una serie de inferencias en relación con la figura que debía ser introducida en la exposición, y completada en la construcción auxiliar. Estas inferencias hacían uso (1) de axiomas, (2) de anteriores proposiciones, y (3) de las propiedades de la figura que se siguen del modo en que fue construida.

Después de alcanzar la conclusión deseada sobre la figura particular, Euclides volvía de nuevo a la enunciación general, diciendo, por ejemplo, 'por tanto, en *cualquier* triángulo, … etc.'.

9. 'ECTHESIS' COMO UN PARADIGMA DE LA CONSTRUCCIÓN KANTIANA

Cuando esta estructura de una proposición euclidiana se compara con la noción kantiana del método matemático, el acuerdo es obvio. La idea de Kant de la geometría era, puede decirse, euclidiana en más de un sentido de la palabra. Cuando Kant dice que el método de los matemáticos es siempre considerar conceptos generales *in concreto*, en una aplicación particular, él tiene en mente el proceso de exhibición o *ecthesis* de una proposición euclidiana, donde una proposición geométrica general es 'mostrada' o 'exhibida' por medio de una figura particular. Esto debe su origen a los ejemplos por medio de los que Kant explica su teoría del método matemático. Él dice que la superioridad del método matemático sobre el filosófico en geometría yace en el hecho de que el matemático puede trazar figuras reales y desarrollar pruebas a partir de tales figuras. Por ejemplo, si un filósofo (*qua filósofo*) intenta probar que la suma de los ángulos internos de todo triángulo es igual a dos rectos, se limita, dice Kant, a analizar los conceptos de 'línea recta', 'ángulo' y 'tres', y es incapaz de llegar a ningún lado. Un matemático, en cambio, puede trazar una figura de un triángulo, completarla por medio de construcciones adicionales (es decir, introducir en el argumento nuevas líneas, círculos… etc. adecuadas). Y, de este modo, hacer obvia la proposición que ha de ser probada. (Véase A716-717/B744-745).[11]

Este ejemplo muestra que, además de la exposición o *ecthesis* de una proposición euclidiana, Kant también tenía en mente la parte de la proposición que sigue a la *ecthesis*, es decir, la preparación o aparato. La exhibición y la preparación eran las dos partes de una proposición euclidiana donde las construcciones se realizaban en el sentido habitual de la palabra; y hemos visto que esas dos partes eran también las únicas en las cuales se requerían construcciones en el sentido abstracto de la palabra, es decir, donde se introducían nuevos puntos individuales, líneas… etc. Dentro de la geometría, la noción kantiana de construcción coincide con el uso ordinario de 'construcción'.

Este resultado de nuestra comparación entre Kant y Euclides apoya lo que dijimos anteriormente. Muestra que la noción kantiana de construcción se corresponde con un caso especial de la noción geométrica habitual de construcción. Ahora bien, las construcciones de tipo geométrico no tienen que tener lugar en la mente humana. En general, se desarrollan en un trozo de papel o en la pizarra. Lo común a todas estas construcciones es que se introducen nuevas líneas, puntos o círculos. Si esas entidades geométricas son pensadas como individuos, ellas encajan dentro de la definición general kantiana de una intuición. No

[11] Podemos ver aquí que, de acuerdo con Kant, la peculiaridad de Kant no yace en los *axiomas* ni en los *postulados* de distintas ramas de las matemáticas, sino en el modo matemático de argumentación y demostración.

CON-TEXTOS KANTIANOS
International Journal of Philosophy
N.º 14, December 2021, pp. 135-160
ISSN: 2386-7655
Doi: 10.5281/zenodo.5775983

hay necesidad, por tanto, de asumir que las construcciones de la geometría significan para Kant algo más de lo que somos capaces de llamar construcción.

Pero esto no es todo lo que podemos sacar de esta comparación. Si echamos un vistazo algo más de cerca a la relación entre la teoría kantiana del método matemático y la práctica de Euclides, la relación permite sugerir varias consideraciones de la teoría kantiana. Aquí solamente mencionaré algunas de ellas.

10. MÉTODOS ANALÍTICO Y SINTÉTICO

En geometría existe una antigua distinción entre dos tipos de método. Por un lado, está el método de asumir un resultado deseado que debe ser alcanzado, por ejemplo, cuando asumimos que hemos tenido éxito al realizar la construcción deseada en el sentido ordinario de 'construcción'. A partir de estas asunciones, uno argumenta, entonces, por decirlo de algún modo, 'hacia atrás', [es decir,] hacia las condiciones sobre las cuales son posibles estas construcciones, así como hacia los modos en que pueden efectuarse. Esto se llama 'método analítico'. Algunas veces se ha adscrito a Platón, pero no fue empleado explícita y sistemáticamente a gran escala hasta la geometría analítica de Descartes, cuyo mismo nombre se deriva del método 'analítico' en cuestión. El otro método era el sintético. Al aplicarlo, uno intenta efectuar el resultado deseado, por ejemplo, cuando hacemos una construcción deseada al desarrollar, efectivamente, la construcción. Lo que distingue ambos métodos es, por tanto, hablando ampliamente, el hecho de que en el método analítico no se hacen construcciones, mientras que el método sintético se basa en el uso de las construcciones reales.[12]

