

Un nuevo acercamiento sobre la maximización de carteras de inversión para una mayor rentabilidad en las contribuciones

New approach on maximization of investment portfolios for a better rentability in the contributions

Osu Bright¹

Carlos Granados Ortiz²

DOI: <https://doi.org/10.18041/1909-2458/ingeniare.30.7926>

RESUMEN

En este trabajo se muestra cómo se pueden maximizar las carteras de inversión de un plan de pensiones, teniendo en cuenta una cláusula de devolución de contribuciones, cláusula que permitió la devolución de las contribuciones acumuladas junto con un interés predeterminado de un activo libre de riesgo, para aquellas familias en las que alguno de sus familiares haya fallecido. También se consideraron aquí las inversiones en efectivo, capital social y préstamos para aumentar los fondos totales acumulados del plan de pensiones que quedan por distribuir entre los miembros sobrevivientes, de modo que los modelos de precios de valores negociables y préstamos sigan movimientos geométricos brownianos. El enfoque de la teoría de juegos, la técnica de separación de variables y la utilidad de varianza media se utilizaron para obtener soluciones de forma cerrada de los planes de control óptimos para los activos y la frontera eficiente. Además, se analizó numéricamente la insurgencia de algunos parámetros sobre los planes óptimos de control con el tiempo, así como también se ofrece una comparación teórica del resultado de la presente investigación con un resultado existente.

Palabras clave: Régimen de pensiones, plan de control óptimo, devolución de cotizaciones, teoría de juegos, tasa de interés.

ABSTRACT

In this work, it showed how investment portfolios of a pension scheme are often maximized within the presence of return clause of contributions is presented. This clause permitted return of accumulated contributions alongside predetermined interest from harmless asset to members' families whenever death occurs to their relations. Also considered herein are investments in cash, marketable security and loan to extend the entire accumulated funds of the pension scheme left to be distributed among the surviving members such the worth models of marketable security and loan followed geometric Brownian motions. the sport theoretic approach, separation of variable technique and mean variance utility were wont to obtain closed form solutions of the optimal control plans for the assets and therefore the efficient frontier. Next, the consequence of some parameters on the optimal control plans with time is numerically analysed. Furthermore, a theoretical comparison of our result with an existing result was given.

Keywords: Pension scheme, optimal control plan, return of contributions, game theoretic, interest rate.



Cómo citar este artículo: O. Bright y C. Granados. "Un nuevo acercamiento sobre la maximización de carteras de inversión para una mayor rentabilidad en las contribuciones", *Ingeniare*, vol. 17, no. 30, pp. 67-87, junio 2021.

1. PhD. Matemáticas, docente de matemáticas, Universidad de Agricultura Michael Okpara, Nigeria Orcid: <https://orcid.org/0000-0003-2463-430X>. Contacto: osu.bright@mouau.edu.ng.

2. Magíster en Matemáticas, Docente de Matemáticas, Universidad del Atlántico. Contacto: carlosgranadosortiz@outlook.es

1. INTRODUCCIÓN

El plan de pensiones se estableció para atender y administrar los ingresos de vejez de todos los jubilados. Hay dos tipos de planes de pensiones que incluyen el plan de Beneficios Definidos (DB) y el plan de Contribuciones Definidas (DC). En un plan DC los miembros remiten un porcentaje de sus ingresos, según lo ordena la ley, a su cuenta de ahorros para el retiro (RSA) y estos fondos son administrados por las administradoras de fondos de pensiones (PFA) con el objetivo de maximizar los retornos esperados de los miembros. En inversión, las AFP necesitan saber cómo se realizan las inversiones en diferentes activos, ya que la mayoría de los activos en el mercado son altamente volátiles debido a su naturaleza aleatoria. Estos activos incluyen efectivo, bonos, acciones, préstamos, etc., incertidumbre en el mercado que, provocada por los comportamientos aleatorios de estos activos, ha llevado al estudio del plan de control óptimo que brinda una guía sobre cómo los expertos/instituciones financieras pueden combinar diferentes activos a la vez para lograr un resultado óptimo con un riesgo mínimo.

Teniendo en cuenta lo anterior, varios autores han estudiado un plan de inversión óptimo en diversas condiciones, algunos de los cuales incluyen [1]-[3], quienes estudiaron problemas de inversión óptima bajo un modelo de elasticidad de varianza constante, utilizando el método legendario o de transformación de potencia para resolver los problemas de optimización; [4]-[6], estudiaron los problemas óptimos de inversión con tipos de interés afines.

Desde el punto de vista de la función objetivo existen diferentes tipos de funciones de utilidad que se utilizan para resolver problemas de optimización. Incluyen funciones de utilidad que exhiben constante aversión relativa al riesgo (CRRA); ejemplo [5]-[7], la función de utilidad que utiliza las funciones de utilidad logarítmica y de potencia exhiben constante aversión absoluta al riesgo (CARA); ejemplo de utilidad exponencial fueron utilizados por [8].

La utilidad de varianza media fue desarrollada por primera vez por Markowitz para investigar problemas de selección de cartera óptima [9], pero el problema es que el plan de inversión óptimo bajo la utilidad de varianza media no es consistente en el tiempo, ya que la función de utilidad de varianza media no tiene la condición de expectativa, por lo que la condición de optimalidad de Bellman no se cumple. Sin embargo, en muchas situaciones la coherencia temporal de las estrategias es un requisito básico para los tomadores de decisiones racionales.

