 DOI: 10.24844/EM3303.09

Trabajo matemático de profesores universitarios: Heurísticas de solución de una tarea

Mathematical work of university professors: Heuristics solving of task

Carolina Henríquez-Rivas[1]
Carolina Guerrero-Ortiz[2]
Andrés Ávila Barrera[3]

Resumen: El estudio de las tareas y las acciones que se suscitan como producto del trabajo con ellas, es un tema necesario de abordar para potenciar el aprendizaje de las matemáticas. La presente investigación se plantea como objetivo, caracterizar el trabajo matemático de profesores universitarios que desarrollan una tarea con un contexto cercano a la realidad. Para ello, consideramos su desarrollo especialmente en el mundo de las matemáticas. Con base en dos perspectivas de investigación, *Modelización* y *Espacio de Trabajo Matemático*, presentamos un estudio colectivo de casos de tipo instrumental que nos permite analizar los procesos de solución de tres profesores. Los resultados muestran en las diversas heurísticas de solución analizadas, cómo la actividad exhibida está determinada por las características de la epistemología del trabajo profesional de los participantes. La investigación concluye con una discusión sobre algunos aportes a la educación matemática, en cuanto a los

Fecha de recepción: 16 de junio de 2020. **Fecha de aceptación:** 8 de septiembre de 2021.

[1] Departamento de Matemática, Física y Estadística, Facultad de Ciencias Básicas, Universidad Católica del Maule (Chile), chenriquezr@ucm.cl, orcid.org/0000-0002-4869-828X

[2] Instituto de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile), carolina.guerrero@pucv.cl, orcid.org/0000-0001-8765-1815

[3] Departamento de Ingeniería Matemática, Centro de Excelencia de Modelación y Computación Científica, Universidad de La Frontera (Chile), andres.avila@ufrontera.cl, orcid.org/0000-0001-7180-1479

alcances teóricos dados por la coordinación de las dos perspectivas y el uso de tareas, así como las posibilidades que brinda su implementación en diversos contextos educativos y en la práctica docente.

Palabras clave: *Tareas. Trabajo Matemático. Modelización. Heurísticas de Solución. Profesor Universitario.*

Abstract: The study of tasks and the actions arising as a result of working with them play an important role for enhancing the learning of mathematics. This research aims to characterize the mathematical work of university teachers who develop a task with a context close to reality. For this purpose, we consider their development especially in the world of mathematics. Based on two research perspectives, Modelling and Mathematical Workspace, we present a collective instrumental case study that allows us to analyze the solution processes of three teachers. The results show how the exhibited activity is determined by the characteristics of the epistemology of the participants' professional work. The research concludes with a discussion of some contributions to mathematics education, in terms of the theoretical scope given by the coordination of the two perspectives and the use of tasks, as well as the possibilities offered by their implementation in various educational contexts and in teaching practice.

Keywords: *Task. Mathematical Work. Modelling. Heuristics solving. University Professor.*

1. INTRODUCCIÓN

El estudio de las características de las tareas ha sido ampliamente abordado por distintos investigadores (Watson y Ohtani, 2015; Stein *et al.,* 1996; Maaß, 2010). Si bien no existe un consenso en la definición de tarea, los investigadores coinciden en cuanto a la importancia de su elección y diseño para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Watson y Mason 2007; Margolinas, 2013).

Las tareas pueden abarcar diversos contextos, tanto matemáticos como realistas. En su perspectiva con contextos cercanos a la realidad, resultan un elemento central en las estrategias de solución que emergen, pues están vinculadas al conocimiento del individuo respecto al mundo real y al mundo matemático

(Maaß, 2010; Borromeo-Ferri, 2006; Kaiser *et al.*, 2011). En este sentido, Girnat y Eichler (2011) plantean que en una situación que involucra conocimientos cercanos a la realidad, los objetos matemáticos pueden aparecer previamente al proceso de matematización, sin que el individuo sea consciente de su presencia o sus propiedades, tal es el caso de objetos de la geometría euclidiana. También existen estudios que analizan el tránsito entre el mundo real y el mundo matemático, centrándose en el proceso completo de modelación (Borromeo-Ferri, 2006). Sin embargo, se han encontrado pocas investigaciones que abordan las particularidades de los procesos que emergen en el trabajo desarrollado en el mundo matemático (Guerrero-Ortiz *et al.*, 2018; Halverscheid, 2008).

De esta manera, surge una dimensión de investigación para analizar las características del trabajo que tiene lugar en el mundo de las matemáticas. En particular, pretendemos aportar a la comprensión del desarrollo matemático y pensamiento matemático que se puede promover con una tarea. Para ello, consideramos el trabajo desarrollado por profesores universitarios de matemáticas, lo cual nos permite analizar las particularidades que tienen lugar al trabajar en el mundo de las matemáticas. Por lo tanto, nos planteamos como objetivo de investigación caracterizar el trabajo matemático de profesores universitarios que desarrollan una tarea con un contexto cercano a la realidad. Sobre la base de los resultados, discutimos los aportes a la educación matemática, en relación con los alcances teóricos dados por la coordinación de dos perspectivas de investigación, las características de la tarea y las posibilidades que brinda su implementación en contextos educativos y en la práctica docente.

En la siguiente sección describimos los fundamentos teóricos que dan soporte a la investigación. Posteriormente, presentamos los elementos metodológicos que describen las características de los participantes y del análisis de datos. La sección 4 presenta una descripción y análisis de las heurísticas previstas. La sección 5 muestra los resultados empíricos. El documento concluye con la sección 6, que presenta una discusión sobre los aportes y la relevancia del estudio para la educación matemática, y las conclusiones de este.

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Para caracterizar el desarrollo del trabajo matemático de los profesores universitarios, nos apoyamos en el marco del *Espacio de Trabajo Matemático* (Kuzniak, 2011; Kuzniak *et al.*, 2016a), y asumimos la perspectiva de Model-eliciting activities –actividades generadoras de modelos– (Lesh y Doerr, 2003), la cual permite entender los modelos como sistemas conceptuales que emergen al resolver una tarea. Y, como herramienta metodológica en el análisis de los procesos desarrollados, nos basamos en las fases del ciclo de *Modelización* (Blum, 1993).

2.1 Modelización

Diversas perspectivas de investigación se relacionan con la modelización, considerada como el tránsito entre mundo real y el mundo de las matemáticas para resolver una situación que se presenta en la realidad (Kaiser *et al.*, 2011). En este trabajo consideramos, como se mencionó, la perspectiva de Model-eliciting activities (Lesh y Doerr, 2003), la cual nos permite dar cuenta del potencial de una tarea para involucrar a los individuos en actividades significativas, proveer de una base de conocimiento para exploraciones o aplicaciones posteriores y fomentar el uso de diferentes heurísticas y representaciones (Lesh y Doerr, 2003). En esta perspectiva se entiende que las personas utilizan sus modelos mentales, compuestos por sistemas conceptuales, para interpretar sus experiencias. Además, el conocimiento (matemático y extra-matemático) de los individuos al abordar una tarea es determinante para el desarrollo de la actividad que realizan, en tanto que los modelos son expresados utilizando una variedad de medios.

Para el caso en que las tareas involucran elementos de la geometría, asumimos que, así como diversas situaciones o fenómenos representan parte de la realidad, una figura no es lejana de ella, entendiendo que en la vida cotidiana el ser humano convive naturalmente con figuras que se presentan de diferentes maneras. Por lo tanto, la figura constituye un objeto presente en la realidad, con propiedades matemáticas, que no necesariamente son conscientes para el individuo. En este sentido, en la modelización de situaciones que involucran figuras geométricas, la separación entre el mundo real y el mundo de las matemáticas no es tan evidente (Girnat, 2009; Girnat y Eichler, 2011).