Kant indica que lo que hace *sintéticas* a las matemáticas en general y a la geometría en particular es el uso de las intuiciones, es decir, el uso de las construcciones. Hemos visto que esta noción de construcción coincide, en geometría, con el uso matemático ordinario del

---

[12] Sin embargo, tenemos que darnos cuenta de que la mera diferencia de direcciones en las que uno procede en un análisis y en una síntesis, respectivamente, era enfatizado a veces a costa de la pregunta respecto de si se utilizan o no construcciones. Uno podría, por tanto, distinguir entre un sentido de análisis y síntesis 'direccional' y uno 'construccional' (o 'problemático'). Véase mi artículo, 'Kant and the Tradition of Analysis', en *Deskription, Existenz und Analytizität*, ed. P. Weingartner (Pustet, Munich, 1966), reimpreso como capítulo 9 de Jaakko Hintikka, *Logic, Language Games and Information* (Clarendon Press, Oxford, 1973).

término ‘construcción’. Lo que esto significa, entonces, es que la distinción kantiana entre método analítico y sintético está modelada, al menos dentro de las matemáticas, por el empleo de los matemáticos que era habitual en esa época. (Los matemáticos hoy en día aún hablan de geometría sintética refiriéndose a aquella geometría que se pone en marcha a partir del uso y el estudio de las construcciones geométricas). Esta sugerencia se apoya en los propios comentarios de Kant sobre el asunto, que sirven para delimitar su sentido de sintético, así como para conectarlo explícitamente con las construcciones en un sentido casi geométrico. La distinción entre analítico y sintético en geometría antes era empleada habitualmente para separar dos métodos para *encontrar una prueba deseada o una construcción*, o, en algunos casos, para separar los dos métodos de exposición. Lo que Kant necesitaba era una distinción entre dos diferentes medios de *desarrollar una prueba*. Para él, el paradigma de síntesis era, precisamente, la síntesis en el sentido geométrico de la palabra, es decir, el acabado de una figura por medio de la introducción de nuevas entidades geométricas. Él distinguía esto del otro uso, que estaba basado en el paradigma de proceder ‘inversamente’ de un fundamento hacia una consecuencia. Esta diferencia es afirmada por Kant en pocas palabras en una nota al pie del primer parágrafo de su *Dissertatio* del año 1770.[13]

11. KANT Y LA GEOMETRÍA ANALÍTICA. ECUACIONES ‘INDEMOSTRABLES’

Hay otro modo en el cual un conocimiento de las geometrías de Euclides y Descartes puede ayudarnos a entender a Kant. Podemos hacer una observación particularmente interesante si comparamos la geometría de Euclides con la de Descartes. De acuerdo con Descartes, la idea principal de la geometría analítica era la de una correlación o analogía entre las operaciones algebraicas y geométricas. Así como todo lo que necesitamos en aritmética son las cuatro o cinco operaciones básicas de adición, sustracción, multiplicación, división y extracción de raíces, exactamente de la misma manera, dice Descartes,[14] en geometría necesitamos de unas

[13] Véase también *Prolegomena* §5 (edición académica, Vol. 4, p. 276, nota al pie). Podemos decir también que las afirmaciones de Kant, en efecto, sirven para distinguir entre un sentido direccional y el construccional (problemático) de análisis y síntesis, y para indicar que Kant opta por la última (véase la nota precedente y el artículo mencionado ahí).
[14] Véase *La Géométrie*, las primeras afirmaciones (pp. 297-298 de la primera edición).

CON-TEXTOS KANTIANOS
International Journal of Philosophy
N.º 14, December 2021, pp. 135-160
ISSN: 2386-7655
Doi: 10.5281/zenodo.5775983