En [10] se estudió la teoría general de los problemas de control estocásticos inconsistentes en el tiempo de Markov. El estudio del plan de inversión óptimo con devolución de contribuciones ha tomado un lugar central, ya que los miembros posiblemente pueden morir durante la fase de acumulación; [13] estudió el mismo problema anterior, tanto para la fase de acumulación como para la de distribución con el precio del activo de riesgo modelado por Modelo de Volatilidad de Heston.

La gestión estratégica óptima de la cartera para un plan de pensiones de CD con cláusula de devolución fue estudiada por [14], en este trabajo; consideraron la inversión en un activo libre de riesgo y dos activos riesgosos, lo que era una extensión del trabajo de [12]. En [15] se investigó las estrategias de inversión con cláusula de rentabilidad bajo riesgo de inflación y riesgo de volatilidad; consideraron la inversión en un activo libre de riesgo, el bono de índice de inflación y las acciones cuyo precio fue modelado por la volatilidad de Heston.

En [21] se estudió de la estrategia de inversión de equilibrio para el plan de pensiones de CD con cláusulas de riesgo de incumplimiento y devolución de primas bajo el modelo (CEV); consideraron inversiones en tesorería, acciones y bonos. En toda la literatura anterior, los autores asumieron que las acumulaciones devueltas no tienen ningún tipo de interés. Recientemente, algunos autores han estudiado los estudios de devolución de contribuciones con interés predeterminado; en su trabajo, asumieron que no solo se devolverá la prima acumulada a los familiares, sino con intereses de inversión en activos libres de riesgo predeterminados al inicio de la inversión. Incluyen [16], donde investigó un plan de control óptimo en un plan de CD con un activo libre de riesgo y otro con riesgo cuando las contribuciones de retorno tenían un interés predeterminado y [17] estudió la estrategia óptima de asignación de activos para un sistema de pensiones de CD con devolución de contribuciones con intereses predeterminados bajo el modelo de volatilidad de Heston.

Dado que el proceso de precio del activo libre de riesgo es determinista y la tasa de interés está predeterminada, es posible determinar el interés pagado a la familia de cada miembro fallecido en cada momento durante la fase de acumulación. Esta forma la base de este papel, donde vamos a complementar lo estudiado e Investigado por [11], el cual mostraron algunas maximizaciones de cartera el cual mostraron cómo administrar una cartera que consta de tres activos cuya cláusula de devolución es con un interés predeterminado y el proceso de precio de los dos activos de riesgo modelados por el movimiento browniano geométrico.

2. PROBLEMA DEL CONTROL ÓPTIMO Y ANÁLISIS TEÓRICO

En esta sección se mostrará el problema de control óptimo, el problema de optimización y utilidad de varianza media. Así como también se muestra un análisis teórico y un modelo de simulación teniendo en cuenta los resultados obtenidos.

Iniciaremos abordando el problema de control óptimo, suponga que el mercado está compuesto por efectivo, acciones y préstamos y un espacio de probabilidad completo denotado como \mathbb{P} donde \mathbb{P} es un espacio de probabilidad real, una medida de probabilidad que satisface la condición $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ Ω \mathbb{P} $0 \leq t \leq T$. son movimientos brownianos estándar y es la filtración la que representa la información disponible proporcionada por los movimientos brownianos. Suponga que el mercado está completo, sin fricciones y abierto continuamente durante un tiempo fijo. $\{\mathcal{B}_s(t), \mathcal{B}_l(t), \mathcal{B}_m(t) : t \geq 0\}$, $0 \leq t \leq T$, donde T es la edad de jubilación.

Denotemos el precio del efectivo y el proceso de precios es impulsado por $\mathcal{C}(t)$

$$d\mathcal{C}(t) = \varkappa\mathcal{C}(t)dt, \quad (1)$$

$\mathcal{S}(t)$ y $\mathcal{L}(t)$ denotan los precios de las acciones y préstamos que son modelados por el GBM de la siguiente manera.

$$d\mathcal{S}(t) = \mathcal{S}(t) [(\varkappa + \varkappa_1)dt + \mathfrak{h}_1 d\mathcal{B}_s(t)] \quad (2)$$

$$d\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}(t)[(\varkappa + \varkappa_2)dt + \mathfrak{h}_2 d\mathcal{B}_l(t) + \mathfrak{h}_3 d\mathcal{B}_m(t)] \quad (3)$$

Donde $\varkappa, \varkappa_1, \varkappa_2, \mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_3$ son constantes e \varkappa es la tasa de interés del efectivo que está predeterminada, es la tasa instantánea esperada de rendimiento del capital y $(\varkappa + \varkappa_2)$ es la tasa instantánea esperada de rendimiento del préstamo, $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_3$ y son la volatilidad instantánea del capital y del préstamo y los movimientos brownianos $\mathcal{B}_s(t), \mathcal{B}_l(t), \mathcal{B}_m(t)$ tales que:

$$\begin{aligned} d\mathcal{B}_s(t)d\mathcal{B}_l(t) &= d\mathcal{B}_s(t)d\mathcal{B}_m(t) = d\mathcal{B}_l(t)d\mathcal{B}_m(t) = 0, \quad d\mathcal{B}_s(t)d\mathcal{B}_s(t) = d\mathcal{B}_l(t)d\mathcal{B}_l(t) \\ &= d\mathcal{B}_m(t)d\mathcal{B}_m(t) = dt \end{aligned} \quad (4)$$

