UNA PERSPECTIVA PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON GEOGEBRA BASADA EN EPISODIOS. EL "PROBLEMA DEL CUADRADO"

Marcos Ascanio Zárate
Matías Camacho Machín

Universidad de La Laguna

Resumen

Los Sistemas de Geometría Dinámica (SGD) y en particular GeoGebra, son considerados cada vez más como una de las herramientas tecnológicas más útiles para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, principalmente en la Educación Secundaria. Es evidente que el curriculum tradicional de matemáticas debe ser repensado en términos de las potencialidades y restricciones que surgen a partir del empleo de tales herramientas, así como el tipo de actividades o tareas que se propongan. Abordamos en este artículo la resolución de un problema utilizando el marco de referencia que se basa en el empleo de episodios (Santos Trigo & Camacho Machín, 2013) que promueven el uso de la tecnología. En algunos de los casos, la propia reconstrucción de la figura que se presenta en el enunciado, lleva a dotar al problema propuesto de un amplio repertorio de elementos matemáticos no considerados a priori en su planteamiento.

Abstract

The Dynamic Geometry Systems (DGS), in particular GeoGebra, are considered as one of the most useful technological tools for the teaching and learning processes of Mathematics, and more importantly, in high education. Obviously, the traditional mathematics curriculum must be rethought in terms of the potentialities and restrictions that arise from the use of such tools, as well as the type of activities or tasks that are proposed. In this paper we address the resolution of a problem by using a reference frame that is based on the use of episodes (Santos Trigo & Camacho Machín, 2013) that promote the use of technology. In some cases, the reconstruction of the figure that is presented in the statement itself leads to endowing the proposed problem with a wide repertoire of mathematical elements that were not considered in its a priori approach.

FORMACIÓN DEL PROFESORADO E INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XIII
Ascanio, M.; Camacho, M. (2021). *Una perspectiva para la resolución de problemas con GeoGebra basada en episodios. El "problema del cuadrado". pp 37-59.*

Introducción

El uso de herramientas tecnológicas y sistemas de geometría dinámica abre a los estudiantes un amplio abanico de posibilidades en la mejora del aprendizaje de conceptos y procedimientos matemáticos llevados a cabo para dar solución a situaciones problemáticas dentro del aula. De esta manera, es importante utilizar los dispositivos digitales como herramienta de apoyo para que los estudiantes puedan desarrollar las diferentes representaciones de los objetos matemáticos o algo tan importante como el arrastre de objetos para poder analizar comportamientos o propiedades de estos.

La enseñanza de las matemáticas debe tener un enfoque dirigido hacia la resolución de problemas o situaciones problemáticas, con lo que se hace necesario poder trabajar con marcos teóricos basados en el de Polya, 1945, o que los mejoren usando los sistemas de geometría dinámica para apoyar dicho proceso, como proponen Santos-Trigo y Camacho-Machín (2013) y Camacho-Machín y Hernández (2017), que analizamos en este trabajo.

En este artículo nos hemos propuesto como objetivos:

- *Analizar con detalle la resolución de un problema no rutinario, manejando un SGD, haciendo uso de un marco de referencia derivado del utilizado por (Polya, 1945), el cual se basa en el empleo de varios episodios que promueven no solo el uso de la tecnología sino la resolución dimámica del mismo.*

- *Dotar al problema propuesto de un amplio repertorio de elementos matemáticos no considerados a priori en su planteamiento, gracias a la propia reconstrucción de la figura que se presenta en el enunciado.*

El uso de los Sistemas de Geometría Dinámica (SGD) en la resolución de problemas

Cuando se trata de utilizar programas de geometría dinámica, uno de los objetivos es que, con su ayuda, los estudiantes puedan mejorar los procesos de adquisición y desarrollo de los conocimientos y procesos matemáticos que derivan de la resolución de los problemas planteados. Además, este tipo de programas ayuda a los docentes en la tarea de comprobar propiedades y relacionar objetos matemáticos con su proceso de representación y como consecuencia su resolución.

GeoGebra brinda la oportunidad al usuario de construir, modificar representaciones de objetos matemáticos, tomar medidas y utilizar el arrastre de objetos. Esta última es la acción más importante para el desarrollo de las actividades propuestas a continuación, debido a que es la propiedad que más destaca en los SGD. Esta acción nos permite modificar un objeto de forma que se puede convertir una figura en otra, comprobar o validar características de objetos, etc.

En el desarrollo de este estudio aparecen relaciones y resultados matemáticos, que se han obtenido mediante la utilización de herramientas digitales, como puede ser el GeoGebra, y estas relaciones surgen durante el proceso de construcción de configuraciones geométricas que involucran elementos simples de la geometría tales como puntos, segmentos, polígonos, rectas o ángulos. Dichas construcciones dinámicas resultan muy importantes en la búsqueda de relaciones, de esta forma, los estudiantes deben construir su propio repertorio de resultados matemáticos a partir de analizar el comportamiento de los elementos de una construcción al mover los componentes dentro de la misma. En este proceso que se desarrolla se resalta la importancia de que el alumnado se plantee preguntas, formule conjeturas, busque argumentos que le permitan explicar la validez de sus conjeturas y comunique sus formas de razonamiento y resultados.