pocas operaciones básicas. Lo que nos interesa aquí es la analogía entre operaciones algebraicas y geométricas, [y,] en particular, el hecho de que las operaciones algebraicas correspondan a ciertas construcciones geométricas. Pienso que esto da la clave para lo que Kant quiere decir al afirmar que las ecuaciones aritméticas simples, tales como 7+5=12, son 'inmediatas' e 'indemostrables'. Observamos esto si intentamos emitir el argumento por medio del cual 7+5=12 es verificado en la forma de una proposición euclidiana. A causa de la analogía entre operaciones algebraicas y construcciones geométricas, la suma real de 7 y 5 corresponde a la tercera fase, es decir, a la preparación o aparato de una proposición euclidiana. Las explicaciones de Kant también muestran que, de acuerdo con él, los números 7 y 5 deben, de algún modo, ser 'mostrados' o 'expuestos' antes de la misma operación de adición, en analogía con la 'ecthesis' de una proposición euclidiana. (Esto es lo que ilustran sus afirmaciones sobre "puntos o dedos"). Pero, entonces, ¿qué corresponde en propiedad a la prueba, a la *apodeixis*? Obviamente, lo que tenemos que hacer para demostrar que 7+5=12 es desarrollar la operación de adición; la prueba propiamente se reduce a un mero mínimo, a la mera observación de que el resultado de la suma es igual al resultado deseado, 12. En un sentido perfectamente adecuado, por tanto, uno puede decir que ninguna prueba (proper), ninguna *apodeixis*, es necesaria para establecer que 7+5=12. Esta ecuación es 'inmediata' e 'indemostrable' en el preciso sentido de que puede realizarse por la mera construcción auxiliar o *kataskeue* de una prueba euclidiana. A esto hacen referencia las afirmaciones de Kant. El hecho de que esta fuese realmente la idea de Kant se muestra por una carta suya a Schultz que data del 25 de noviembre de 1788. La diferencia principal es que, en lugar de usar la terminología que pertenece a los *teoremas* de la *geometría* euclidiana, Kant, en esta carta, hace uso de una terminología paralela que pertenece a *problemas* geométricos.

Esto es importante, pienso, más allá de la interpretación de pasajes particulares, ya que muestra cómo Kant comprendió que debía entenderse el carácter intuitivo de la aritmética. La inmediatez de las verdades aritméticas no es a causa del hecho de que las ecuaciones simples como 7+5=12 sean percibidas como verdaderas y que no se argumente para ello, sino [a causa] del hecho de que lo único que tenemos que hacer para establecer unas ecuaciones tales es llevar a cabo la computación. Esto permite explicar por qué Kant dijo que su interpretación de las ecuaciones se comprende con más facilidad en conexión con números más grandes (B16; véase A78/B104).

12. ANALÍTICA DE LAS INFERENCIAS APODÍCTICAS

Sospecho que un pasaje particularmente desconcertante de la primera *Crítica* recibe una explicación natural de la misma manera que las afirmaciones en aritmética. Me refiero a la afirmación que hace Kant en B14 cuando dice que todas las inferencias (Schlüsse) de los matemáticos están basadas en el principio de contradicción "que requiere la naturaleza de toda certeza apodíctica". Este pasaje se vuelve más evidente si tomamos a Kant literalmente, y entendemos que él se refiere solamente a la parte apodíctica o a la 'prueba propiamente dicha' de una proposición euclidiana. Tomada literalmente, la prueba propiamente dicha o apodeixis, después de todo, es la única parte de la proposición euclidiana en la que se extraen inferencias. Interpretada de este modo, la afirmación de Kant expresa precisamente lo que se espera que sostenga en mi interpretación, a saber, que la distinción entre, por un lado, *apodeixis* y, por otro lado, *ecthesis* y la construcción auxiliar separa las partes analítica y sintética de un argumento matemático.

13. INTUICIONES HECHAS INTUITIVAS

¿Qué hemos logrado hasta ahora? Hemos visto que, en la teoría kantiana del método matemático, presentada hacia el final de la primera *Crítica*, uno debe tener en mente la posibilidad de que por intuiciones Kant quisiera decir representaciones particulares de conceptos generales. Hemos visto que, desde este punto de vista, una serie de aspectos de la teoría kantiana del álgebra, de la aritmética y de la geometría se hacen más evidentes. Sin embargo, se puede decir, la posibilidad de intuiciones que no sean sensibles es descartada en la Estética Trascendental. Allí, Kant argumenta que el uso de las intuiciones en matemáticas está basado en las intuiciones de espacio y tiempo, y que esas intuiciones dependen de la estructura de nuestra sensibilidad. No queda, por tanto, espacio en matemáticas para intuiciones que no estén conectadas con la sensibilidad.

No quisiera negar que esto es lo que dice Kant. Sin embargo, quiero señalar que el desacuerdo entre la anterior interpretación de la metodología kantiana de las matemáticas y su teoría del espacio y el tiempo en la Estética Trascendental no desaprueban mi interpretación. La discrepancia entre las dos partes del sistema kantiano desmiente mi lectura

CON-TEXTOS KANTIANOS
International Journal of Philosophy
N.º 14, December 2021, pp. 135-160
ISSN: 2386-7655
Doi: 10.5281/zenodo.5775983

de Kant solamente si la interpretación de las matemáticas dada en la Estética Trascendental es correcta. Kant afirma allí que el uso de las intuiciones en matemáticas sólo puede entenderse si asumimos que todas esas intuiciones dependen de nuestra sensibilidad. Ahora bien, si hay intuiciones, es decir, variables individuales o ‘intuiciones’ de álgebra, que no tienen relación con nuestra sensibilidad, entonces, no es que la única conclusión posible sea que esas referidas intuiciones no sean para nada intuiciones en sentido kantiano. La otra posibilidad es decir que ellas son intuiciones genuinas, pero que Kant sencillamente se equivocó al decir que todas las intuiciones empleadas en matemáticas son *sinnlich*, es decir, que dependen de nuestra mente.