Ahora, sea $\mathcal{R}(t)$ la riqueza acumulada del fondo de pensiones en el momento t y considerando el intervalo de tiempo $t, t + \frac{1}{h}$, la forma diferencial asociada $d\mathcal{R}(t)$ con el tamaño del fondo se da de la siguiente manera:

$$\mathcal{R}\left(t + \frac{1}{h}\right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{h}\mathfrak{M}_{\vartheta_0+t}} \left(\begin{aligned} &\frac{1}{h}m - tmk\frac{1}{h}\mathfrak{M}_{\vartheta_0+t} - \mu_1 kR(t) \frac{\mathcal{C}\left(t + \frac{1}{h}\right)}{\mathcal{C}(t)} \frac{1}{h}\mathfrak{M}_{\vartheta_0+t} \\ &+ R(t) \left(\mu_1 \frac{\mathcal{C}\left(t + \frac{1}{h}\right)}{\mathcal{C}(t)} + \mu_2 \frac{\mathcal{S}\left(t + \frac{1}{h}\right)}{\mathcal{S}(t)} + \mu_3 \frac{\mathcal{L}\left(t + \frac{1}{h}\right)}{\mathcal{L}(t)} \right) \end{aligned} \right) \quad (5)$$

$$\mathcal{R}\left(t + \frac{1}{h}\right) = \left(\frac{\frac{1}{h}\mathfrak{M}_{\vartheta_0+t}}{1 - \frac{1}{h}\mathfrak{M}_{\vartheta_0+t}} + 1 \right) \left(\begin{aligned} &\left(m\frac{1}{h} - tmk\frac{1}{h}\mathfrak{M}_{\vartheta_0+t} - (1 - \mu_2 - \mu_3)kR(t)\frac{1}{h}\mathfrak{M}_{\vartheta_0+t} \right. \\ &\left. + R(t) \left(1 + (1 - \mu_2 - \mu_3) \left(\frac{\mathcal{C}\left(t + \frac{1}{h}\right) - \mathcal{C}(t)}{\mathcal{C}(t)} \right) \left(1 - k\frac{1}{h}\mathfrak{M}_{\vartheta_0+t} \right) \right) \right. \\ &\left. + \mu_2 \left(\frac{\mathcal{S}\left(t + \frac{1}{h}\right) - \mathcal{S}(t)}{\mathcal{S}(t)} \right) + \mu_3 \left(\frac{\mathcal{L}\left(t + \frac{1}{h}\right) - \mathcal{L}(t)}{\mathcal{L}(t)} \right) \right) \quad (6) \end{aligned} \right)$$

Donde μ_1, μ_2 y μ_3 son los planes de control óptimos efectivo, capital y préstamo respectivamente tales que $\mu_1 = 1 - \mu_2 - \mu_3$, y m son las contribuciones de los afiliados recibidas por el fondo de pensiones en un momento dado, ϑ_0 la edad inicial de la fase de acumulación, T el marco de tiempo del período de

acumulación tal que $\vartheta_0 + T$ es la edad final. Supongamos que $\frac{1}{h} \mathfrak{M}_{\vartheta_0+t}$ es la tasa de mortalidad de vez en cuando de t hasta $t + \frac{1}{h}$, mt son las contribuciones acumuladas en el momento t , $tmk \frac{1}{h} \mathfrak{M}_{\vartheta_0+t}$ son las contribuciones acumuladas devueltas de los miembros fallecidos.

Dado que el proceso de precio del activo libre de riesgo es determinista y la tasa de interés está predefinida como se ve en (1), es posible determinar el interés pagado a cada miembro de las familias que han tenido un familiar muerto en determinado momento durante la fase de acumulación mediante $\mu_1 k \mathcal{R}(t) \frac{c(t + \frac{1}{h})}{c(t)} \frac{1}{h} \mathfrak{M}_{\vartheta_0+t}$, en caso tal $k = 0$, no hay devolución de contribuciones y en caso tal $k = 1$, hay devolución de contribuciones.

A continuación de [9], tenemos la probabilidad de muerte condicional ${}_t b_y = 1 - {}_t a_y = 1 - e^{-\int_0^t \pi(\vartheta_0+t+s) ds}$, donde $\pi(t)$ es la función de fuerza de la mortalidad en el momento t , y para $\frac{1}{h} \rightarrow 0$,

$$\frac{1}{h} \mathfrak{M}_{\vartheta_0+t} = 1 - \exp\{-\int_0^{\frac{1}{h}} \pi(\vartheta_0 + t + s) ds\} \approx \pi(\vartheta_0 + t) \frac{1}{h} + O(\frac{1}{h}) \tag{7}$$

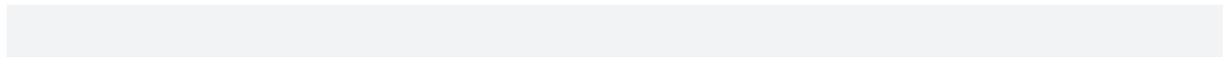
$$\frac{\frac{1}{h} \mathfrak{M}_{\vartheta_0+t}}{1 - \frac{1}{h} \mathfrak{M}_{\vartheta_0+t}} = \frac{1 - \exp\{-\int_0^{\frac{1}{h}} \pi(\vartheta_0+t+s) ds\}}{\exp\{-\int_0^{\frac{1}{h}} \pi(\vartheta_0+t+s) ds\}} = \exp\{\int_0^{\frac{1}{h}} \pi(\vartheta_0 + t + s) ds\} - 1 \approx \pi(\vartheta_0 + t) \frac{1}{h} + O(\frac{1}{h}) \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \rightarrow 0, \frac{\frac{1}{h} \mathfrak{M}_{\vartheta_0+t}}{1 - \frac{1}{h} \mathfrak{M}_{\vartheta_0+t}} &= \pi(\vartheta_0 + t) dt \frac{1}{h} \mathfrak{M}_{\vartheta_0+t} = \pi(\vartheta_0 + t) dt m \frac{1}{h} \rightarrow m dt \frac{c(t + \frac{1}{h}) - c(t)}{c(t)} \\ &\rightarrow \frac{dc(t)}{c(t)} \left(\frac{s(t + \frac{1}{h}) - s(t)}{s(t)} \right) \rightarrow \frac{ds(t)}{s(t)}, \left(\frac{\mathcal{L}(t + \frac{1}{h}) - \mathcal{L}(t)}{\mathcal{L}(t)} \right) \rightarrow \frac{d\mathcal{L}(t)}{\mathcal{L}(t)} \end{aligned} \tag{9}$$