De esta manera, dado el tipo de tarea que presentamos en esta investigación, se valora la naturaleza ontológica de la geometría según Girnat (2009), y se reinterpreta la noción de modelo con una visión más amplia, en el sentido de Lesh y Doerr (2003), quienes entienden un modelo como un sistema conceptual compuesto por elementos, relaciones, operaciones y reglas que pueden ser externalizadas para construir, describir y explicar el comportamiento de otros sistemas. Los medios de externalización pueden ser diagramas, lenguaje hablado, metáforas, cálculos aritméticos y sistemas complejos de expresiones matemáticas. Así, un sistema conceptual tiene un componente externo y un componente interno, lo que podemos observar por medio de las representaciones, forma parte del componente externo. De acuerdo con Lesh y Doerr (2003) entendemos las heurísticas que surgen en el marco de Model-eliciting activities como aquellos procedimientos específicos y aproximaciones en la búsqueda de soluciones a un problema que va más allá de su conocimiento matemático específico y que le permiten a un individuo encontrar formas productivas de adaptar, modificar y refinar las ideas que tiene.

Por otro lado, para la descripción del trabajo desarrollado, consideramos el ciclo de modelización propuesto por Blum (1993), que identifica cuatro fases relevantes del proceso, las cuales no necesariamente se presentan en forma secuencial: (1) *Situación Real*, la situación planteada es idealizada, simplificada o estructurada para obtener un *Modelo del Mundo Real*; (2) a través de un proceso de matematización se obtiene un *Modelo Matemático*; (3) mediante la manipulación y análisis del modelo matemático es posible obtener *Resultados Matemáticos;* (4) *Reinterpretación* de los resultados en relación con la situación original, y validación del modelo matemático.

2.2 Espacio de Trabajo Matemático (ETM)

Las tareas en el marco del ETM cumplen un rol fundamental, si bien no forman parte del modelo, son las activadoras del trabajo (Kuzniak, 2011). En esta investigación consideramos una tarea en concordancia con la perspectiva de Model-eliciting activities, las que tienen su origen en una situación real y que permiten analizar el trabajo de los individuos, cuando ponen en juego sus conocimientos matemáticos.

El ETM se define como un ambiente organizado para comprender el trabajo de personas (profesor, estudiante o un matemático) que resuelven tareas matemáticas y proporciona herramientas teóricas y metodológicas para caracterizar los caminos que emergen en su resolución (Kuzniak *et al.*, 2016a; Gómez-Chacón *et al.*, 2016). En esta concepción teórica se distinguen y articulan dos planos: el *epistemológico*, relacionado con los contenidos matemáticos estudiados; el *cognitivo*, centrado en los procesos de la actividad matemática del individuo y cómo adquieren, desarrollan y utilizan el conocimiento matemático en su práctica (Kuzniak, 2011; Kuzniak *et al.,* 2016a).

El plano epistemológico lo conforman las componentes *representamen, artefactos y referencial*. Las componentes del plano cognitivo son los procesos de *visualización, construcción y prueba*. La articulación entre los planos se realiza mediante las génesis *semiótica, instrumental y discursiva* (Flores y Montoya, 2016).

La *génesis semiótica* relaciona el representamen con el proceso de visualización y está basada en los registros de representación semiótica (Duval, 1995). El representamen se relaciona con los objetos matemáticos en función de las interpretaciones y relaciones construidas por el individuo, según el proceso de visualización. Desde nuestro posicionamiento, se distinguen dos modos de visualización que pueden funcionar según el tipo de operación con las figuras y cómo se movilizan sus propiedades (Duval, 2005, 2016): *visualización icónica*, caracterizada por el reconocimiento o por comparación con un modelo tipo de formas; *visualización no-icónica*, implica la introducción de trazos suplementarios, desarrollar secuencias de operaciones para reconocer propiedades geométricas y la descomposición de una figura inicial.

La *génesis instrumental* hace operativos los artefactos mediante un proceso de construcción (Flores y Montoya, 2016). En relación con los artefactos consideramos la perspectiva de Rabardel (1995), quien distingue entre artefacto e instrumento. Los artefactos aluden a objetos de tipo material o simbólico, mientras que los instrumentos se refieren a entidades mixtas formadas por el artefacto y componentes cognitivos relacionados con su uso. El proceso de construcción depende de los artefactos utilizados y las técnicas de uso empleadas por cada individuo (Kuzniak *et al.*, 2016a). Bajo nuestra perspectiva, estas acciones pueden abarcar diversas funciones cognitivas como la exploración o la experimentación.

La *génesis discursiva* da sentido al referencial (definiciones, teoremas, propiedades) sobre la base de razonamientos en el proceso de prueba (Henríquez-Rivas y Montoya-Delgadillo, 2016). La prueba está relacionada con la producción de validaciones con apoyo de los elementos teóricos de la componente referencial (Henríquez-Rivas y Montoya-Delgadillo, 2015). Los razonamientos discursivos permiten formular hipótesis, conjeturas, argumentaciones o demostraciones (Kuzniak *et al.*, 2016a).

En el ETM, las génesis permiten interacciones que activan distintas formas de trabajo matemático, lo que denominamos *planos verticales* (Kuzniak y Richard, 2014). En estas interacciones se identifican: plano semiótico-instrumental *[Sem-Ins]*, cuando los artefactos se usan para construir objetos matemáticos bajo ciertas condiciones, sin un propósito de validación; plano instrumental-discursivo *[Ins-Dis]*, cuando la prueba emplea un artefacto y se basa en una experimentación o en la justificación de una construcción; plano semiótico-discursivo *[Sem-Dis],* cuando los procesos de prueba y visualización se desarrollan en forma coordinada (Kuzniak *et al.,* 2016a). Los planos verticales se presentan en la figura 1.

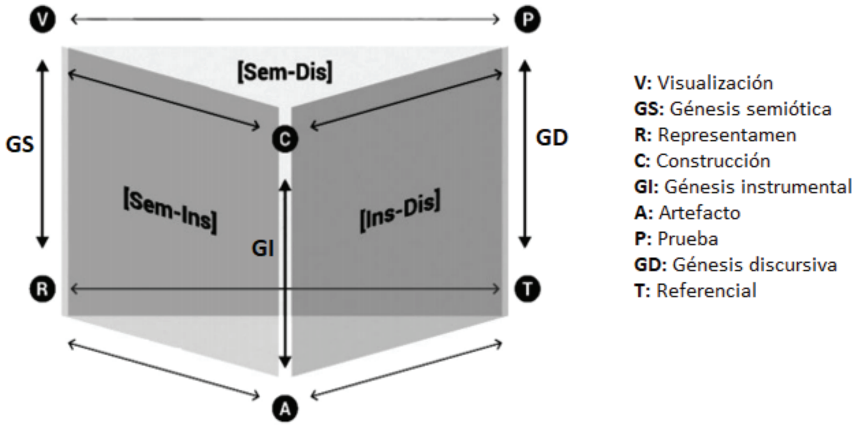

Figura 1. Los tres planos verticales, las componentes y las génesis en el modelo del ETM (Kuzniak *et al.,* 2016a).

Consideramos la denominación *circulación* en el ETM para los análisis de las interacciones entre las génesis y planos, cuando se especifican las componentes puestas en juego por el individuo que resuelve la tarea (Montoya-Delgadillo *et al.*, 2014). A su vez, consideramos la noción de *cambio de dominio* (Montoya-Delgadillo y Vivier, 2016), en el análisis de la circulación para describir la relación entre dos dominios matemáticos (geometría, álgebra, probabilidad, etc.).

Lo anterior corresponde a las bases teóricas que sustentan nuestra investigación y su coordinación (Prediger *et al.*, 2008) atiende, a la manera de otros trabajos (Halverscheid, 2008; Guerrero-Ortiz *et al.*, 2018), para la construcción del sustento conceptual que nos permite interpretar el trabajo matemático de profesores universitarios cuando resuelven una tarea con un contexto cercano a la realidad, y nos dan la posibilidad de caracterizar el trabajo que tiene lugar en el mundo de las matemáticas.

3. ELEMENTOS METODOLÓGICOS

3.1 Características de la investigación

El diseño de la investigación se enmarca en el paradigma cualitativo, específicamente implementamos un *estudio colectivo de casos de tipo instrumental* (Stake, 2007), pues nos permite analizar el trabajo matemático desarrollado en el proceso de modelización de tres profesores que, constituyen un instrumento para caracterizar el trabajo matemático al desarrollar la tarea dada. Para alcanzar el objetivo propuesto, consideramos profesores de nivel universitario que realizan investigación en matemáticas sin formación pedagógica, pues su conocimiento especializado sobre las matemáticas, nos podría permitir observar un trabajo matemático más robusto asociado a una tarea con amplias posibilidades de solución. La selección de la tarea se basó en la flexibilidad de su diseño para presentarse en diversos niveles y contextos de resolución, además, admite heurísticas de solución que involucran una amplia gama de conocimientos.