Pero entonces queda por explicar cómo Kant llegó a considerar la doctrina equivocada. He sugerido que la noción de método matemático como se presenta en el uso de instancias individuales era el punto de partida de la más conocida teoría kantiana de que todas las intuiciones que usamos en matemáticas dependen de nuestra sensibilidad. ¿Qué hay en la noción de intuición [entendida] como una instancia individual que nos haga pensar que esta conclusión es inevitable? Hemos discutido el rol de las intuiciones en el sentido de representaciones de individuos en álgebra, en aritmética y en geometría. ¿Cuáles son los rasgos comunes de esos usos que sólo pueden explicarse de acuerdo con Kant asumiendo que las intuiciones matemáticas son sensibles? ¿Cuál es el común denominador de todas las ‘construcciones’ matemáticas que hemos discutido?

14. ‘ECTHESIS’ EN LÓGICA

Me parece que una generalización natural está virtualmente contenida en el anterior análisis de las proposiciones euclidianas. La parte más importante de la proposición euclidiana que es intuitiva en sentido kantiano es la exhibición, la *ecthesis*. Ahora bien, esta noción de *ecthesis* no solo aparece en la geometría griega. También aparece en la lógica aristotélica. Aristóteles nunca explica explícitamente lo que es el proceso llamado *ecthesis*, pero quizás podamos decir que hubo un momento en el que Aristóteles pasó de las consideraciones que pertenecen al término general hacia las consideraciones que pertenecen a representaciones particulares de este término general. Por ejemplo, en *Analytica priora* I, 2, 25a15, Aristóteles parece argumentar como sigue: si ningún *A* es *B*, entonces, ningún *B* es *A*, ya que, si no fuera así, entonces, algunos *B* serían *A*. Tómese un particular *b* de este tipo. Este particular *b* tiene tanto la propiedad *B* y la propiedad *A*, y muestra, por tanto, que es imposible que ninguno de los *A* sea un *B*, como hemos asumido. Esta contradicción prueba la conclusión. Un pasaje posterior (*Analytica priora* I, 41, 49b33ss.) parece indicar que Aristóteles consideró que la *ecthesis* lógica era esencialmente la misma que la geometría.[15]

Sugiero que esta noción de *ecthesis* ofrece una muy adecuada reconstrucción de la noción kantiana de construcción, es decir, de la noción de la exhibición de un concepto general por medio de representaciones particulares. Concuerda muy bien, como vemos, con el modo en que Kant define la noción de construcción. Su uso en lógica aristotélica puede explicar, quizás, por qué Kant criticó (en el ensayo sobre la 'falsa sutileza de las cuatro figuras del silogismo') ciertas partes de esta lógica. Él llegó al punto de rechazar, en efecto, todos los modos silogísticos excepto los dos primeros modos de la primera figura. Quizás, la explicación puede estar en el hecho de que la aplicación particular de *ecthesis* que acabo de bosquejar estaba pensada para probar una de las reglas de conversión que Aristóteles necesitaba para reducir todos los modos silogísticos a los dos primeros modos. Dado que el uso de *ecthesis* era, para Kant, un método de razonamiento típicamente matemático, él no pudo usarlo en lógica como lo hizo Aristóteles. Por esta razón, Kant no pudo reducir todos los modos silogísticos a los dos modos de *Barbara* y *Celarent*, que él reconoció como los básicos, y se vio forzado a rechazar los otros como 'impuros' y 'confusos'.

La noción de *ecthesis* puede hacerse más precisa en términos de la lógica moderna.[16] En efecto, se vuelve idéntica a una de las más importantes reglas de inferencia de la teoría

[15] Con respecto a la noción de *ecthesis* en Aristóteles, véase W. D. Ross, *Aristotle's Prior and Posterior Analytics: A Revised Text with Introduction and Commentary* (Clarendon Press, Oxford, 1949) pp. 32-33. 412-414: Jan Łukasiewicz, *Aristotle's Syllogistic from the Standpoint of Modern Formal Logic* (Clarendon Press, Oxford, 1951), pp. 59-67; Günther Patzig, *Die Aristotelische Syllogistik* (Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen, 1959), pp. 166-178; B. Einarson, 'On Certain Mathematical Terms in Aristotle's Logic', *American Journal of Philology,* **57** (1936) 34-54, 151-172, esp. p. 161. Como se verá a partir de estas discusiones, la interpretación precisa de la noción aristotélica de *ecthesis* (tal y como se emplea en su lógica) es un problema controvertido para el cual no está disponible ninguna solución que no sea ambigua. La interpretación que prefiero (sobre la que me apoyo aquí) asimila la *ecthesis* lógica a la 'instanciación existencial' de la lógica moderna. No puedo argumentar en favor de esta interpretación todo lo que merece aquí. Para el uso de Aristóteles del término *ecthesis* en geometría, que me parece que está estrechamente relacionado a la *ecthesis* lógica, véase, por ejemplo, *Analytica priora* I, 41 49b30-50a4 y *Analytica posteriora* I, 10, 76b39-77a2.