Sustituyendo (9) en (5), tenemos:

$$\mathcal{R} \left(t + \frac{1}{h} \right) = (1 + \pi(\vartheta_0 + t) dt) \left(m dt - tmk \pi(\vartheta_0 + t) dt - (1 - \mu_2 - \mu_3) k R(t) \pi(\vartheta_0 + t) dt \right) + R(t) \left(\begin{aligned} &1 + (1 - \mu_2 - \mu_3) \frac{dc(t)}{c(t)} (1 - k \pi(\vartheta_0 + t) dt) \\ &+ \mu_2 \frac{ds(t)}{s(t)} + \mu_3 \frac{d\mathcal{L}(t)}{\mathcal{L}(t)} \end{aligned} \right) \tag{10}$$

Sustituyendo (1), (2), (3) y (9) en (10), tenemos:



$$d\mathcal{R}(t) = \left(\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} R(t) \left(\mu_2 \left((\kappa_1 - \vartheta) + \frac{k}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \mu_3 \left((\kappa_2 - \vartheta) + \frac{k}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right) + \vartheta \right) \right) \\ \left((1-k) \frac{1}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right) \\ \left. + m \left(\frac{\vartheta - \vartheta_0 - (1+k)t}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right) \right) dt + \\ R(t) \left(\begin{array}{l} \mu_3 (\eta_2 dB_1(t) + \eta_3 dB_m(t)) \\ + \mu_2 \eta_1 dB_5(t) \end{array} \right) \end{array} \right) \mathcal{R}(0) = r_0 \quad (11)$$

Donde ϑ es la edad máxima de vida y $\pi(t)$ es la función de fuerza dada por:

$$\pi(t) = \frac{1}{\vartheta - t}, \quad 0 \leq t < \vartheta \quad (12)$$

Por otro lado, se mostrará la utilidad de varianza media y el problema de optimización, y algunos lemas y proposiciones derivados de estos mismos. Considere un administrador de fondos de pensiones cuyo interés es maximizar sus ganancias mientras penaliza el riesgo utilizando la varianza media función de utilidad dada por

$$\mathcal{F}(t, r) = \sup_{\mu} \{E_{t,r} \mathcal{R}^{\mu}(T) - Var_{t,r} \mathcal{R}^{\mu}(T)\} \quad (13)$$

Aplicando el método de la teoría de juegos descrito en [4], el problema de control de la varianza media en (13) es similar al siguiente problema de control óptimo estocástico inconsistente en el tiempo de Markov con función de valor $\mathcal{F}(t, r)$.

$$\begin{cases} G(t, r, \mu) = E_{t,r} [U^{\mu}(T)] - \frac{\gamma}{2} Var_{t,r} [U^{\mu}(T)] \\ \mathcal{G}(t, r, \mu) = E_{t,r} [U^{\mu}(T)] - \frac{\gamma}{2} (E_{t,r} [U^{\mu}(T)^2] - (E_{t,r} [U^{\mu}(T)])^2) \\ F(t, r) = \sup_{\mu} \mathcal{G}(t, r, \mu) \end{cases} \quad (14)$$

De [4], el plan de control óptimo satisface μ^* :

$$\mathcal{F}(t, r) = \sup_{\mu} \mathcal{G}(t, r, \mu^*) \quad (15)$$

γ es una constante que representa el coeficiente de aversión al riesgo de los miembros.

Ahora, sea $p^{\mu}(t, r) = E_{t,r} [U^{\mu}(T)]$ y $q^{\mu}(t, r) = E_{t,r} [U^{\mu}(T)^2]$, entonces:

$$\mathcal{F}(t, r) = \sup_{\mu} u(t, r, p^{\mu}(t, r), q^{\mu}(t, r)) \tag{16}$$

Donde,

$$u(t, r, p, q) = p - \frac{\gamma}{2}(q - p^2) \tag{17}$$

Teorema (teorema de verificación): Si existen tres funciones reales que satisfacen las siguientes ecuaciones extendidas de la ecuación de Hamilton Jacobi Bellman:

$$\sup_{\mu} \left\{ \mathcal{U}_t - u_t + r \left[\begin{aligned} &\mu_2 \left((\varkappa_1 - \varkappa) + \frac{k}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right) \\ &+ \mu_3 \left((\varkappa_2 - \varkappa) + \frac{k}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right) + \varkappa \\ &(1-k) \frac{1}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \end{aligned} \right] + m \left(\frac{\vartheta - \vartheta_0 - (1+k)t}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right) (\mathcal{U}_r - u_r) \right\} = 0, \tag{18}$$

$$U(T, r) = u(t, r, r, r^2)$$

Donde:

$$\mathcal{A}_{r,r} = u_{r,r} + 2u_{r,p}p_r + 2u_{r,q}q_r + u_{pp}p_r^2 + 2u_{pq}p_rq_r + u_{qq}q_r^2 = \gamma \mathcal{V}_r^2 \tag{19}$$