La investigación se llevó a cabo en dos etapas:

Análisis de las heurísticas previstas de solución: mostramos cuatro heurísticas de solución basadas en distintos niveles de conocimiento. Esta etapa nos permitió reconocer el alcance que pueden tener las respuestas a la tarea. En particular, se analizan dos heurísticas, 3 y 4, más cercanas al trabajo de los profesores universitarios.

Experimentación y análisis: participaron cinco doctores en matemática que realizan investigación en matemática pura y aplicada. De estos seleccionamos tres casos para el estudio (en adelante M1, M2 y M3), cuyos criterios de selección obedecen, por una parte, a la variedad de los fundamentos epistemológicos de las áreas de su investigación y, por otra, sus producciones exhiben un trabajo más cercano al mundo de las matemáticas. El área de investigación de los participantes es: M1 en Teoría de Números y Representaciones, M2 en Teoría de Nudos y Representaciones, y M3 en Ecuaciones Diferenciales Parciales y Métodos Numéricos.

De esta manera, interpretamos el trabajo realizado por cada uno de los participantes para caracterizar su desempeño en el mundo de las matemáticas, lo que nos permite abordar el objetivo de investigación propuesto.

Las fuentes para la recolección de datos consideran los materiales escritos con las producciones de los participantes al resolver la tarea dada, y una entrevista individual semiestructurada con preguntas abiertas para profundizar en el razonamiento que subyace a las estrategias de solución y la relación con su práctica matemática.

En relación con las estrategias de triangulación (Denzin, 1978), se usa la *triangulación de datos* basada en los análisis de las heurísticas previstas, las producciones y entrevistas de cada participante. Además, consideramos la *triangulación del investigador*, dado por la experiencia y formación de los autores (una especialista en modelización en didáctica de la matemática, una especialista en ETM y un especialista en modelación matemática).

3.2 Análisis de datos

El análisis de datos, tanto de las heurísticas previstas como de los datos de la experimentación, se presenta según los siguientes momentos:

Descripción de las heurísticas de solución. Para el caso de las heurísticas previstas, se describen cuatro estrategias. En las estrategias de los profesores universitarios, se describe el trabajo de M1, M2 y M3.

Análisis teórico. De la descripción de cada heurística, primero se interpreta el trabajo observado de acuerdo con las fases del ciclo de modelización y, posteriormente, se profundiza en la actividad matemática de acuerdo con el ETM.

Caracterización global del trabajo. Se presenta de manera sintética, la progresión del proceso de modelización y la circulación del trabajo matemático realizado, mediante el uso coordinado de los diagramas de Modelización y de ETM. En los esquemas presentados, las flechas y su orientación indican las interacciones dadas entre las componentes en la circulación del ETM y las relaciones más significativas.

Para el análisis de los datos, consideramos el siguiente protocolo que identifica las fases de la Modelización y la circulación del ETM, lo cual se detalla en la tabla 1.

Tabla 1. Protocolo de análisis de datos

Dimensión Teórica	Descripción
Modelización	
Situación real/Modelo del mundo real	Comprende el contexto de la tarea y muestra primeras aproximaciones para resolverla.
Modelo matemático/ Resultados matemáticos/ Reinterpretación de resultados	Se concreta la transición del mundo real al mundo matemático, identificándose relaciones matemáticas, patrones y formas de generalizar. Las particularidades de la actividad matemática desarrollada en estas fases se caracterizan utilizando el ETM.
Circulación en el ETM	
Génesis y componentes	Se reconoce la activación de las génesis (semiótica, instrumental, discursiva) y las componentes de cada plano (epistemológico y cognitivo) utilizadas.
Planos verticales	Se reconocen las interacciones entre las génesis mediante los planos verticales: *[Sem-Ins]*, *[Ins-Dis]*, *[Sem-Dis]*, que son activados por quien resuelve.

Fuente: elaborado por los autores.

3.3 Presentación de la tarea: Las baldosas de Teresa

La tarea tiene origen en los problemas llamados *puzzles de polyminós* (Golomb, 1994), que involucran elementos de la geometría combinatoria. Estos problemas favorecen el descubrimiento, la búsqueda de formas de ordenamiento más óptimas y presentan pocos métodos generales de solución. Consideramos un T-tetrominó para embaldosar un tablero de 8×12, sin dejar huecos y sin modificar el T-tetrominó. La tarea fue propuesta como se muestra en la figura 2.

El piso del baño de la casa de Teresa tiene forma rectangular y está embaldosado con baldosas cuadradas. El piso tiene exactamente 8×12 de estas baldosas, como muestra la figura. A Teresa le gustaría renovar el piso de su baño y usar sólo baldosas en forma de T, que están hechas de cuatro baldosas alineadas como muestra la figura. ¿Es posible embaldosar el piso usando estas baldosas?

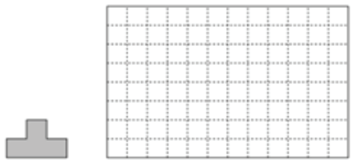

Figura 2. Tarea presentada a los profesores universitarios.
Fuente: Iniciativa ARPA de la Universidad de Chile.

Por supuesto, podría abrirse la discusión sobre la cercanía del contexto de la tarea a la realidad o sobre su pertenencia al mundo intra-matemático, donde también son analizados procesos de modelización (OCDE, 2013). En este caso, involucra la existencia de una idealización previamente considerada en el contexto de la tarea como fue diseñada por la *Iniciativa ARPA*, lo cual nos permite acotar el rango de heurísticas de solución para el uso de lápiz y papel. Otro elemento de dicha idealización es que, para completar el embaldosado sólo se utilizan T-tetrominós con orientación *izquierda, arriba, derecha y abajo* (figura 3).

Figura 3. T-tetrominós según su orientación.
Fuente: elaborado por los autores.

4. ANÁLISIS PREVISTO DE LA TAREA

En lo que sigue, presentamos los análisis previstos de la tarea considerando los momentos de descripción de las heurísticas, análisis teórico y caracterización global del trabajo.

4.1 Descripción de heurísticas previstas

Heurística 1: *Ordenamiento intuitivo.* Se completa el embaldosado con atención en la forma del T-tetrominó. La idea es acomodar las baldosas por ensayo y error, siguiendo un razonamiento intuitivo. También, se puede identificar la relación entre las figuras según su orientación, o bien, que existe la misma cantidad de una y de otra figura. Además, se reconocen caminos que no conducen a una solución. Estas ideas pueden ser detonantes para transitar hacia un trabajo matemático más abstracto.
Heurística 2: *Ordenamiento con atención al T-tetrominó*. Se considera la búsqueda de un ordenamiento con atención en el T-tetrominó, que puede o no conducir a una solución que responde a la tarea. Por ejemplo, ubicar los T-tetrominós, a lo largo del perímetro, de afuera hacia adentro, siguiendo una orientación y buscando regularidades en el proceso de llenado. Esto supone que no siempre podrá ser completado con este tipo de estrategia.
Heurística 3: *Construcción y ordenamiento de un patrón mínimo en el tablero.* Se considera la configuración de un patrón mínimo de 4×4 conformado por cuatro T-tetrominós para cubrir el embaldosado. El ordenamiento del patrón en el tablero puede ser organizado a partir de diversas estrategias, destacamos dos de ellas: construcción de un patrón mínimo y su repetición, y construcción de un patrón mínimo y aplicación de isometrías. En la construcción del patrón, se identifican dos combinaciones de T-tetrominós (figuras 4A y 4B) y una que no es posible (figura 4C), pues al situar el T-tetrominó en posición *izquierda* queda un espacio en la parte superior izquierda que no es posible de completar con un T-tetrominó.

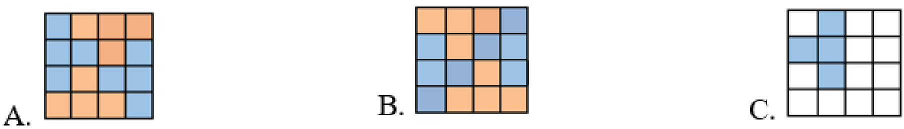

Figura 4. Construcción del patrón mínimo en el tablero.
Fuente: elaborado por los autores.