[16] Estoy presuponiendo aquí la interpretación mencionada en la nota precedente. Para más ideas acerca de esta interpretación, véase mi artículo 'Are Logical Truths Analytic?', Philosophical Review **74** (1965) 178-203,

CON-TEXTOS KANTIANOS
International Journal of Philosophy
N.º 14, December 2021, pp. 135-160
ISSN: 2386-7655
Doi: 10.5281/zenodo.5775983

de cuantificación (instanciación existencial). Y en términos de la así reconstruida noción de *ecthesis* podemos ver en qué sentido la ecuación 7+5=12 puede decirse basada en el uso de representaciones particulares de conceptos generales, es decir, en el uso de *ecthesis*. Sin embargo, nos llevaría demasiado lejos profundizar en esta cuestión aquí.[17]

15. ¿PARTICULARES PARTICULARMENTE INTUITIVOS?

Concluiré este trabajo bosquejando muy brevemente, en términos no kantianos, cómo la reconstrucción de la noción kantiana de construcción en términos de *ecthesis* o, de modo similar, da sentido a su intento de conectar el método matemático con la sensibilidad. Se ha sugerido ya que quizás la noción de construcción puede identificarse con ciertos métodos de prueba en lógica moderna. Si esto es así, entonces, el problema kantiano de la justificación de las construcciones en matemática *no* queda obsoleto por la formalización de la geometría y otras ramas de las matemáticas. La distinción entre los métodos de argumentación intuitivos y no intuitivos, entonces, reaparece en la formalización del razonamiento matemático como una distinción entre dos diferentes medios de prueba lógica. Pero ¿permanece ahí algún sentido en el cual el uso de tales métodos 'intuitivos' sea problemático? ¿Habría aceptado Kant una reconstrucción tal de la noción de intuición como una premisa de su argumento de que todas las intuiciones dependen de nuestra sensibilidad?

La respuesta a la cuestión es, pienso, que sí. Podemos ver por qué era natural para Kant hacer la transición desde el uso de instancias individuales de cualquier tipo a su conexión con la sensibilidad. Delinearé brevemente dos explicaciones. Puede decirse que, históricamente, nada era más natural para Kant que conectar individuos con el uso de nuestros sentidos. Aristóteles ya sostuvo que "es solo la percepción sensible la que es adecuada para recoger los particulares" (*Analytica posteriora* I, 18, 81b6). Todo el conocimiento, por tanto, que es obtenido por medio de particulares debe ser perceptivo.

---

reimpreso en mi libro *Knowledge and the Known* (Reidel, Dordrecht, 1974) y la discusión de E. W. Beth de la relación de *ecthesis* y lógica moderna en 'Semantic Entailment and Formal Derivability', *Mededelingen van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Afd. Letterkunde,* N. R., 18, no. 13 (Amsterdam, 1955), pp. 309 - 342.

[17] Algunas ideas sobre estos puntos están contenidas en mi trabajo, 'Kant Vindicated', en *Deskription, Existenz und Analytizität*, ed. P. Weingartner (Pustet, Munich, 1966), reimpreso como capítulo 8 de *Logic, Language Games and Information* (nota 12, arriba).

Cómo era de natural la aplicación de esta idea aristotélica general al caso de las construcciones en el sentido kantiano se muestra quizás por el hecho de que Alejandro el Comentador ya aplicó la idea de Aristóteles al proceso de *ecthesis*. Alejandro sostuvo que el término singular introducido en la *ecthesis* es dado por la percepción, y que la prueba a través de la *ecthesis*, por tanto, consiste en un género de evidencia perceptiva.[18] Y la asunción aristotélica general acerca de los individuos y de los sentidos fue repetida por los predecesores alemanes de Kant.

16. LAS CONSTRUCCIONES COMO ANTICIPACIONES DE LA EXISTENCIA

Otro modo, y quizás el más importante, de hacer plausibles las ideas de Kant, puede derivarse de la división en partes de las proposiciones euclidianas. Hemos visto que para él el uso de las construcciones tenía lugar en la primera y tercera de las partes de una proposición euclidiana, mientras que la parte cuarta de la argumentación era puramente no constructiva o, lo que es lo mismo, puramente analítica. Ahora bien, la distinción entre esas partes de la proposición euclidiana corresponde, de acuerdo con una interpretación habitual que Kant parece haber aceptado, a una distinción entre dos tipos de principios del sistema de Euclides. Los principios de la construcción son los así llamados postulados, mientras que los principios de la prueba propiamente dicha son llamados axiomas (nociones comunes). Resulta significativo que los ejemplos que Kant da de principios analíticos empleados en geometría (B17) obviamente caen bajo la segunda categoría. (Esto muestra incidentalmente que la noción kantiana de construcción en geometría no era, como algunas veces se ha sugerido, algo ajena al tratamiento axiomático de la geometría. Los mismos ejemplos que Kant da de construcciones geométricas están basados o bien directamente en los postulados de Euclides o, por el contrario, en proposiciones explícitas que Euclides había probado antes; un hecho