$$\left\{ \mathcal{V}_t + r \left[\begin{aligned} &\mu_2 \left((\varkappa_1 - \varkappa) + \frac{k}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right) \\ &+ \mu_3 \left((\varkappa_2 - \varkappa) + \frac{k}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right) + \varkappa \\ &(1-k) \frac{1}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \end{aligned} \right] + m \left(\frac{\vartheta - \vartheta_0 - (1+k)t}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right) \mathcal{V}_r \right\} = 0, \tag{20}$$

$$V(T, r) = r$$

$$\left\{ \mathcal{W}_t + r \left[\begin{aligned} &\mu_2 \left((\varkappa_1 - \varkappa) + \frac{k}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right) \\ &+ \mu_3 \left((\varkappa_2 - \varkappa) + \frac{k}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right) + \varkappa \\ &(1-k) \frac{1}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \end{aligned} \right] + m \left(\frac{\vartheta - \vartheta_0 - (1+k)t}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right) \mathcal{W}_r \right\} = 0 \tag{21}$$

$$W(T, r) = r^2$$

Luego $F(T, r) = U(T, r)$, $p^{\mu^*} = V(T, r)$, $q^{\mu^*} = W(T, r)$ para el plan de control óptimo μ^* .

Demostración: los detalles de la prueba se pueden encontrar en [8], [12] y [19].

A continuación, resolvemos (18), (20) y (21) para la función de valor cuando $F(T, r) = U(T, r)$, y encontraremos el plan de control óptimo. Recordar que: $u(t, r, p, q) = p - \frac{\gamma}{2}(q - p^2)$. De esta manera tenemos que:

$$u_t = u_r = u_{rr} \quad u_{rp} = u_{rq} = u_{pq} = u_{qq} = 0, u_p = 1 + \gamma p, u_{pp} = \gamma u_q = -\frac{\gamma}{2} \quad (22)$$

Sustituyendo (22) en (18) y diferenciando con respecto a μ_2 y μ_3 y resolviendo μ_2 para μ_3 , tenemos

$$\mu_2^* = -\frac{\left((\kappa_1 - \varkappa) + \frac{k}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right) u_r}{(u_{rr} - \mathcal{A}_{rr}) r \mathfrak{h}_1^2} \quad (23)$$

$$\mu_3^* = -\frac{\left((\kappa_2 - \varkappa) + \frac{k}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right) u_r}{(u_{rr} - \mathcal{A}_{rr}) r (\mathfrak{h}_2^2 + \mathfrak{h}_3^2)} \quad (24)$$

Sustituyendo (19), (23) y (24) en (18), tenemos

$$u_t + u_r \left[\begin{array}{l} \left(\varkappa + \frac{1-k}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right) r \\ + m \left(\frac{\vartheta - \vartheta_0 - (1+k)t}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right) \end{array} \right] - \frac{u_r^2}{2(u_{rr} - \gamma \mathcal{V}_r^2)} \left(\frac{\left((\kappa_1 - \varkappa) + \frac{k}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right)^2}{\mathfrak{h}_1^2} + \frac{\left((\kappa_2 - \varkappa) + \frac{k}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right)^2}{\mathfrak{h}_2^2 + \mathfrak{h}_3^2} \right) = 0 \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{V}_t + \mathcal{V}_r \left[\begin{array}{l} \left(\varkappa + \frac{1-k}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right) r \\ + m \left(\frac{\vartheta - \vartheta_0 - (1+k)t}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right) \end{array} \right] - \frac{u_r \mathcal{V}_r}{2(u_{rr} - \gamma \mathcal{V}_r^2)} \left(\frac{\left((\kappa_1 - \varkappa) + \frac{k}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right)^2}{\mathfrak{h}_1^2} + \frac{\left((\kappa_2 - \varkappa) + \frac{k}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right)^2}{\mathfrak{h}_2^2 + \mathfrak{h}_3^2} \right) \\ & + \frac{\mathcal{V}_{rr}}{2} \left[\frac{u_r^2}{(u_{rr} - \gamma \mathcal{V}_r^2)} \left(\frac{\left((\kappa_1 - \varkappa) + \frac{k}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right)^2}{\mathfrak{h}_1^2} + \frac{\left((\kappa_2 - \varkappa) + \frac{k}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right)^2}{\mathfrak{h}_2^2 + \mathfrak{h}_3^2} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

A continuación, conjeturamos una solución para $U(t, r)$ y $V(t, r)$ de la siguiente manera

$$\begin{cases} U(t, r) = rH(t) + I(t) & H(T) = 1, & I(T) = 0 \\ V(t, r) = rJ(t) + K(t) & J(T) = 1, & K(T) = 0 \\ \mathcal{U}_t = r\mathcal{H}_t + \mathcal{J}_t, \mathcal{U}_r = H(t), \mathcal{U}_{rr} = 0, \mathcal{V}_t = r\mathcal{J}_t + \mathcal{K}_t, \mathcal{V}_r = J(t), \mathcal{V}_{rr} = 0 \end{cases} \quad (27)$$

Sustituyendo (27) en (25) y (26), tenemos:

$$\begin{cases} \mathcal{H}_t(t) + \left(\varkappa + \frac{1-k}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right) H(t) = 0 \\ J_t(t) + H(t)m \left(\frac{\vartheta - \vartheta_0 - (1+k)t}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right) + \frac{\mathcal{H}^2(t)}{2\gamma J^2(t)} \left(\frac{\left((\varkappa_1 - \varkappa) + \frac{k}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right)^2}{\mathfrak{h}_1^2} + \frac{\left((\varkappa_2 - \varkappa) + \frac{k}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right)^2}{\mathfrak{h}_2^2 + \mathfrak{h}_3^2} \right) = 0 \end{cases} \quad (28)$$

$$\begin{cases} J_t(t) + \left(\varkappa + \frac{1-k}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right) J(t) = 0 \\ \mathcal{K}_t(t) + J(t)m \left(\frac{\vartheta - \vartheta_0 - (1+k)t}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right) + \frac{\mathcal{H}(t)}{\gamma J(t)} \left(\frac{\left((\varkappa_1 - \varkappa) + \frac{k}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right)^2}{\mathfrak{h}_1^2} + \frac{\left((\varkappa_2 - \varkappa) + \frac{k}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right)^2}{\mathfrak{h}_2^2 + \mathfrak{h}_3^2} \right) = 0 \end{cases} \quad (29)$$