Resaltamos que en las dos estrategias que componen la heurística 3, a diferencia de las heurísticas 1 y 2, la atención se pone en el cuadrado formado por los cuatro T-tetrominós.

En la primera estrategia, el patrón permite completar el tablero de 8×12 como una herramienta que se repite y el embaldosado se considera como un tablero dividido en 6 piezas cuadradas que serán completadas (figura 5). Para cubrir el tablero es posible repetir el patrón por desplazamiento vertical y horizontal. En esta estrategia no es explícito un razonamiento matemático abstracto o formal, más bien el razonamiento considera operaciones concretas por la repetición del patrón (Piaget y Hinhelder, 2007).

En la otra estrategia, que involucra el paso a una forma de razonamiento más abstracto, una vez que se conforma el patrón, el embaldosado puede ser cubierto mediante isometrías aplicadas al cuadrado (4×4). Por ejemplo, en la figura 5, el tablero se puede completar por la aplicación de traslaciones o reflexiones al patrón. Con estas estrategias se puede cubrir cualquier tablero rectangular que tenga dimensiones múltiplos de 4.

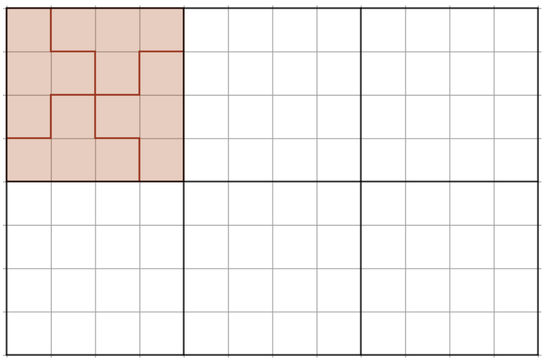

Figura 5. Ordenamiento del patrón.
Fuente: elaborado por los autores.

Heurística 4: *Construcción, ordenamiento y combinaciones del patrón*. Centrado en las posibilidades de ordenamiento del patrón y las piezas que lo componen. Al contar el patrón de 4×4 con repetición, se tienen dos posibilidades (figuras 4A y 4B), de manera que en un rectángulo de 8×12 se tienen 6 posibles ocupaciones, lo que significa $2^6 = 64$ posibilidades de ordenamiento. Además, con el patrón 4×4 se puede cubrir el embaldosado considerando los ordenamientos de los T-tetrominós al interior de este. Para explicar esto, centramos la atención en las figuras 4A y 4B, y rotamos cada figura con centro en el cuadrado de 4×4 en 90°, así se conforman las imágenes de otros dos cuadrados que también completan el tablero; por ejemplo, la figura 6 es la rotación en 90° de la figura 4A, en el sentido horario. Esto genera otras dos posibilidades más, es decir, $4^6 = 4096$ posibilidades de ordenamiento.

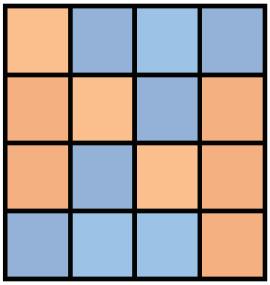

Figura 6. Imagen por rotación de la figura 3A.
Fuente: elaborado por los autores.

Observemos que las heurísticas 3 y 4 conforman una unidad mínima cuadrada o modelo de ordenamiento que completa el tablero. Otras estrategias pueden asociarse con estas heurísticas que están dadas por la conformación de otros patrones, por ejemplo, de 4×8.

4.2 Análisis teórico y caracterización global del trabajo

En este apartado, analizamos las heurísticas previstas 3 y 4.

Heurística prevista 3

Modelización. La noción de modelo que adoptamos puede involucrar figuras sin una descripción detallada de sus propiedades matemáticas, es decir, la configuración del patrón de ordenamiento puede ser más cercano a la realidad (en un sentido más intuitivo), o de acuerdo con su ordenamiento puede (o no) dar lugar a una actividad matemática más profunda, lo cual depende de los esquemas de uso de quien resuelve. En términos del proceso de modelización describimos las fases como sigue: *Situación real*, está dada por lo que involucra el enunciado del problema, podríamos aquí considerar una situación más abierta, por ejemplo, solicitar a quien resuelve que se acerque físicamente y tome medidas de un piso para embaldosar; por lo que el punto de partida para el proceso de solución es el *Modelo del mundo real*, aquí nace la primera aproximación para la conformación de un patrón mínimo de ordenamiento que contribuya a llenar el embaldosado; *Modelo*, el patrón de ordenamiento se configura como un modelo, un cuadrado con propiedades (conscientes o no para el individuo) que funciona como un artefacto para cubrir el cuadriculado. El trabajo desarrollado con este modelo determina el nivel de actividad matemática que tiene lugar en el mundo de las matemáticas. En este caso la actividad matemática puede ir desde cubrir el embaldosado por repetición del patrón, al llenado por aplicación de isometrías al cuadrado (figura 5); *Resultados matemáticos,* pueden estar dados por el número de patrones necesarios para cubrir el tablero y las posibles isometrías. Finalmente, estos resultados deberían ser contrastados con la *Situación real*.

Circulación en el ETM. Las fases de matematización y trabajo matemático describen dos estrategias de resolución que implican el uso de un patrón mínimo: una considera la repetición del patrón; en la otra, el patrón se repite por la aplicación de isometrías.

Inicialmente, el trabajo activa la génesis semiótica, donde la figura inicial (T-tetrominó) permite conformar el patrón y, luego, el embaldosado. El patrón es considerado como un objeto geométrico o representamen y su uso en el embaldosado involucra una secuencia de operaciones y el reconocimiento de sus unidades figurales,[4] lo que se asocia con la visualización no-icónica. En ambas estrategias el trabajo activa el plano vertical *[Sem-Ins],* donde el patrón se emplea como un artefacto simbólico asociado al registro de representación de las figuras (Duval, 1995).

Resaltamos diferencias según los tratamientos al patrón que cada estrategia plantea. En la estrategia que completa el embaldosado por la repetición del patrón, no se distingue una definición o propiedades matemáticas asociadas a las transformaciones. En la otra, el patrón completa el tablero por la aplicación de isometrías para obtener el embaldosado, lo que involucra la componente referencial y, eventualmente, el plano *[Sem-Dis],* si se presentan razonamientos de prueba. En la figura 7, se distinguen ambas estrategias: en el lado izquierdo

[4] Duval (1995) clasifica *unidades figurales elementales* asociadas con las figuras geométricas, según su dimensión y forma, y señala "Una figura geométrica es siempre una configuración de al menos dos unidades figurales elementales" (p. 159).

se muestra la estrategia por repetición del patrón (se identifica con un 1); en el lado derecho, la completación por isometrías (se identifica con un 2).

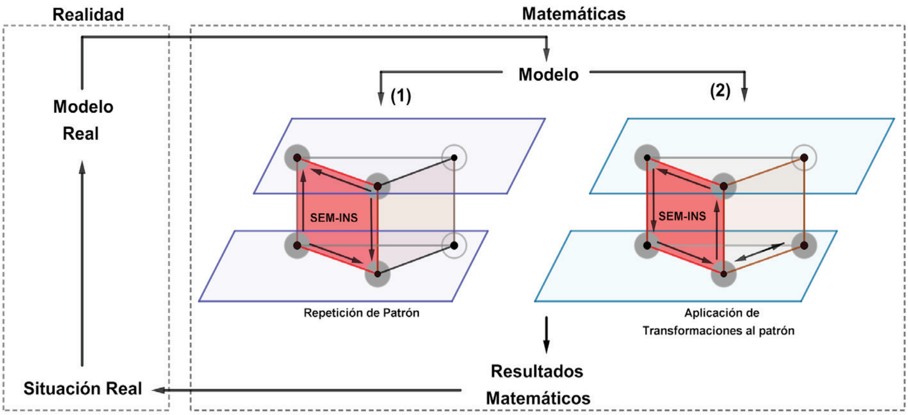

Figura 7. Esquema global de heurística 3 según la Modelización y el ETM.
Fuente: elaborado por los autores.