[18] Alejandro de Afrodisia, In *Aristotelis Analyticorum Priorum Librum I Commentarium*, ed. M. Wallies, en *Commentaria in Aristotelem Graeca,* vol. 2(a) (Berlín, 1883), p. 32, cf. pp. 32-33, 99-100, 104; Łukasiewicz, op. cit., pp. 60-67. Un intento de explicar y de justificar la *ecthesis* matemática desde un punto de vista aristotélico también suscitan sorprendentes anticipaciones de las doctrinas kantianas. Así, por ejemplo, encontramos que, de acuerdo con Teofrasto, los objetos matemáticos "parecen haber sido, por así decirlo, diseñados por nosotros en el acto de investigar cosas con figuras, formas y razones (ratios) y [parecen] no tener alguna naturaleza ni de sí ni en sí mismos…" (Teofrasto, *Metaphysica* 4a18ff., pp. 308-309 Brandisii). Véase también Anders Wedberg, *Plato`s Philosophy of Mathematics* (Almqvist and Wiksell, Stockholm, 1955), p. 89, que enfatiza que Aristóteles, igualmente, parece anticipar alguno de los rasgos más destacables de la teoría kantiana de las matemáticas.

CON-TEXTOS KANTIANOS
International Journal of Philosophy
N.º 14, December 2021, pp. 135-160
ISSN: 2386-7655
Doi: 10.5281/zenodo.5775983

del que Kant difícilmente pudo no haber sido consciente. De hecho, la principal construcción requerida en el ejemplo favorito de Kant, el teorema acerca de los ángulos internos de un triángulo, está basado en el postulado de las paralelas que el propio Kant había intentado probar.)

Por consiguiente, la distinción entre modos de razonar intuitivos y lógicos era, para Kant, al menos en geometría, equivalente a la distinción entre el uso de postulados, es decir, principios de la construcción, y el uso de axiomas, es decir, los principios de la prueba. ¿Qué constituye, pues, esta última distinción? De acuerdo con una extendida interpretación, que se remonta a Aristóteles y, ciertamente [también] a los griegos, los postulados son asunciones de *existencia*. El problema de Kant de la justificación de las construcciones, por tanto, equivale al problema de justificar el uso de asunciones existenciales en matemáticas.

17. ¿CÓMO PUEDEN LAS CONSTRUCCIONES OFRECER CONOCIMIENTO A PRIORI?

Expresado de esta manera, todo el problema parece ser espurio. Ciertamente, no hay nada que pueda prevenir a un matemático de estudiar sistemas de axiomas que incorporan asunciones existenciales generales. El problema solo tiene sentido si nos ocupamos del problema de la aplicabilidad del razonamiento matemático a la realidad. Sin embargo, esto es ciertamente algo de lo que Kant no se había ocupado en la Exposición Trascendental, a pesar del hecho de que él insiste en que está hablando solo de matemáticas puras. (Esto aparece de manera particularmente clara en los parágrafos 8 y 9 de *Prolegomena*; véase la discusión de Vaihinger de estos parágrafos.) Podemos preguntar: ¿qué ocurre cuando aplicamos a la realidad un argumento matemático particular en cuyo desarrollo ha sido empleado un postulado, es decir, una asunción general existencial? Al aplicarlo, tenemos que introducir una representación para un nuevo individuo, como dice Kant, "sin tener presente ningún objeto al que me pudiera referir o bien anteriormente o ahora." La introducción de la nueva representación para un individuo es desarrollada a priori. La existencia del objeto individual en cuestión, en otras palabras, no es dada por la experiencia. Kant describe esta situación diciendo que la intuición o, en nuestros propios términos, la representación para un objeto individual precede a su objeto. Lo único que puede asegurarnos que hay algún objeto que corresponde a la representación es la asunción general existencial. Sin embargo, podría parecer que no habría para nada justificación general para la aplicación de asunciones generales a menos que estemos familiarizados, de hecho, con los objetos que asumimos que existen, cosa que simplemente no es el caso con las aplicaciones de nuestro conocimiento a priori. Parece imposible, como Kant dice, intuir algo a priori. Ya que en ausencia de una verdadera conciencia de que no hay, en realidad, nada que nos pueda asegurar que siempre podamos encontrar objetos que se correspondan realmente con las representaciones que hemos introducido o que tengan las propiedades que esperamos que tengan.[19]