Resolviendo (28) y (29), tenemos:

$$\mathcal{H}(t) = \left(\frac{\vartheta - \vartheta_0 - T}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right)^{k-1} e^{\varkappa(T-t)} \quad (30)$$

$$J(t) = \left(\frac{\vartheta - \vartheta_0 - T}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right)^{k-1} e^{\varkappa(T-t)} \quad (31)$$

$$J(t) = m(\vartheta - \vartheta_0 - T)^{k-1} e^{\varkappa T} \int_t^T e^{\varkappa \tau} \left(\frac{\vartheta - \vartheta_0 - (1+k)\tau}{(\vartheta - \vartheta_0 - \tau)^k} \right) d\tau + \frac{1}{2\gamma} \left[\frac{\left(\frac{(\varkappa_1 - \varkappa)^2}{\mathfrak{h}_1^2} + \frac{(\varkappa_2 - \varkappa)^2}{\mathfrak{h}_2^2 + \mathfrak{h}_3^2} \right) (T-t) + \left(\frac{\varkappa_1 - \varkappa}{\mathfrak{h}_1^2} + \frac{\varkappa_2 - \varkappa}{\mathfrak{h}_2^2 + \mathfrak{h}_3^2} \right) \ln \left(\frac{\vartheta - \vartheta_0 - t}{\vartheta - \vartheta_0 - T} \right)^2 + \left(\frac{1}{\mathfrak{h}_1^2} + \frac{1}{\mathfrak{h}_2^2 + \mathfrak{h}_3^2} \right) \left(\frac{T-t}{(\vartheta - \vartheta_0 - t)(\vartheta - \vartheta_0 - T)} \right)} \right] \quad (32)$$

$$\mathcal{K}(t) = m(\vartheta - \vartheta_0 - T)^{k-1} e^{\varkappa T} \int_t^T e^{\varkappa \tau} \left(\frac{\vartheta - \vartheta_0 - (1+k)\tau}{(\vartheta - \vartheta_0 - \tau)^k} \right) d\tau + \frac{1}{\gamma} \left[\frac{\left(\frac{(\varkappa_1 - \varkappa)^2}{\mathfrak{h}_1^2} + \frac{(\varkappa_2 - \varkappa)^2}{\mathfrak{h}_2^2 + \mathfrak{h}_3^2} \right) (T-t) + \left(\frac{\varkappa_1 - \varkappa}{\mathfrak{h}_1^2} + \frac{\varkappa_2 - \varkappa}{\mathfrak{h}_2^2 + \mathfrak{h}_3^2} \right) \ln \left(\frac{\vartheta - \vartheta_0 - t}{\vartheta - \vartheta_0 - T} \right)^2 + \left(\frac{1}{\mathfrak{h}_1^2} + \frac{1}{\mathfrak{h}_2^2 + \mathfrak{h}_3^2} \right) \left(\frac{T-t}{(\vartheta - \vartheta_0 - t)(\vartheta - \vartheta_0 - T)} \right)} \right] \quad (33)$$

$$u(t, r) = \left(\begin{array}{l} \left[\left(\frac{(\kappa_1 - \varkappa)^2}{\mathfrak{h}_1^2} + \frac{(\kappa_2 - \varkappa)^2}{\mathfrak{h}_2^2 + \mathfrak{h}_3^2} \right) (T - t) + \right. \\ \left. \frac{1}{2\gamma} \left(\frac{\kappa_1 - \varkappa}{\mathfrak{h}_1^2} + \frac{\kappa_2 - \varkappa}{\mathfrak{h}_2^2 + \mathfrak{h}_3^2} \right) \ln \left(\frac{\vartheta - \vartheta_0 - t}{\vartheta - \vartheta_0 - T} \right)^2 + \right. \\ \left. \left[\left(\frac{1}{\mathfrak{h}_1^2} + \frac{1}{\mathfrak{h}_2^2 + \mathfrak{h}_3^2} \right) \left(\frac{T - t}{(\vartheta - \vartheta_0 - t)(\vartheta - \vartheta_0 - T)} \right) \right] \right) \\ \left. + r \left(\frac{\vartheta - \vartheta_0 - T}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right)^{k-1} e^{\varkappa(T-t)} + m(\vartheta - \vartheta_0 - T)^{k-1} e^{\varkappa T} \int_t^T e^{\varkappa \tau} \left(\frac{\vartheta - \vartheta_0 - (1+k)\tau}{(\vartheta - \vartheta_0 - \tau)^k} \right) d\tau \right) \quad (34) \end{array} \right)$$