En el estudio que sigue, se ha propuesto en todos los apartados comenzar con un ejemplo donde se muestran algunos conceptos y relaciones relevantes que emergen durante la construcción de figuras que incluyen puntos, rectas, segmentos, etc. Por otro lado, en el proceso de construcción de las figuras se procede a la formulación de conjeturas, la necesidad de plantear argumentos que justifiquen la validez de las relaciones encontradas, la búsqueda de invariantes y la importancia de estudiar los casos particulares. Durante la construcción suelen aparecer preguntas que se van explorando a partir de la utilización del software. Dichas preguntas y conjeturas surgen al utilizar el arrastre y observar los cambios que se producen en la figura. Una construcción simple se convierte en una fuente para que el alumnado busque, formule y demuestre resultados matemáticos que se pueden ir observando.

Una parte fundamental del proceso de la representación de un problema o actividad con software como el GeoGebra, es la oportunidad que se les brinda a los estudiantes de formular preguntas. La facilidad para medir distancias, áreas o ángulos, hacen posible que la formulación de conjeturas sea más sencilla al estudiar comportamientos de estas magnitudes. Postman y Weingartner (1969) afirman que:

> El conocimiento se produce en respuesta a preguntas... Una vez que [el estudiante] ha aprendido a cómo preguntar -preguntas relevantes, apropiadas y sustanciosas- el estudiante ha aprendido cómo aprender y ya nadie lo puede detener en el camino de seguir aprendiendo lo que necesite y quiera conocer.

(Ob. cit. Chumpitaz-Malpartida, L. D. 2013)

De esta forma, resulta importante conocer las formas en las que los estudiantes puedan formular las preguntas con la ayuda de dicho software. Por este motivo, en los resultados presentados a continuación se actúa respondiendo a preguntas hipotéticas de los estudiantes en la resolución del problema. La discusión de dichas preguntas puede aportar información necesaria para que los estudiantes puedan realizar diferentes conjeturas, extiendan sus ideas o incluso realicen conexiones con conjeturas realizadas por otros estudiantes.

El SGD GeoGebra permite el ejercicio de actividades propias de la disciplina, tales como investigar, explorar y visualizar conjeturas o relacionar construcciones y resultados a partir de construcciones geométricas simples. El ambiente generado al realizar dichas construcciones es el adecuado para plantearse preguntas, buscar los invariantes, plantear argumentos y presentar y comunicar resultados. Esta última parte es fundamental, ya que los alumnos y las alumnas expresan primeramente un razonamiento de forma oral, y posteriormente, se pretende que se desarrolle de forma escrita con una notación y lenguaje adecuados. Estas conjeturas que desarrolla el alumnado pueden surgir de la observación de algunos objetos de la construcción, o como dijimos con anterioridad, del estudio de medir partes de la figura y estudiar su comportamiento al arrastrar alguno de los elementos que componen la figura.

Marco conceptual

El uso de GeoGebra o cualquier otro Sistema de Geometría Dinámica, es un escenario idóneo para que el profesorado provoque la reflexión y el proceso de creación de preguntas matemáticas en su alumnado.

Santos-Trigo y Camacho-Machín (2013) y Camacho-Machín y Hernández (2017), extienden y adaptan al uso de los SGD los planteamientos básicos propuestos por (Polya, 1945), incorporando una fase y adaptando las restantes cuatro en término de episodios, al objeto de facilitar el proceso de resolución de problemas con tecnología:

1. Comprensión: En el que la tecnología facilita la construcción de un modelo dinámico que ayuda a plantear y explorar preguntas que lleven a los estudiantes a comprender y dar sentido al problema.

2. Exploración: Las posibilidades que ofrece GeoGebra de controlar el movimiento de las figuras, la cuantificación de atributos, la representación funcional y la construcción de lugares geométricos, promueven la observación de regularidades, el encuentro de atributos que permanecen invariantes que deriven en propiedades y formulación de conjeturas

3. Búsqueda de múltiples aproximaciones: Las conjeturas y soluciones empíricas deducidas en el episodio anterior, proporcionan una serie de propiedades que llevan a realizar y llevar a cabo diferentes planes para dar con la solución. Es necesario promover la resolución, por parte de los estudiantes, del problema de diferentes maneras. En cada una de ellas se deben utilizar diferentes conceptos, representaciones o recursos matemáticos. De este modo se busca que los estudiantes conecten las distintas ideas matemáticas que conocen.

4. Conexiones y extensiones: La construcción dinámica es un recurso sobre el que se puede interactuar, ¿qué condiciones pueden relajarse? ¿la variación de qué elementos puede llevar a un resultado más

general? Son cuestiones que se deben intentar responder con la idea de extender el problema, al mismo tiempo que se amplía el uso de los conceptos matemáticos que lo envuelven.

5. Visión retrospectiva y reflexiones: Discutir sobre los resultados obtenidos es una tarea que el profesorado debe realizar y facilitársela a los estudiantes. ¿Qué acciones de las utilizadas fueron las trascendentales para la actividad?, ¿cuáles fueron necesarias o más efectivas? ¿Qué preguntas se plantearon antes, durante y después de resolver el problema?

El problema "El cuadrado interior"

Veamos a continuación el enunciado del problema con el que se trabajará.

Se tiene un cuadrado de vértices A, B, C y D. Se construyen cuatro segmentos tomando como uno de sus extremos los vértices y el otro, los puntos medios de los lados, E, F, G y H. Al hallar la intersección de los segmentos construidos se obtiene un cuadrado interior.

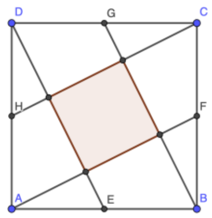


Figura 1. Cuadrado original.

¿Cuál es la razón entre el área del cuadrado original y el nuevo cuadrado? (Véase la figura).

Nelsen (1997), presentó una "justificación sin palabras" de que el área del cuadrado interior es la cuarta parte del cuadrado de partida, que visualmente es fácil de interpretar.