Heurística prevista 4

Modelización. Si bien el modelo está dado por el patrón, se consideran las particularidades que tiene el ordenamiento en su interior conformado por los T-tetrominós. En relación con el proceso de modelización, las fases: *Situación real* y *Modelo del mundo real* se constituyen de la misma manera que en la heurística 3. Además, aquí se toman en cuenta las posibles combinaciones que se pueden generar mediante diferentes ordenamientos, las cuales inicialmente podrían ser "visualizadas" en forma mental. El *Modelo* es conformado por el patrón de ordenamiento, el cual ahora es visto con propiedades matemáticas en dos perspectivas, en su conformación interna y externa para cubrir el tablero. El trabajo desarrollado con este modelo involucra las transformaciones aplicadas al patrón y a las combinaciones internas de los T-tetrominós. Los *Resultados matemáticos* están dados por el número de combinaciones internas y externas con las que se puede embaldosar. Finalmente, los resultados deberían ser contrastados con la *Situación real.*

Circulación en el ETM. En la construcción del modelo matemático, el trabajo activa la génesis semiótica, el objeto geométrico inicial y la visualización no-icónica involucran la conformación del patrón y su ordenamiento en el embaldosado, que es empleado como un artefacto simbólico. Estas acciones activan el plano *[Sem-Ins]*.

Asimismo, se usan transformaciones para conformar tipos de patrones, reconociendo sus características, lo que se asocia con la componente referencial. Su ordenamiento en el tablero requiere considerar sus unidades figurales y el estudio de las combinaciones posibles, lo que asociamos con una intención de validación, lo cual activa el plano *[Sem-Dis]*. Estas acciones implican un cambio de dominio matemático, de la geometría a elementos de combinatoria, donde el razonamiento de validación se asocia con las distintas combinaciones posibles. Los análisis se sintetizan en la figura 8, en la cual ilustramos la idea cambio de dominio con los números 1 y 2.

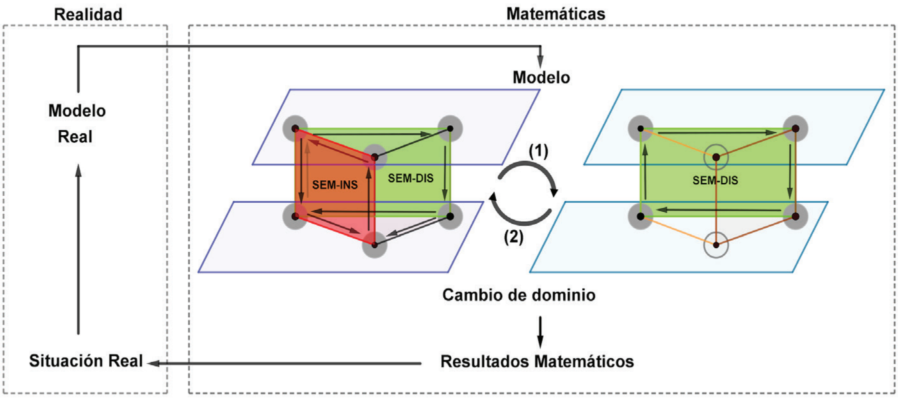

Figura 8. Esquema global de heurística 4 según la Modelización y el ETM.
Fuente: elaborado por los autores.

Destacamos que las heurísticas 3 y 4 admiten la posibilidad de generalización con el patrón mínimo de 4×4 que completa el tablero 8×12: *Si un tablero tiene dimensiones M×N, con M y N múltiplos de 4, entonces para embaldosar se requiere que, M×N sea divisible por 4 y se necesitan exactamente M×N/4 T-tetrominós. En caso contrario, si M×N no es divisible por 4, entonces su resto es 1, 2 o 3 y existirían cuadrados que no pueden completarse por el T-tetrominó, lo cual contradice el enunciado de la tarea.* En la perspectiva del ETM, estos análisis involucran la activación del plano vertical *[Sem-Dis]*, dado por las interacciones entre el referencial, los procesos de prueba y visualización.

5. RESULTADOS EXPERIMENTALES

Presentamos los análisis del trabajo de los casos, M1, M2, y M3, estos resultados son de acuerdo con los momentos descritos en la sección metodológica, siguiendo el protocolo de análisis de la tabla 1.

5.1 Heurística del caso M1

En esta estrategia la atención está en la pieza T-tetrominó. Inicialmente, se asemeja con la heurística prevista 2 y contempla el estudio de los casos en que no es posible embaldosar. M1 comienza con un tablero de 6×8 y lo estudia para diferentes posiciones del T-tetrominó. Basado en estos casos propone dos estrategias: 1) genera un bloque de 4×4; 2) inicia cubriendo una esquina con dos T-tetrominós y expande el llenando al resto del tablero (figura 9A). M1 experimenta las posibilidades de completado desde la esquina e identifica ejemplos que no le permiten completar el tablero. Estudia diferentes dimensiones del tablero (5×12, 6×12 y 7×12), llenando de izquierda a derecha donde encuentra algunos casos que no tienen solución, por ejemplo, 5×12 y 7×12, sin llegar a completar el tablero como lo demanda la tarea (figura 9B).

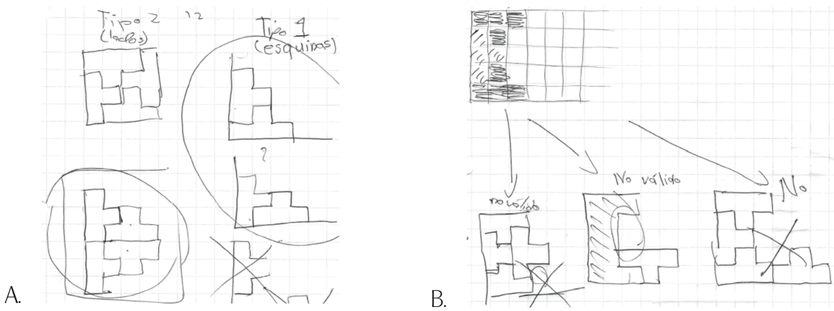

Figura 9. Imágenes de la producción escrita por M1.

Modelización. Se identifica que el *modelo del mundo real* está dado por la consideración de la pieza T-tetrominó para embaldosar el tablero, es decir el T-tetrominó es el *modelo*. Mientras que, cuando analiza aquellos casos en que el problema no tiene solución, M1 modifica constantemente la situación inicial, lo cual interpretamos como un ir y venir entre la realidad y la matemática.

Circulación en el ETM. En el análisis al trabajo matemático de M1, el proceso de visualización no-icónica está dado por la descomposición de las figuras y operaciones con las piezas empleadas como artefactos simbólicos. Así, identificamos que el plano vertical activado es *[Sem-Ins]*. Luego, la visualización de las figuras se coordina con la validación mediante una prueba discursivo-gráfica (Richard, 2004), lo que activa el plano *[Sem-Dis]*. En este sentido, se destaca una actividad matemática con intención discursiva, pero sin palabras, para el análisis de casos que no tienen solución en la tarea. Lo anterior se representa en la figura 10.

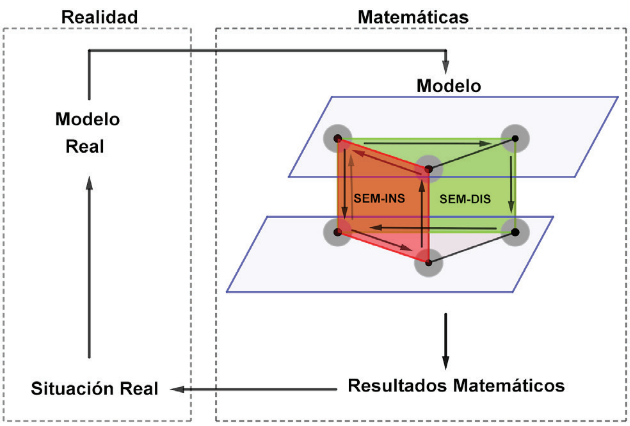

Figura 10. Esquema global de heurística de solución por M1.
Fuente: elaborado por los autores.