La solución kantiana de este problema (real o aparente) consiste en decir que hay un y solo un caso en el cual podemos estar seguros de que los individuos cuya existencia hemos asumido realmente existen y tienen las propiedades deseadas. Este es el caso en el cual nosotros mismos hemos creado los objetos en cuestión o [en el que] nosotros mismos hemos puesto las propiedades y las relaciones en ellos.[20] Y él parece pensar que hay solo una fase de nuestra toma de conciencia de los objetos en la cual este tipo de 'poner propiedades en los objetos' puede tener lugar. O, más bien, hay solo una fase en la cual podemos 'poner propiedades' en *todos* los objetos (individuales). Esta fase es la percepción sensible. Puesto que la percepción sensible es el único modo en el cual un objeto individual puede 'abrirse camino' en nuestra conciencia. El sentido externo es el único modo en que podemos hacernos conscientes de los objetos externos. Por esta razón, es la única fase de nuestro llegar a conocer objetos en la cual nosotros mismos podemos dar relaciones espaciales a *todos* los

[19] Esta dificultad fue enfatizada por las críticas tempranas de Kant. Por ejemplo, J. G. E. Maas escribe en su extenso artículo, 'Ueber die transcendentale Aesthetik', *Philosophisches Magazin* **1** (1788) 117-149, como sigue, a propósito de la noción kantiana de intuición a priori: "Hierbey kann ich (I) die Bemerkung nicht vorbeilassen, dass eine Anschauung *a priori*… nach Kants eigenen Erklärungen nicht denkbar sey. Eine Anschauung ist eine Vorstellung. Sollte sie *a priori* seyn, so müsste sie schlechterdings nicht vom Objecte hergenommen werden, und eine Anschauung ist doch nur möglich, sofern uns der Gegenstand gegeben wird, dieses aber ist widerum nur dadurch möglich, dass er das Gemüth auf gewisse Weise afficiere. Eine Anschauung a priori ist demnach unmöglich, und kann mithin auch in Ansehung des Raumes nicht zum Grunde liegen" (pp. 134-135). Maas no se da cuenta, sin embargo, de que la posibilidad de un uso exitoso de intuiciones a priori es precisamente el problema que Kant estaba intentando resolver in la Estética Trascendental.

[20] En B xviii, Kant dice que él está "adoptando como un nuevo método del pensamiento… el principio de que podemos saber a priori acerca de cosas solamente lo que nosotros mismos ponemos en ellas." Véase también B xii-xiv. He realizado comentarios brevemente sobre el trasfondo histórico de esta asunción kantiana en 'Kant's "New Method of Thought" and his Theory of Mathematics', *Ajatus* **27** (1965) 37-47, reimpreso en *Knowledge and the Known* (nota 16), y en '*Tieto on valtaa*', *Valvoja* **84** (1964) 185-196.

CON-TEXTOS KANTIANOS
International Journal of Philosophy
N.º 14, December 2021, pp. 135-160
ISSN: 2386-7655
Doi: 10.5281/zenodo.5775983

objetos externos. Por tanto, las relaciones espaciales postuladas en geometría deben depender de la estructura del sentido externo.

Estoy trayendo a colación esta reconstrucción parcial solo como una primera aproximación a lo que Kant tenía en mente en la Exposición Trascendental. Esta reconstrucción está relacionada de modo notablemente estrecho con el 'argumento trascendental' de Kant en su teoría del espacio y el tiempo, especialmente tal y como se presenta en los *Prolegomena*. He intentado meramente rellenar esos espacios que el propio Kant no enfatizó a la luz de sus asunciones generales. La relación de mi reconstrucción parcial con los otros argumentos de la visión kantiana es más complicada, y requiere de una discusión más larga que no puedo llevar a cabo ahora.

Quiero enfatizar que no estoy afirmando para nada que el argumento de Kant es correcto. Mi principal propósito, al que sirve aquí la reconstrucción, es sugerir que el problema kantiano de la posibilidad de las construcciones en matemáticas, así como su pretendida solución, tiene sentido perfectamente incluso cuando, por 'construcción', solo se hace referencia 'a la introducción de representaciones individuales para conceptos generales'.

18. LA ESTRUCTURA DEL ARGUMENTO DE KANT

La estructura del argumento kantiano en la forma presentada aquí merece de todos modos un estudio más detallado. Sus varias fases pueden representarse a la luz de lo que se ha dicho como sigue:

(1) El razonamiento matemático se ocupa principalmente de la existencia de individuos.

(2) Los resultados del razonamiento matemático son aplicables a toda experiencia a priori.

En virtud de las asunciones 'copernicanas' generales de Kant ("podemos saber a priori de las cosas solo lo que nosotros mismos ponemos en ellas"), (1) y (2) nos obligan a concluir:

(3) La existencia de los individuos de los que se ocupa el razonamiento matemático depende del proceso por medio del cual llegamos a conocer la existencia de individuos en general.

Por supuesto, lo que realmente importa no es la existencia de los individuos como tales (hay muchos individuos que existen en el mundo), sino la existencia de los individuos que guardan las relaciones adecuadas unos con otros. Por tanto, podemos parafrasear (3) como sigue:

(4) Las relaciones recíprocas de los individuos de los que se ocupa el razonamiento matemático dependen del proceso por medio del cual llegamos a conocer la existencia de individuos.

Estos sistemas de relaciones recíprocas deberían mostrarse por la estructura del razonamiento matemático.