Figura 2. Demostración visual (Nelsen, 1997).

Para la resolución del problema, se describirán a continuación los cinco episodios descritos en el marco conceptual

Episodio 1: Comprensión del problema

Para comenzar a trabajar el problema, primero se debe conocer lo que se está pidiendo. En una primera fase de la construcción de la solución se debe crear una lista de preguntas que ayude a llevar el problema de lo abstracto a cosas concretas:

- ¿Qué objetos matemáticos nos podemos encontrar en el problema?
- ¿Qué propiedades caracterizan a un cuadrado?
- ¿Qué tipo de figuras geométricas surgen en el interior del cuadrado?
- ¿Qué ocurre si en lugar de utilizar el punto medio de los lados del cuadrado, tomamos un punto cualquiera de cada uno de los lados?
- ¿Cómo cambia el área del cuadrado interior? ¿Existirá alguna relación?
- ¿Cómo realizar todas estas construcciones con el GeoGebra?

Episodio 2: Exploración

El SGD puede ayudar en la construcción de una representación del problema. Es importante que el alumnado busque una correcta representación, ya que gracias a esta se va a facilitar la resolución del problema.

En una primera forma de representación pueden tomarse como lados del cuadrado los ejes x e y del sistema de coordenadas y utilizar el origen de coordenadas como uno de los vértices del cuadrado, aunque también se puede representar el cuadrado sin atender a ningún sistema de representación cartesiana tal y como se observa en la Figura 3

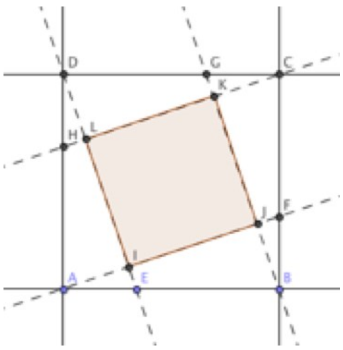


Figura 3. Una representación cartesiana del problema.

En la construcción de GeoGebra se puede ver como el punto del segmento AB puede ser movido para ir obteniendo todos los cuadrados que se generan dentro del original. Cuando observamos la figura en movimiento, se generan otras preguntas, como pueden ser: ¿se trata realmente de un cuadrado?, ¿qué pasa con el área del cuadrado cuando movemos el punto a lo largo del segmento AB?, ¿cómo varía la razón entre las áreas de los cuadrados?, ¿qué propiedades tiene el cuadrado interior?, ¿es un caso especial de este problema coger el punto medio? ¿Podríamos coger otro punto distinto?

Episodio 3: Búsqueda de múltiples aproximaciones

Aproximación Geométrica: El software GeoGebra, a igual que cualquier otro software de geometría dinámica como Cabri, Geometry Sketchpad, etc. permite calcular áreas de diferentes superficies, y puede ser una buena herramienta para ayudar a los estudiantes a descubrir la razón entre las áreas de ambos cuadrados.

Es muy común que los estudiantes busquen soluciones basadas principalmente en el álgebra, debido a que de esta forma pueden resolver el ejercicio y evitan una representación del mismo. A menudo, este camino les lleva a soluciones que son relativamente engorrosas por los cálculos que conlleva el uso de relaciones pitagóricas. Vamos a elaborar, apoyándonos en el uso de GeoGebra, una justificación del resultado desde una perspectiva geométrica. Lo primero que se hace es trazar un segmento que una el vértice A con el punto medio del segmento BC. Luego, se trazan los demás segmentos utilizando rectas paralelas y perpendiculares al primer segmento que pasen por los vértices del cuadrado original. En la figura 4 se puede observar que se forman 4 triángulos rectángulos cuyas hipotenusas coinciden con los lados del cuadrado original, cada uno de ellos con la misma área que el cuadrado interior.

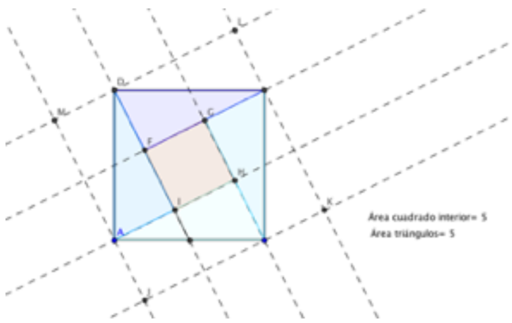


Figura 4: los triángulos rectángulos y una cuadrícula "especial"

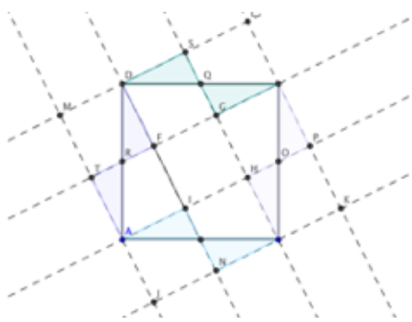
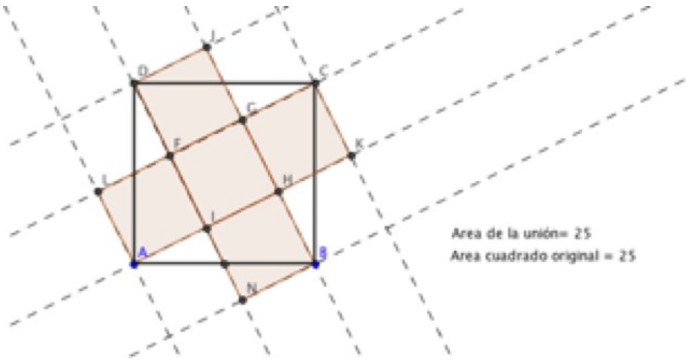


Figura 5: La notación para los rectángulos

Se puede verificar visualmente que tienen la misma área, teniendo en cuenta que el triángulo rectángulo interior, que se forma en la mitad de cada lado, es congruente con el que se forma en el exterior, con la otra mitad de cada lado. Podemos considerarlo como una rotación de centro el punto medio de cada lado y amplitud 180º del triángulo interior o simetrías centrales de centro dichos puntos como se observa en la Figura 5.