5.2 Heurística del caso M2

Esta estrategia se presenta como una ampliación de la heurística prevista 4, pues considera el tablero dividido en bloques para contar sus combinaciones. M2 define inicialmente cuatro formas de organización de los bloques: división del tablero en bloques verticales de 4×8, bloques cuadrados de 4×4, bloques de 12×4 y combinaciones de dos bloques distintos; cada uno con 2^3, 2^6, 2^4 y 2^2 posibilidades de combinación (figura 11A). Luego, organiza los cuatro tipos de bloques para encontrar nuevas posibilidades, centrándose en el número de combinaciones que se generan, 2^4 y 2^5 (figura 11B). Para 2^4, encuentra un caso de combinaciones de dos bloques 4×8 y dos de 4×4 y, otro bloque de 12×4 y tres de 4×4. Para 2^5 encuentra dos casos, un bloque de 4×8 vertical u horizontal con 4 bloques de 4×4. M2 no menciona cómo se organizan los T-tetrominós para conformar los bloques y asume que existen dos combinaciones para cada caso. Es decir, su interés no está en analizar ni justificar la conformación del bloque, sino sus posibilidades de combinación.

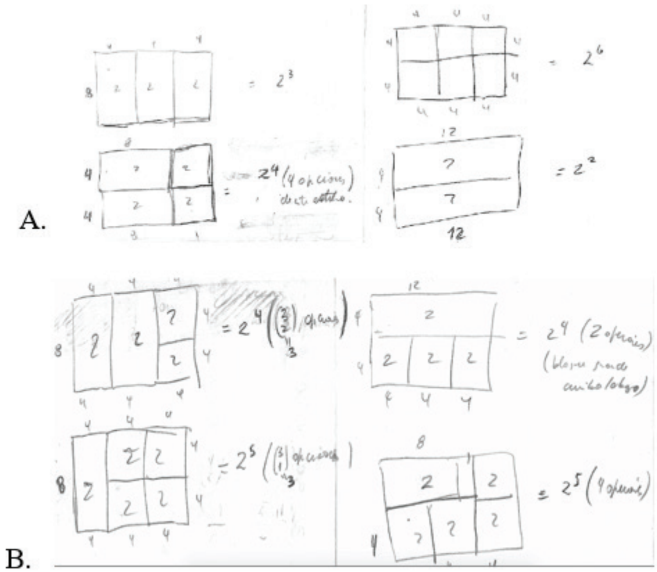

Figura 11. Imagen de la producción por M2.

Modelización. Para M2 el *modelo de la realidad* está dado por la consideración de una pieza compuesta por T-tetrominós para completar el tablero. M2 se apoya en esta situación para realizar todo el trabajo matemático. El *modelo* está constituido por los bloques de medidas distintas que fueron utilizados. Una vez obtenidas las combinaciones para el llenado del tablero, no muestra una confrontación con la situación que dio origen a su trabajo, al determinar un camino de solución, se ocupa de la organización matemática del mismo. Por lo cual, se observa el tránsito de la realidad al mundo de las matemáticas en un solo sentido.

Circulación en el ETM. El trabajo de M2 inicialmente se desarrolla en el dominio geométrico, pues los bloques son considerados como figuras (rectángulos y cuadrados) que cubren el tablero. El proceso de visualización no-icónica involucra la secuencia de operaciones y la deconstrucción de distintos ordenamientos de las figuras, las cuales se emplean como artefacto simbólico; es decir, se activa el plano *[Sem-Ins]* y la componente referencial con las definiciones y perímetro de las figuras geométricas involucradas.

Cada trabajo asociado al estudio de los bloques involucra un cambio de dominio, de la geometría a la combinatoria, en la relación con las posibilidades de ordenamiento que considera un trabajo semiótico para representar los bloques (registro figural) y las potencias (registro numérico). Estos cambios de dominios se describen en la figura 12 con los números 1 y 2.

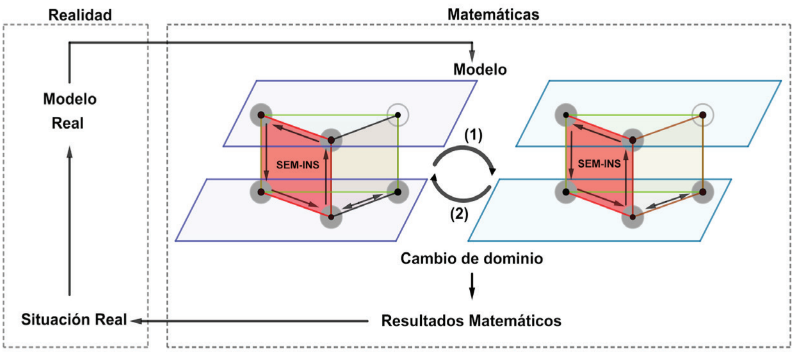

Figura 12. Esquema global de heurística de solución por M2.
Fuente: elaborado por los autores.

5.3 Heurística del caso M3

M3 inicia definiendo las cuatro orientaciones posibles del T-tetrominó, representados por un *nodo*, donde el perímetro del T-tetrominó se constituye por las 10 caras de los cuadrados que lo conforman. Luego, modela la situación con grafos (figura 13A) y representa los contactos entre las caras de los T-tetrominós buscando no dejar caras sin contacto. Cada *arco* simboliza la vecindad por contacto entre las caras de los T-tetrominós y le asocia un valor por el número de caras en contacto, para representar un embaldosado completo por todos sus T-tetrominós con sus diez caras en contacto, con vecinos o el borde. La cantidad de caras de contacto entre dos T-tetrominós pueden ser 1, 2 y 3.

M3 representa como *nodo borde* a los T-tetrominós que se encuentran a la orilla del tablero y *nodo interno* a los T-tetrominós que se encuentran rodeados por otras piezas. Los nodos bordes tienen 1, 3 o 4 caras sobre el borde del tablero, por lo cual quedan 9, 7 o 6 caras por cubrir internamente (sin contacto con dicho borde). Para los nodos internos, existen 10 caras que tienen contacto, lo que significa que no hay espacios entre ellos y sus vecinos. Luego, M3 presenta el tablero embaldosado, sin precisar cómo lo construye, y señala que para un tablero de 12×8 se necesitan 24 nodos, por lo cual el problema consiste en: dado un nodo inicial, agregar nodos vecinos, de manera que los arcos sumen 10. Entonces, para resolver la tarea, la ordenación de los arcos por su valor permite definir una estrategia de llenado por conteo para encontrar posibles soluciones. En la figura 13B, las tonalidades de colores en la malla son utilizadas para identificar los T-tetrominós de la misma clase.

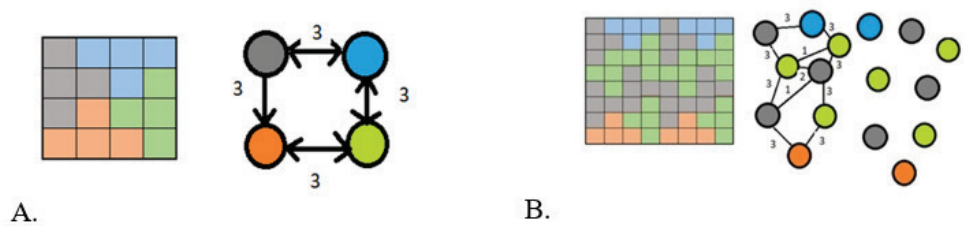

Figura 13. Imagen de la producción de M3 para completar el embaldosado.

Modelización. La estrategia de M3 permite un tránsito, en ambos sentidos, entre *la situación real* y el *modelo* dado por el grafo, pues a partir de la información que ofrece la representación mediante el grafo es posible reconstruir la situación inicial, lo cual puede ser asociado a la verificación de los resultados matemáticos en relación con la situación original. Es decir, el grafo en el rol de *modelo* es una herramienta que describe cómo será el ordenamiento de los T-tetrominós en el tablero.

Circulación en el ETM. El trabajo matemático de M3 involucra en el proceso de visualización no-icónica, la descomposición de figuras de los objetos geométricos que se emplean como una herramienta semiótica en interacción con un grafo para representar el ordenamiento de los T-tetrominós en el tablero, lo que activa el plano *[Sem-Ins]*. M3 justifica su construcción, pues los números en el grafo son usados para representar los contactos entre las caras de los T-tetrominós y tienen valor discursivo dentro de la prueba por medio del grafo que modela la situación original. Es decir, activa el plano *[Ins-Dis]*. El trabajo desarrollado evidencia cambio de dominio, que relaciona la geometría con elementos de la matemática discreta (por la aproximación al estudio de grafos). El análisis se esquematiza en la figura 14, los cambios de dominio se identifican con los números 1 y 2.