Ahora bien, Kant parece asumir que

(5) El proceso por medio del cual llegamos a conocer la existencia de individuos en general es la percepción (sensación).

De (4) y (5) se sigue que

(6) La estructura del razonamiento matemático depende de la estructura de nuestro aparato perceptivo.

Ahora bien, (6) es, en efecto, un rasgo básico de la doctrina completa y definitiva de Kant del método matemático, en cuanto complementada por los resultados que él pensó que había alcanzado en la Estética Trascendental.

CON-TEXTOS KANTIANOS
International Journal of Philosophy
N.º 14, December 2021, pp. 135-160
ISSN: 2386-7655
Doi: 10.5281/zenodo.5775983

19. ¿NOS SON 'DADOS' INDIVIDUOS?

El razonamiento que va de (1) a (6) no carece de interés ni de cierta plausibilidad. Puesto que hemos visto que el argumento kantiano puede ser traducido a los términos de la lógica moderna, tenemos, por tanto, que preguntarnos qué forma tomaría el mismo argumento en lógica simbólica. Los pasos (1)-(2) y (4) no me parecen completamente implausibles al aplicarlos a la lógica en lugar de a las matemáticas. Es en el (5) en el que Kant realmente se equivoca. Sencillamente, no es verdad que nosotros, generalmente o siempre, lleguemos a conocer la existencia de individuos en el mundo por medio de la percepción en el sentido de que la percepción sea la base del proceso desarrollado. Incluso podría preguntarse si alguna percepción tendría que estar involucrada [en este proceso]. Cuando llegamos a establecer la existencia de un número de un cierto tipo, no es correcto asumir que la percepción esté siempre involucrada. (Sin embargo, ¿un número es realmente un individuo? Quizás no; pero, ciertamente, para Kant, un número era un individuo cuando él llamó intuiciones a los símbolos del álgebra, es decir, representaciones de individuos. La interpretación kantiana del álgebra parte de la asunción de que los 'individuos' del tipo representado por las variables del álgebra también son conocidos solamente por medio de la percepción.) El concepto de un sentido interno al que Kant recurre aquí es uno de los puntos más débiles del sistema. Pensar en todo el conocimiento de objetos individuales como si fuera dependiente de la percepción es sucumbir a la tentación que para Kant pudo haber sido muy real, pero de la que es importante desprenderse. Esta es la tentación de pensar que los materiales básicos de conocimiento humano nos son *dados* a nosotros, receptores pasivos, que no tenemos que buscar activamente esos materiales. De acuerdo con esta falaz idea, la mente humana, a menudo concebida como un espíritu incorpóreo que habita una máquina extraña, supuestamente tiene que esperar a que las señales del exterior impacten en sus receptores. (Es interesante observar en esta conexión el modo en que Kant subrayó la naturaleza pasiva de la percepción, hablando, por ejemplo, de cómo los objetos se *nos dan* en la percepción.) El hecho de que la mente pueda, indirectamente, inducir el movimiento en la máquina no se considera que altere la situación de modo material. Ni tampoco cambia esencialmente la situación por el hecho de que, de acuerdo con Kant, la mente humana pueda organizar activamente de diversos modos los materiales brutos obtenidos de este modo, sumarlos e incluso modificarlos.

Espero no tener que argumentar aquí que esta imagen es *grundfalsch*, completamente falsa. Es más interesante preguntar por una mejor interpretación. Si la percepción no es el concepto general que engloba todo lo que queremos, ¿qué lo es? Me parece que, en la medida en que podamos dar un nombre general a todos los procesos por medio de los cuales llegamos a conocer la existencia de individuos, [esos procesos] deberían ser llamados, más que actos de percepción, procesos de búsqueda y encuentro, aunque tengamos que adecuar la percepción accidental de un objeto, así como la construcción deliberada de un objeto, como casos especiales de 'búsqueda' y 'encuentro' en este amplio (el más amplio posible) sentido. Por consiguiente, en lugar de (5), tenemos:

> (5)* El proceso por medio del cual llegamos a conocer la existencia de individuos es el de buscarlos.

En lugar de (6), tenemos, por tanto, que concluir:

> (6)* La estructura de un argumento lógico depende de la estructura de los procesos de buscar y encontrar.

Mi pretendida reconstrucción parcial del aspecto principal de la filosofía kantiana de las matemáticas como aplicada a la lógica simbólica moderna en lugar de a las matemáticas nos suscita, pues, una interesante sugerencia para la filosofía de la lógica de nuestros días. La sugerencia es la de considerar la lógica de la cuantificación como si fuera esencialmente la lógica de las nociones de búsqueda y encuentro (adecuadamente generalizada). Me parece que esta sugerencia probablemente suscitará interesantes e importantes consideraciones, si se desarrollara sistemáticamente.

CON-TEXTOS KANTIANOS
International Journal of Philosophy
N.º 14, December 2021, pp. 135-160
ISSN: 2386-7655
Doi: 10.5281/zenodo.5775983