De esta forma, se obtiene que el área del cuadrado original es igual al área de los 5 cuadrados que se observan y que formarán la superficie equivalente a la cruz que muestra (Nelsen, 1997), tal y como se puede ver en la figura 6.



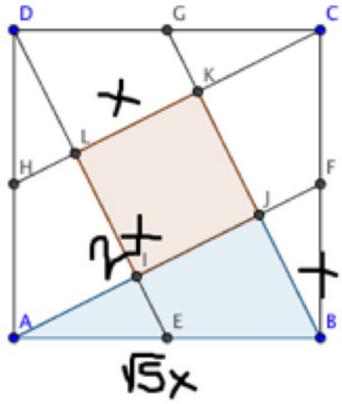


Figura 6: La superficie equivalente

Figura 7: Aproximación algebraica

En definitiva, se ha obtenido una posible resolución, convirtiendo el cuadrado original en 5 cuadrados de igual área al generado por las rectas que unen los vértices con el punto medio de cada uno de los lados.

Se tendrá, entonces, que la razón buscada es 1/5. Sea A el área del cuadrado ABCD, se cumple que el área del cuadrado FGHI es A/5.

Aproximación Algebraica

Una vez encontrada y justificada la solución haciendo uso de argumentos geométricos, procedemos ahora a aproximarnos a la solución desde una perspectiva algebraica. En la Figura 7 se observa que, llamando 'x' a un lado del cuadrado IJKL, se tiene que la base del triángulo rectángulo ABJ es $2x$ y el otro cateto tiene altura x. Así aplicando el teorema de Pitágoras, se tiene que, si se llama al lado del cuadrado original 'y' entonces

$$y^2 = x^2 + (2x)^2 = x^2 + 4x^2 = 5x^2 \Rightarrow y = \sqrt{5}x$$

y de esta forma se obtiene que: $Area(ABCD) = \sqrt{5}x \cdot \sqrt{5}x = 5x^2$

Así que, teniendo en cuenta que $Area(IJKL) = x \cdot x = x^2$, se cumplirá que la razón buscada es: $\frac{Area(IJKL)}{Area(ABCD)} = \frac{x^2}{5x^2} = \frac{1}{5}$

Episodio 4: Búsqueda de múltiples aproximaciones

Se puede pensar que podría existir una relación constante en el caso de que en lugar de tomar el punto medio (y dividir cada lado en dos partes iguales) dividiéramos los lados en más partes iguales.

Se trata de generalizar el problema de partida, modificando el problema con la intención de que el alumnado encuentre un patrón con el que puedan resolver una familia de problemas. Esta tarea es de suma importancia en la resolución de problemas. ¿Cuál es el área del cuadrado interior, si en lugar de coger el punto medio de cada uno de los lados, se elige el primero de una división en tres partes iguales de cada uno de los lados?, y si se coge el último punto de esta división,

¿La razón entre las áreas varía? Si se divide cada lado en cuatro partes iguales y se coge el primer punto de división, ¿cuál es la razón?...

Supongamos que, en lugar de tomar los puntos medios de los lados del cuadrado, elegimos puntos de las trisecciones de los lados. Para la construcción de dichas trisecciones se realizan homotecias de centros los vértices del cuadrado, de forma que se transforme el otro extremo del segmento (por ejemplo, $T=H_{A,1/3}(B)$), y razones r=1/3 y r=2/3. (Figura 8).

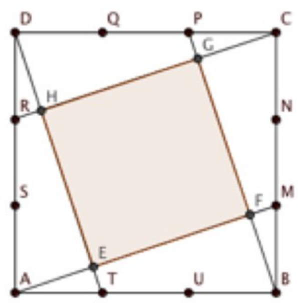


Figura 8: División del lado en tres partes iguales

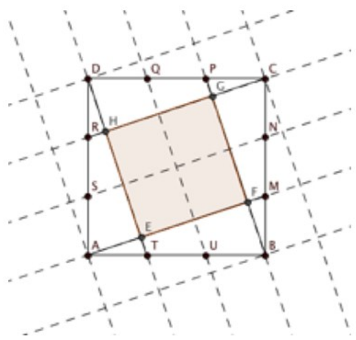


Figura 9: Construcción de la cuadrícula con GeoGebra

Lo primero será construir el segmento $\overline{AM}$, que une el vértice A con el primer punto de corte del lado $\overline{BC}$.

Se traza la recta $\overline{RC}$ paralela al segmento $\overline{AM}$, que pasa por el vértice C y por el punto R. Luego, se trazan las rectas perpendiculares a $\overline{RC}$, uniendo el vértice B con el punto P y otra que pasa por el vértice D y pasa por T. Si ahora se lleva a cabo un proceso similar, se trazan, a continuación, todas las rectas paralelas y perpendiculares, que pasen por los puntos construidos, para obtener una división del cuadrado original (Figura 9). Se observa que el cuadrado construido está formado por cuatro cuadrados pequeños. Si se llama a cada una de las áreas de estos cuadrados pequeños A_c, se obtiene que el área del cuadrado construido es cuatro veces A_c. Razonando de forma análoga al problema anterior, se obtiene que el área de cada uno de los triángulos rectángulos formados en los lados interiores del cuadrado original es 3/2 de A_c, por lo que, si sumamos el área de cada uno de los triángulos rectángulos, se tiene que el área total es $6A_c$. De esta forma, el área del cuadrado original es 10 veces el área del cuadrado pequeño, es decir $10A_c$

La razón de estas áreas es 4/10, o simplificado 2/5.