$$v(t, r) = \left(\begin{array}{l} \left[\left(\frac{(\kappa_1 - \varkappa)^2}{\mathfrak{h}_1^2} + \frac{(\kappa_2 - \varkappa)^2}{\mathfrak{h}_2^2 + \mathfrak{h}_3^2} \right) (T - t) + \right. \\ \left. \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\kappa_1 - \varkappa}{\mathfrak{h}_1^2} + \frac{\kappa_2 - \varkappa}{\mathfrak{h}_2^2 + \mathfrak{h}_3^2} \right) \ln \left(\frac{\vartheta - \vartheta_0 - t}{\vartheta - \vartheta_0 - T} \right)^2 + \right. \\ \left. \left[\left(\frac{1}{\mathfrak{h}_1^2} + \frac{1}{\mathfrak{h}_2^2 + \mathfrak{h}_3^2} \right) \left(\frac{T - t}{(\vartheta - \vartheta_0 - t)(\vartheta - \vartheta_0 - T)} \right) \right] \right) \\ \left. + r \left(\frac{\vartheta - \vartheta_0 - T}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right)^{k-1} e^{\varkappa(T-t)} + m(\vartheta - \vartheta_0 - T)^{k-1} e^{\varkappa T} \int_t^T e^{\varkappa \tau} \left(\frac{\vartheta - \vartheta_0 - (1+k)\tau}{(\vartheta - \vartheta_0 - \tau)^k} \right) d\tau \right) \quad (35) \end{array} \right)$$

De (27), tenemos

$$u_r = \left(\frac{\vartheta - \vartheta_0 - T}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right)^{k-1} e^{\varkappa(T-t)}, u_{rr} = 0, v_r = \left(\frac{\vartheta - \vartheta_0 - T}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right)^{k-1} e^{\varkappa(T-t)}, v_{rr} = 0 \quad (36)$$

Sustituyendo (36) en (23) y (24), tenemos

$$\mu_2^* = \frac{\left((\kappa_1 - \varkappa) + \frac{k}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right) \left(\frac{\vartheta - \vartheta_0 - t}{\vartheta - \vartheta_0 - T} \right)^{k-1} e^{\varkappa(t-T)}}{\gamma r \mathfrak{h}_1^2} \quad (37)$$

$$\mu_3^* = \frac{\left((\kappa_2 - \varkappa) + \frac{k}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right) \left(\frac{\vartheta - \vartheta_0 - t}{\vartheta - \vartheta_0 - T} \right)^{k-1} e^{\varkappa(t-T)}}{\gamma r (\mathfrak{h}_2^2 + \mathfrak{h}_3^2)} \quad (38)$$

$$\mu_1^* = 1 - \frac{\left((\kappa_1 - \varkappa) + \frac{k}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right) \left(\frac{\vartheta - \vartheta_0 - t}{\vartheta - \vartheta_0 - T} \right)^{k-1} e^{\varkappa(t-T)}}{\gamma r \mathfrak{h}_1^2} - \frac{\left((\kappa_2 - \varkappa) + \frac{k}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right) \left(\frac{\vartheta - \vartheta_0 - t}{\vartheta - \vartheta_0 - T} \right)^{k-1} e^{\varkappa(t-T)}}{\gamma r (\mathfrak{h}_2^2 + \mathfrak{h}_3^2)} \quad (39)$$

Lema 1: El plan de control óptimo con interés predeterminado con y sin cláusula de devolución de contribución está dado por (39), (38) y (37), es decir:

$$\begin{aligned} \mu_1^* &= 1 - \frac{\left((\kappa_1 - \vartheta) + \frac{k}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right) \left(\frac{\vartheta - \vartheta_0 - t}{\vartheta - \vartheta_0 - T} \right)^{k-1} e^{\vartheta(t-T)}}{\gamma r \mathfrak{h}_1^2} - \frac{\left((\kappa_2 - \vartheta) + \frac{k}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right) \left(\frac{\vartheta - \vartheta_0 - t}{\vartheta - \vartheta_0 - T} \right)^{k-1} e^{\vartheta(t-T)}}{\gamma r (\mathfrak{h}_2^2 + \mathfrak{h}_3^2)} \\ \mu_2^* &= \frac{\left((\kappa_1 - \vartheta) + \frac{k}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right) \left(\frac{\vartheta - \vartheta_0 - t}{\vartheta - \vartheta_0 - T} \right)^{k-1} e^{\vartheta(t-T)}}{\gamma r \mathfrak{h}_1^2} \\ \mu_3^* &= \frac{\left((\kappa_2 - \vartheta) + \frac{k}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right) \left(\frac{\vartheta - \vartheta_0 - t}{\vartheta - \vartheta_0 - T} \right)^{k-1} e^{\vartheta(t-T)}}{\gamma r (\mathfrak{h}_2^2 + \mathfrak{h}_3^2)} \end{aligned}$$

El tamaño de fondo óptimo correspondiente $\mathcal{R}^{\mu^*}(t)$ se obtiene resolviendo el SDE en (11) después de sustituir (37) y (38) en él.

Lema 2: La frontera eficiente del plan de pensiones está dado por

$$E_{t,r}[\mathcal{R}^{\mu^*}(t)] = \left(\sqrt{\left[\left(\frac{(\kappa_1 - \vartheta)^2}{\mathfrak{h}_1^2} + \frac{(\kappa_2 - \vartheta)^2}{\mathfrak{h}_2^2 + \mathfrak{h}_3^2} \right) (T - t) + \left(\frac{\kappa_1 - \vartheta}{\mathfrak{h}_1^2} + \frac{\kappa_2 - \vartheta}{\mathfrak{h}_2^2 + \mathfrak{h}_3^2} \right) \ln \left(\frac{\vartheta - \vartheta_0 - t}{\vartheta - \vartheta_0 - T} \right)^2 + \text{Var}_{t,r}[\mathcal{R}^{\mu^*}(t)] \right]} \right) \quad (40)$$

$$+ r \left(\frac{\vartheta - \vartheta_0 - T}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right)^{k-1} e^{\vartheta(T-t)} + m(\vartheta - \vartheta_0 - T)^{k-1} e^{\vartheta T} \int_t^T e^{\vartheta \tau} \left(\frac{\vartheta - \vartheta_0 - (1+k)\tau}{(\vartheta - \vartheta_0 - \tau)^k} \right) d\tau$$