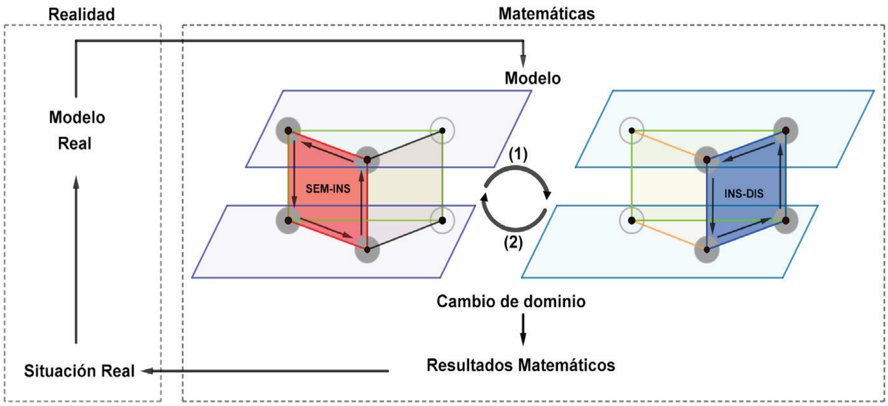

Figura 14. Esquema global de heurística por M3.
Fuente: elaborado por los autores.

Para concluir el análisis observamos globalmente los procesos de solución desarrollados, junto con extractos de las entrevistas que nos ayudan a comprender las razones de su proceder. Esto se efectúa sobre la base del conocimiento que los profesores universitarios exhiben y está sustentado en la epistemología del trabajo profesional que realizan.

La estrategia de M1 se asemeja a la heurística prevista 2, en la cual utiliza la pieza como una herramienta semiótica y se basa en la validación de aquellos casos que permiten la solución al problema. M1 muestra una actividad propia del trabajo de los matemáticos orientada a identificar en qué casos el problema puede ser resuelto para luego generalizar. En la entrevista señala: *"Cuando tengo casos en mano que sí puedo resolver, y me gustaría entonces crear un teorema general, en donde incluyo los casos ya resueltos"*. Así, M1 recurre a una estrategia de validación con el uso de signos, pero sin palabras (figura 9).

La estrategia de M2 es similar a la heurística prevista 4, pues muestra un cambio de dominio, de la geometría a la combinatoria, centrado en las combinaciones de los bloques para llenar el embaldosado. Su trabajo se relaciona con el razonamiento inductivo, mediante el estudio de casos particulares. En la entrevista declara: *"Es una práctica común estudiar casos pequeños inicialmente para poder conjeturar y luego generalizar y probar respectivamente"*. De esta manera, M2 destaca la importancia de un proceso matemático inductivo como parte de la actividad matemática (figura 11).

La producción de M3 muestra una estrategia no esperada según las heurísticas previstas, dada por una aproximación al estudio de grafos en la representación de la situación, que luego es utilizada con la intención de generalizar. M3 afirma en la entrevista que: *"Es parte de mi manera de trabajar, buscar propiedades de los objetos y estructuras conocidas de matemática, para luego representarlas y modelarlas. Una vez que las estructuras elegidas cumplen con los casos conocidos, las utilizo para generalizar"*. Además, M3 señala que la solución presentada corresponde al modelo que permite encontrar las soluciones del problema: *"Verifiqué que el modelo cumplía con las condiciones del problema"*. En este caso, M3 resalta la representación y generalización en su actividad, aspectos asociados a los procesos de modelización.

Los análisis anteriores dan cuenta del trabajo desarrollado por M1, M2 y M3, permitiéndonos de esta manera caracterizar su trabajo el cual se sintetiza en las figuras 10, 12 y 14.

6. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

A continuación, discutimos y concluimos sobre los aportes a la educación matemática, en relación con algunos aspectos que se desprenden de los análisis presentados: los alcances teóricos, las características de la tarea y las posibilidades didácticas que el presente trabajo ofrece. Finalmente, presentamos aportes del estudio y sus limitaciones.

6.1 Alcances teóricos

Los análisis presentados profundizan en el trabajo que tiene lugar en el mundo de las matemáticas, lo cual nos ha permitido caracterizar e interpretar tanto las heurísticas previstas, como las de los profesores universitarios que abordan una tarea con un contexto cercano a la realidad. El uso coordinado de dos perspectivas teóricas nos ha permitido explorar en las particularidades del trabajo en el mundo de las matemáticas y contribuir a la comprensión del pensamiento matemático puesto en juego. En efecto, se manifiestan aspectos tales como: 1) diversos usos de artefactos simbólicos como herramientas semióticas (Kuzniak *et al.*, 2016b) asociadas al registro de las figuras; 2) emergen distintos objetos matemáticos con definiciones y propiedades; 3) cambios de dominio matemático (Montoya-Delgadillo y Vivier, 2016), lo que ofrece distintas posibilidades en la solución; y 4) variadas maneras de validación, como en el caso de M1 que exhibe un razonamiento de prueba discursivo-gráfica (Richard, 2004), M2 un razonamiento inductivo y M3 que muestra la intención de generalizar sobre la base de un modelo o grafo. De esta manera, se explicita la actividad matemática que tiene lugar en la modelización, lo cual nos posibilita para presentar un modelo teórico de análisis centrado en el trabajo de los individuos. Al respecto, reivindicamos la necesidad de investigación que vincule el estudio de la actividad matemática con modelos teóricos existentes (Flores y Montoya, 2016; Henríquez-Rivas y Montoya-Delgadillo, 2016).

Una futura investigación podría explorar la actividad matemática generada a partir de tareas que promueven un paradigma de trabajo con conocimientos cercanos a la realidad (Houdement y Kuzniak, 2006), y que involucren la manipulación de objetos físicos o como los casos señalados en las heurísticas 1 y 2. Por ejemplo, la caracterización del trabajo matemático de estudiantes de nivel preescolar o Educación Básica, donde el trabajo estará naturalmente más cercano al mundo real y el ETM podría adquirir nuevos significados.

En la presente investigación proponemos el uso coordinado de las perspectivas teóricas involucradas en los análisis del trabajo matemático desarrollado alrededor de una tarea dada. De aquí que, consideramos que en futuras investigaciones es posible ahondar en la articulación entre teorías, en la línea de *Networking of Theories* (Bikner-Ahsbahs y Prediger, 2014) y realizar aportaciones al campo disciplinar. Planteamos este estudio como el primer paso en el desarrollo de este marco conceptual.

6.2 Tarea y sus posibilidades didácticas

El análisis de la actividad generada por la tarea nos ofrece sugerencias respecto al tipo de actividades que se pueden implementar en el aula en distintos contextos educativos. De estas destacamos:

La descripción de las heurísticas de solución previstas y experimentales ofrece herramientas al profesor sobre los alcances en cuanto a la demanda cognitiva de la tarea (Henningsen y Stein, 1997), lo que se puede favorecer dependiendo del conocimiento de los estudiantes y de la intención de enseñanza del profesor, al proponer este tipo de tareas.

Actividades propias del pensamiento matemático (Burton, 1984), tales como representar, inducir, conjeturar, generalizar o modelizar, evidenciadas por los profesores universitarios, abren un abanico de posibilidades que el docente puede fomentar cuando los estudiantes exploran este tipo de tareas. En este sentido, aún es necesario profundizar en el estudio de la influencia que tienen los estilos de pensamiento (Borromeo-Ferri, 2010), cuando se aborda una tarea.

Este tipo de tareas, que admiten un amplio espectro de soluciones y posibilidades con otras piezas distintas al T-tetrominó (Golomb, 1994), podrían ser modificadas o ajustadas de acuerdo con el propósito de enseñanza. Por ejemplo, modificar el enunciado a fin de simplificar y amplificar la demanda cognitiva de la tarea, emplear material concreto o analizar la factibilidad de completar el tablero con otro tipo de piezas. De manera que los resultados presentados ofrecen nuevas opciones a los docentes para crear tareas más desafiantes para los estudiantes implicando nuevas formas de trabajo matemático. Asimismo, una tarea que favorece los cambios de dominio de la matemática (en este caso presentamos de la geometría a la combinatoria, y de la geometría a una aproximación a la matemática discreta mediante el estudio de grafos) permite relacionar distintos contenidos matemáticos y procesos cognitivos en su solución.