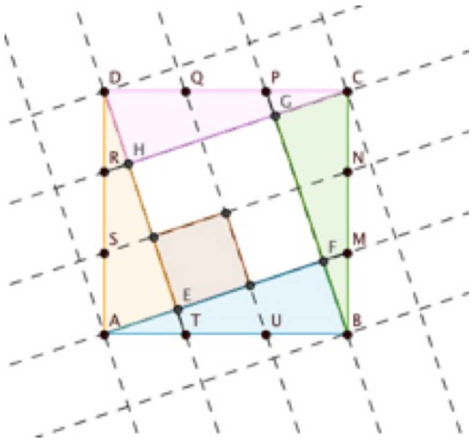


Figura 10: División en triángulos rectángulos.

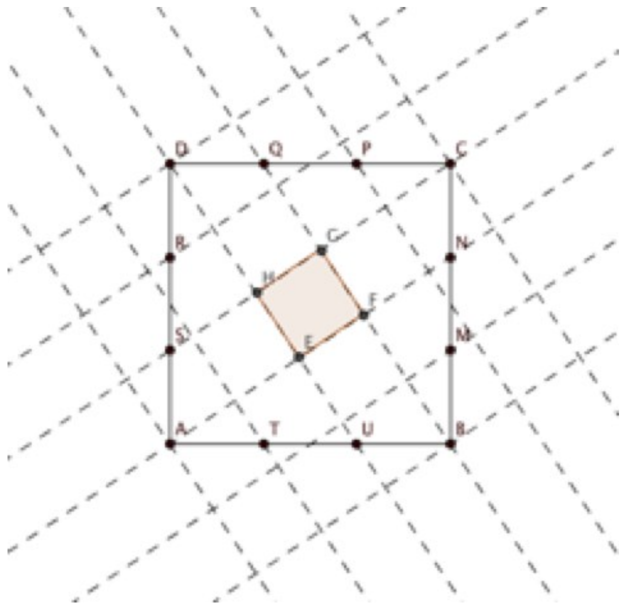


Figura 11: Razón de homotecia r=2/3

Si se utiliza como razón de homotecia r=2/3, entonces, se dividen los segmentos en tres partes iguales y se cogen los puntos U, N, Q y S respectivamente. Al igual que antes, se construye el cuadrado interior y, además, se trazan todas las rectas paralelas y perpendiculares (Figura 11). Si denominamos al área del cuadrado sombreado A_c, tenemos que el área de los triángulos rectángulos que se forman en cada uno de los lados del cuadrado (como en el caso anterior) es $3A_c$, con lo que el área del cuadrado original es 13 veces el área de A_c, es decir $13A_c$, con lo que la razón obtenida es 1/13.

Se puede seguir probando con algunos casos específicos más, como por ejemplo r=1/4 y r=3/4 (Figura 12). Las respectivas razones son 9/17 y 1/25, pudiendo comprobarlo de forma similar a la utilizada anteriormente.

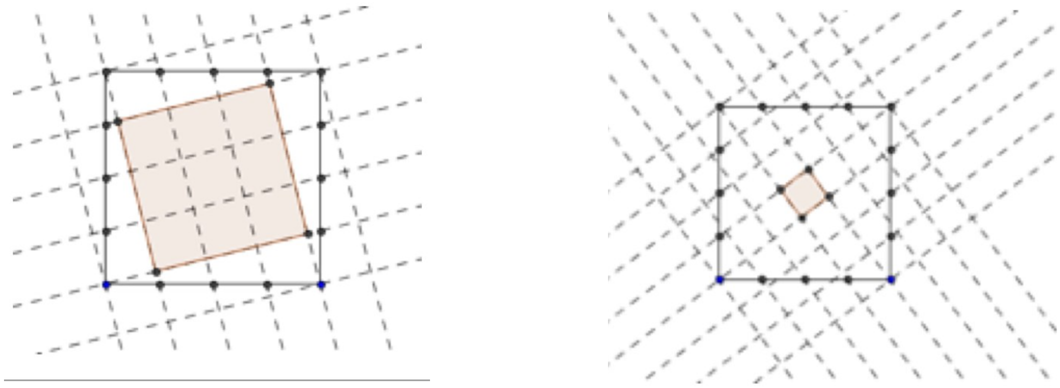


Figura 12: División de los lados en 4 partes iguales.

<u>Hacia la búsqueda de un resultado general</u>

El objetivo que nos planteamos ahora es encontrar alguna función que represente la relación existente entre las áreas del cuadrado construido y el cuadrado original, al elegir cualquier punto que se encuentre equiespaciado en el lado AB del cuadrado original. Hasta ahora, para cualquier razón de homotecia, se puede "contar" el número de cuadrados pequeños que se encuentran dentro del cuadrado construido. Una vez fijada la razón a/b, el objetivo es calcular "el número de cuadrados pequeños" que se encuentran en el cuadrado de partida y en el interior del sombreado para poder encontrar la razón entre sus áreas. Se observa que al construir todas las rectas paralelas y perpendiculares se construye un cuadrado exinscrito IJKL (fig. 13), en el que está inscrito el original ABCD

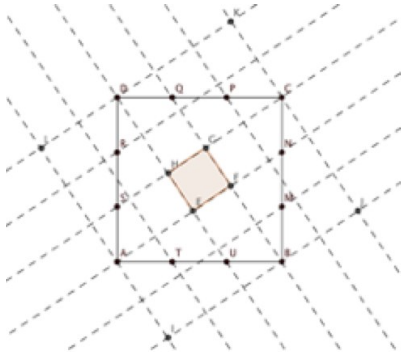


Figura 13: El cuadrado exinscrito

Este cuadrado también está formado por un número de cuadrados "pequeños", en términos de la razón a/b. En general, el área de dicho cuadrado será $(a + b)^2$. El número de cuadrados que se encuentran en los cuatro triángulos rectángulos que se forman en el lado interior de cada lado del cuadrado original es 2ab. Estos triángulos son congruentes con los que se forman exteriormente, entre el cuadrado original y el exterior. Por tanto, el número de cuadrados que se forman en el cuadrado original será Área cuadrado de partida = $(a+b)^2 - 2ab$. Teniendo en cuenta que el número de cuadrados que se encuentran en los triángulos rectángulos que se forman en el interior de los lados del cuadrado original es 2ab, se obtiene que el número de cuadrados que se encuentran en el cuadrado construido cumple que: Área del cuadrado interior = $(a+b)^2 - 4ab$.

En definitiva, las razones entre las áreas será:

$$\frac{\text{Área Cuadrado sombreado}}{\text{Área Cuadrado partida}} = \frac{(a+b)^2 - 4ab}{(a+b)^2 - 2ab} = \frac{(b-a)^2}{a^2+b^2}$$

La siguiente tabla recoge la generalización hecha:

Nº de divisiones de los lados (b)	Razón de homotecia (a/b)	Área cuadrado interior $(a+b)^2 - 4ab$	Área del cuadrado original $(a+b)^2 - 2ab$	Razón entre áreas
2	1/2	1	5	1/5
3	1/3	4	10	4/10
4	1/4	9	17	9/17
n	1/n	$(n-1)^2$	n^2+1	$(n-1)^2/n^2+1$
3	2/3	1	13	1/13
4	3/4	1	25	1/25
b	a/b	$(b-a)^2$	a^2+b^2	$(b-a)^2/a^2+b^2$

Tabla 1: Razón entre las áreas

Una vez realizada esta generalización, puede surgir otra pregunta: ¿Qué ocurre cuando a>b? Por ejemplo, si se construye un nuevo punto con razón de homotecia 4/3 y se utiliza este punto para realizar la construcción. (Obsérvese fig. 15).

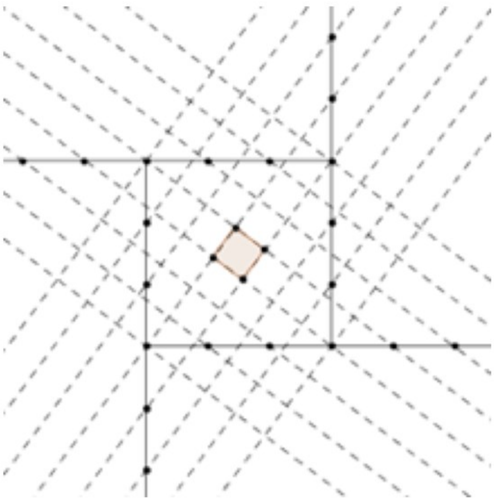


Figura 14: Cuadrado sombreado con nuevo punto con R=4/3

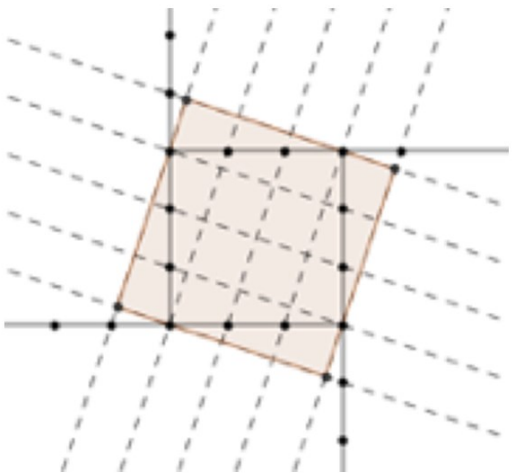


Figura 15: Construcción tomando a/b=-1/3

El cuadrado construido está formado por una unidad de área. Supongamos que su área es A_c. La razón del cuadrado sombreado con el área del cuadrado original es 1/25. La razón es la misma que en el caso r=3/4.

Se puede ver, de forma similar a la utilizada durante todo el estudio, que, si se va tomando "a" cada vez más grande, con b fijo, la razón se va aproximando a 1. Mientras se realizan estas construcciones, puede surgir otra pregunta: ¿qué pasa cuando a<0? Tiene sentido que se cuenten las unidades en dirección contraria a los razonamientos anteriores (dirección negativa). Con la construcción del nuevo cuadrado, podemos observar cómo el cuadrado construido es un cuadrado en el que se encuentra inscrito el original. Veamos el caso -1/3 con todas las rectas que lo construyen (Figura 15).

Claramente, el cuadrado que está sombreado está definido con las reglas que se han utilizado en otras construcciones y la razón del área entre el cuadrado construido y el cuadrado original es mayor que uno. El área del cuadrado sombreado es 16 veces el área de uno de los cuadrados pequeños que lo forman; y el área del cuadrado original es 10 veces el área de uno de estos cuadrados. La razón es 16/10 o, simplificado, 8/5. Este valor también verifica el resultado expresado anteriormente, sustituyendo a=-1 y b=3.