6.3 Aportes y limitaciones del estudio

A nuestro parecer el logro del objetivo planteado en esta investigación, nos ha permitido aportar con una interpretación del trabajo matemático de profesores universitarios y caracterizar su desarrollo en el mundo de las matemáticas utilizando dos perspectivas teóricas de manera coordinada. Como ya se ha señalado, el modelo teórico de análisis que hemos presentado en este estudio puede ser el punto inicial para estudiar otras estrategias u otras tareas de modelización. Por otra parte, los resultados obtenidos podrían no tener una implicación directa en el aprendizaje de las matemáticas para estudiantes escolares; sin embargo, consideramos que, en la formación de profesores, el alcance en los procesos de solución mostrados, permiten explorar una tarea que puede ser un puente entre aquella matemática que usan los matemáticos y la matemática que puede ser usada por estudiantes al abordar la tarea.

Finalmente, las limitaciones del estudio se relacionan con los análisis provenientes de las heurísticas de solución de tres matemáticos, por lo que en futuras investigaciones sería interesante analizar el trabajo matemático de casos con características similares (otro tipo de matemáticos con diversa experiencia y formación) o diversas (estudiantes de niveles escolares diferentes), sustentadas en el modelo teórico de análisis que en el presente estudio se propone. Por otra parte, existen limitaciones asociadas al diseño de investigación, un estudio de caso colectivo de tipo instrumental, pues los resultados podrían variar con otro tipo de investigadores matemáticos, lo que al mismo tiempo planteamos como una posibilidad de continuar en trabajos futuros, donde la diversidad en el trabajo matemático desarrollado podría enriquecer el análisis y permitiría ahondar en el modelo teórico que empleamos y, además, la metodología que aquí presentamos podría ser replicada.

AGRADECIMIENTOS

C. Henríquez-Rivas agradece el apoyo parcial al proyecto FONDEF ID14I20338.
C. Guerrero-Ortiz agradece el financiamiento al proyecto VRIEA-PUCV "DI Emergente 2019".

REFERENCIAS

Bikner-Ahsbahs, A. y Prediger, S. (2014). *Networking of theories as a research practice in Mathematics Education.* Springer.

Blum, W. (1993). *Mathematical modelling in mathematics education and instruction.* http://oai.bibliothek.uni-kassel.de/bitstream/urn:nbn:de:hebis:34-2009051227366/1/BlumModelling1993.pdf

Borromeo-Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM Mathematics Education, 38(2)*, 86-95.

Borromeo-Ferri, R. (2010). On the influence of mathematical thinking styles on learners' modelling behaviour. *Journal für Mathematikdidaktik, 31(1)*, 99–118.

Burton, L. (1984). Mathematical thinking: The struggle for meaning. *Journal for Research in Mathematics Education, 15*(1), 35–49.

Denzin, N. K. (1978). *The research act: A theoretical introduction to sociological method* (2a ed.). McGraw-Hill.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leur fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *10,* 5–53.

Duval, R. (2016). Las condiciones cognitivas del aprendizaje de la geometría: Desarrollo de la visualización, diferenciaciones de los razonamientos, coordinación de sus funcionamientos. En R. Duval, A. Sáenz-Ludlow (Eds.), *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas* (pp. 13-60). Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Flores, M. y Montoya, E. (2016). Artefacto y espacio de trabajo matemático en la multiplicación de números complejos. *Educación Matemática, 28*(2), 85–117.

Girnat, B. y Eichler, A. (2011). Secondary Teachers' Beliefs on Modelling in Geometry and Stochastics. En G. Kaiser *et al.* (Eds.), *Trends in teaching and learning of Mathematical Modelling: International perspectives on the teaching and learning of Mathematical Modelling* (Vol. 1, pp. 75-84*)*. Springer.

Girnat, B. (2009). The necessity of two different types of applications in elementary geometry. *Proceedings of the 6th CERME Conference*. http://ermeweb.free.fr/.

Golomb, S. (1964). *Polyominoes: Puzzles, patterns, problems and packings*. Princeton University Press.

Gómez-Chacón, I.M., Kuzniak, A. y Vivier, L. (2016). El rol del profesor desde la perspectiva de los Espacios de Trabajo Matemático. *Bolema, 30*(54), 1–22.

Guerrero-Ortiz, C., Mena-Lorca, J. y Morales, A. (2018). Fostering the transit between real world and mathematical world: Some phases on the modelling cycle. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *16*(8), 1605-1628.

Halverscheid, S. (2008). Building a local conceptual framework for epistemic actions in a modelling environment with experiments. *ZDM Mathematics Education, 40*, 225–234.

Henningsen, M. y Stein, M. K. (1997). Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(5), 524–549.

Henríquez-Rivas, C. y Montoya-Delgadillo, E. (2015). Espacios de trabajo geométrico sintético y analítico de profesores y su práctica en el aula. *Enseñanza de las Ciencias, 33*(2), 51–70.

Henríquez-Rivas, C. y Montoya-Delgadillo, E. (2016). El trabajo matemático de profesores en el tránsito de la geometría sintética a la analítica en el liceo. *Bolema*, *30*(54), 45–66.

Houdement, C. y Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 11*, 175–193.

Kaiser, G., Blum, W., Borromeo, F., y Stillman, G. (2011). Trends in teaching and learning of Mathematical Modelling – Preface. In G., Kaiser *et al.* (Eds.), *Trends in teaching and learning of Mathematical Modelling: International perspectives on the teaching and learning of Mathematical Modelling* (Vol. 1, pp. 1-5). Springer.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16*, 9–24.

Kuzniak, A. y Richard, P. (2014). Espaces de travail mathématique : puntos de vista y perspectivas. *Relime*, *17*(4-I), 5–15.

Kuzniak, A., Tanguay, D. y Elia, I. (2016a). Mathematical working spaces in schooling: an introduction. *ZDM Mathematics Education*, *48*, 721–737.

Kuzniak, A., Nechache, A. y Drouhard, J.P. (2016b). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM Mathematics Education, 48*, 861-874.

Lesh, R. y Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. En R. Lesh y H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics teaching, learning, and problem solving* (pp. 3–33). Lawrence Erlbaum Associates Inc.

Margolinas, M. (2013). Task design in Mathematics Education. *Proceedings of ICMI Study 22.* https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00834054v2

Maaß, K. (2010). Classification scheme for modelling tasks. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *31*(2), 285–311.

Montoya-Delgadillo, E. Mena-Lorca, A. y Mena-Lorca, J. (2014). Circulaciones y génesis en el espacio de trabajo matemático. *Relime*, *17*(4-I), 181–197.

Montoya-Delgadillo, E. y Vivier, L. (2016). Mathematical working space and paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis. *ZDM Mathematics Education*, *48*, 739–754.

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos. (2013). *PISA 2012 Assessment and analytical framework: Mathematics, reading, science, problem solving and financial literacy*. OECD Publishing.

Piaget, J. y Hinhelder, B. (2007). *Psicología del niño* (17a Ed.). Ediciones Morata.

Prediger, S., Bikner-Ahsbahs, A. y Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: First steps towards a conceptual framework. *ZDM Mathematics Education, 40*(1), 165–178.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies : Une approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin.

Richard, P. (2004). *Raisonnement et stratégies de preuve dans l'enseignement des mathématiques.* Peter Lang.

Stake, R. (2007). *Investigación con estudio de casos* (4º Ed.). Ediciones Morata.

Stein, M., Grover, B. y Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal*, *33*(2), 455–488.

Watson, A. y Mason, J. (2007). Taken-as-shared: A review of common assumptions about mathematical tasks in teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*(4-6), 205–215.

Watson, A. y Ohtani, M. (2015). *Task design in Mathematics Education: An ICMI study 22.* Springer.

Carolina Henríquez Rivas

Dirección: Facultad de Ciencias Básicas. Universidad Católica del Maule.
Campus San Miguel, Avenida San Miguel 3605, Talca, Chile.
chenriquezr@ucm.cl

Télefono: + 56 71 2986330