La razón, cuando tomamos como "punto de inicio" el que se construye al tomar una razón de homotecia r=-2/3 es 25/13. Este resultado se verifica tanto si se utiliza una construcción como las realizadas anteriormente como sustituyendo los valores en la fórmula. Cuando a=-3 y b=3, el área del cuadrado construido, será dos veces el área del cuadrado original; para a<-3, y b=3, la razón siempre será mayor que 1 (porque el cuadrado que construimos está inscrito sobre el original) y menor que 2.

En el siguiente apartado se presenta una interpretación en términos funcionales, que extiende las interpretaciones anteriores, de una manera más global.

<u>Una interpretación gráfica</u>

Ahora, una vez analizadas las diferentes construcciones, se puede pensar desde un punto de vista funcional. Tomando x = a/b, de esta forma, x es la distancia del vértice A del cuadrado de partida al punto con el que se construye la primera recta. De esta forma, si se sustituye a = bx en la fórmula, obtenemos que la razón es:

$$razón = f(x) = \frac{1 - x^2}{x^2 + 1}$$

Usando el GeoGebra, se puede representar la función f(x) obtenida.

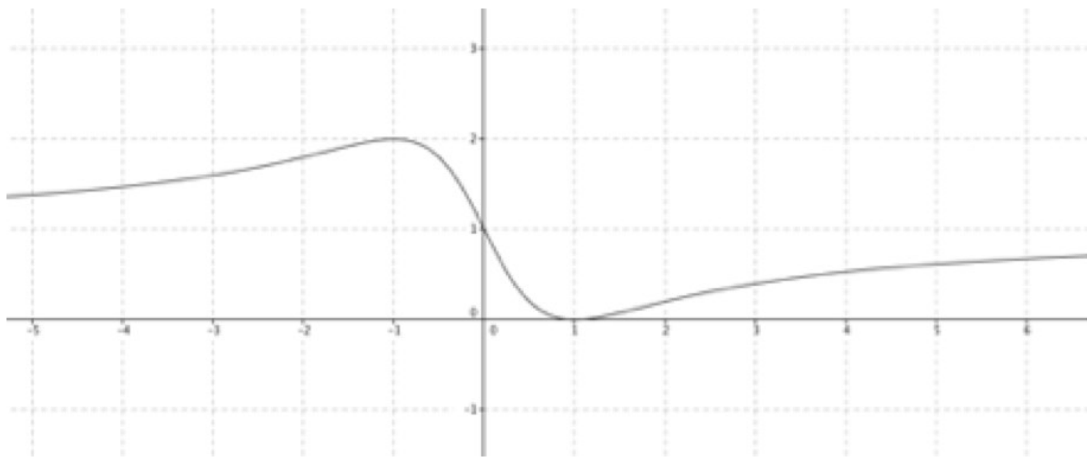


Figura 16: Función que representa la razón entre las áreas

Dado que x representa el cociente de la posición que ocupa el punto (a) y el número de partes en la que se divide el lado del cuadrado (b), la función f(x) permite analizar algunas de las características señaladas. Si hacemos que x varíe entre 0 y 1, la razón de las áreas varía entre 1 y 0. Para x=1/2, la razón es 1/5; para x=1/3 la razón es 2/5, etc. Nos podemos hacer la siguiente pregunta: ¿Para qué valores de x podemos obtener una razón de 1/2?,¿1/10?, etc. Cuando x varía desde 1 hasta un número grande, la razón siempre aumenta, pero se mantiene entre 0 o 1. Así, cuando x se hace grande, la razón está acotada por 1. Cuando x varía entre 0 y -1 la razón aumenta de 1 a 2. Se alcanza un máximo local cuando x = -1. Desde x = -1 hasta |x| muy grande, el área va decreciendo, pero siempre siendo mayor que 1. El recorrido de la función es de 0 a 2. Para cualquier valor en este rango, exceptuando los valores 0, 1 y 2, hay dos valores de x que verifican dicho valor. Si tomamos 0, 1 o 2 en el recorrido, el resultado que obtenemos es un único valor de x, correspondiente a la mínima razón (x = 1), la razón unidad (x = 0), o

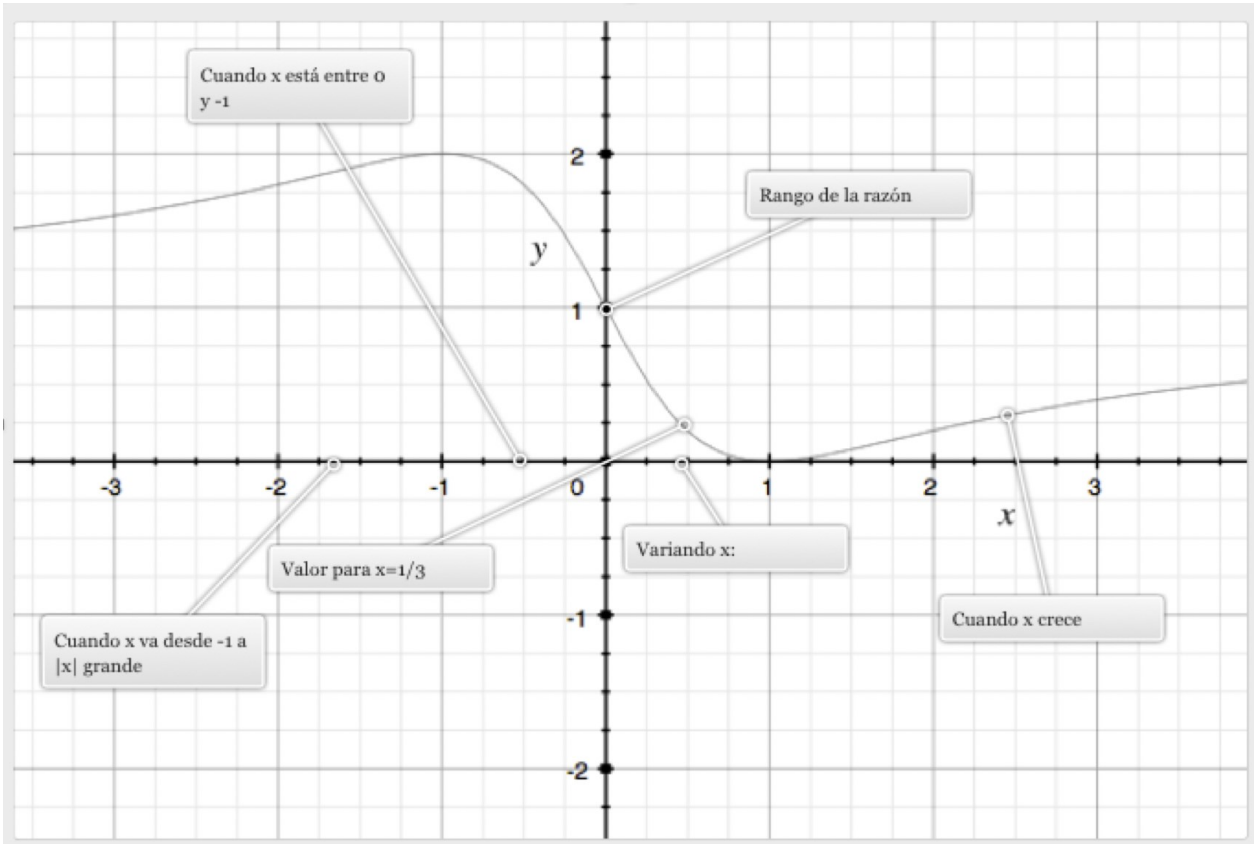


Figura 17: Imagen con indicaciones sobre la función "razón" $\boldsymbol{f(x)}$.

la máxima razón (x = 2). Si tomamos valores del recorrido de la función que se encuentren entre 0 y 1, los valores de x serán positivos; en cambio si tomamos dichos valores entre 1 y 2, los valores de x serán negativos.

Episodio 5: Visión Retrospectiva y reflexiones

- El uso sistemático del GeoGebra, en las diferentes formas de aproximarnos hacia la resolución de problemas, nos permite identificar un marco de referencia práctico para estructurar y guiar actividades de aprendizaje que puede ayudar a los estudiantes a desarrollar procesos de pensamiento.

- Una característica específica de este marco de referencia es que la construcción de los modelos dinámicos suministra formas interesantes de aproximación desde perspectivas visuales y empíricas.

- Posteriormente, los métodos analíticos y formales servirán de soporte para las conjeturas establecidas y los casos particulares que aparecen en las aproximaciones iniciales a los problemas.

- El uso de herramientas computacionales nos suministra, no solamente una base para introducir y relacionar las soluciones empíricas con las formales, sino también el uso de heuristicos potentes (el arraste, la búsqueda de lugares geométricos, por ejemplo) dentro de la representación dinámica de los problemas.

- Desde esta perspectiva, el profesorado podrá utilizar este marco de referencia para centrar la atención en las actividades envueltas en cada episodio.

- Es fundamental considerar que un problema constituye una oportunidad para el alumnado de representar, explorar y examinar los problemas desde diferentes perspectivas, para ayudarle a formular conjeturas y formas de justificarlas.

A modo de conclusión:

Se ha podido observar a lo largo de esta resolución, de qué manera un SGD como GeoGebra añade una nueva dimensión a un problema sencillo, haciéndolo "crecer" de una forma importante. Partiendo de una *Proof without* words y siguiendo los diferentes episodios y algunos heurísticos básicos asociados a dichos episodios, se ha podido observar cómo se puede reproducir el quehacer de un matemático o matemática que se cuestiona variaciones a partir de los diferentes resultados y conjeturas que van surgiendo en el proceso de resolución. El uso organizado de la tecnología facilita esta visión de la Resolución de Problemas y contribuirá a la formación de los estudiantes de todos los niveles.

Agradecimientos: Esta investigación ha sido parcialmente financiada por el Proyecto de investigación del Plan I+D+I del MICINN del Gobierno de España, con referencia EDU2017-84276-R.

Referencias bibliográficas

Camacho-Machín, M., & Hernández, A. (2017). Resolución de Problemas y Uso de Sistemas de Geometría Dinámica. Un ejemplo. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática, XII,* 31-48.

Chumpitaz-Malpartida, L. D. (2013). *La Génesis instrumental: Un estudio de los procesos de instrumentalización en el aprendizaje de la función definida por tramos mediado por el software GeoGebra con estudiantes de ingeniería.* Tesis doctoral. Pontificia Universidad Católica del Perú.

Nelsen, R. B. (1997). Proofs without Words: Exercises in Visual Thinking (Classroom Resource Materials). *The Mathematical Association of America.*

Polya, G. (1945). *How to solve it?* Penguin Books. New York

Santos-Trigo, M., & Camacho-Machín, M. (2013). Framing the use of computational technology in problem solving approaches. *The Mathematical Enthusiast, 10* (1&2), 279-302