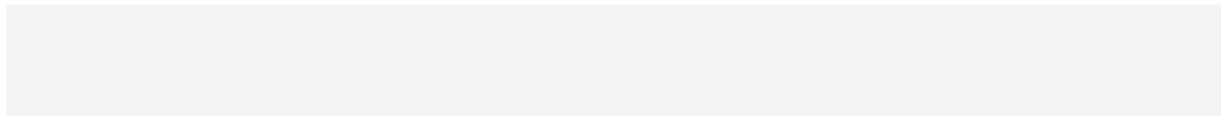
Demostración:

Recordar que:

$$\text{Var}_{t,r}[\mathcal{R}^{\mu^*}(t)] = E_{t,r}[\mathcal{R}^{\mu^*}(t)^2] - (E_{t,r}[\mathcal{R}^{\mu^*}(t)])^2 \quad (41)$$

$$\text{Var}_{t,r}[\mathcal{R}^{\mu^*}(t)] = \frac{2}{\gamma} [\mathcal{V}(t, r) - \mathcal{U}(t, r)] \quad (42)$$

Sustituyendo (34) y (35) en (42), tenemos



$$Var_{t,r}[\mathcal{R}^{\mu^*}(t)] = \frac{1}{\gamma^2} \left[\left(\frac{(\kappa_1 - \varkappa)^2}{\mathfrak{h}_1^2} + \frac{(\kappa_2 - \varkappa)^2}{\mathfrak{h}_2^2 + \mathfrak{h}_3^2} \right) (T - t) + \left(\frac{\kappa_1 - \varkappa}{\mathfrak{h}_1^2} + \frac{\kappa_2 - \varkappa}{\mathfrak{h}_2^2 + \mathfrak{h}_3^2} \right) \ln \left(\frac{\vartheta - \vartheta_0 - t}{\vartheta - \vartheta_0 - T} \right)^2 + \left(\frac{1}{\mathfrak{h}_1^2} + \frac{1}{\mathfrak{h}_2^2 + \mathfrak{h}_3^2} \right) \left(\frac{T - t}{(\vartheta - \vartheta_0 - t)(\vartheta - \vartheta_0 - T)} \right) \right] \quad (43)$$

$$\frac{1}{\gamma} = \sqrt{\frac{Var_{t,r}[\mathcal{R}^{\mu^*}(t)]}{\left[\left(\frac{(\kappa_1 - \varkappa)^2}{\mathfrak{h}_1^2} + \frac{(\kappa_2 - \varkappa)^2}{\mathfrak{h}_2^2 + \mathfrak{h}_3^2} \right) (T - t) + \left(\frac{\kappa_1 - \varkappa}{\mathfrak{h}_1^2} + \frac{\kappa_2 - \varkappa}{\mathfrak{h}_2^2 + \mathfrak{h}_3^2} \right) \ln \left(\frac{\vartheta - \vartheta_0 - t}{\vartheta - \vartheta_0 - T} \right)^2 + \left(\frac{1}{\mathfrak{h}_1^2} + \frac{1}{\mathfrak{h}_2^2 + \mathfrak{h}_3^2} \right) \left(\frac{T - t}{(\vartheta - \vartheta_0 - t)(\vartheta - \vartheta_0 - T)} \right) \right]} \quad (44)$$

$$E_{t,r}[\mathcal{R}^{\mu^*}(t)] = \mathcal{V}(t, r) \quad (45)$$

Sustituyendo (35) en (45), tenemos:

$$E_{t,r}[\mathcal{R}^{\mu^*}(t)] = \left(\frac{1}{\gamma} \left[\left(\frac{(\kappa_1 - \varkappa)^2}{\mathfrak{h}_1^2} + \frac{(\kappa_2 - \varkappa)^2}{\mathfrak{h}_2^2 + \mathfrak{h}_3^2} \right) (T - t) + \left(\frac{\kappa_1 - \varkappa}{\mathfrak{h}_1^2} + \frac{\kappa_2 - \varkappa}{\mathfrak{h}_2^2 + \mathfrak{h}_3^2} \right) \ln \left(\frac{\vartheta - \vartheta_0 - t}{\vartheta - \vartheta_0 - T} \right)^2 + \left(\frac{1}{\mathfrak{h}_1^2} + \frac{1}{\mathfrak{h}_2^2 + \mathfrak{h}_3^2} \right) \left(\frac{T - t}{(\vartheta - \vartheta_0 - t)(\vartheta - \vartheta_0 - T)} \right) \right] + r \left(\frac{\vartheta - \vartheta_0 - T}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right)^{k-1} e^{\varkappa(T-t)} + m(\vartheta - \vartheta_0 - T)^{k-1} e^{\varkappa T} \int_t^T e^{\varkappa \tau} \left(\frac{\vartheta - \vartheta_0 - (1+k)\tau}{(\vartheta - \vartheta_0 - \tau)^k} \right) d\tau \right) \quad (46)$$

$$E_{t,r}[\mathcal{R}^{\mu^*}(t)] = \left(\sqrt{\frac{\left[\left(\frac{(\kappa_1 - \varkappa)^2}{\mathfrak{h}_1^2} + \frac{(\kappa_2 - \varkappa)^2}{\mathfrak{h}_2^2 + \mathfrak{h}_3^2} \right) (T - t) + \left(\frac{\kappa_1 - \varkappa}{\mathfrak{h}_1^2} + \frac{\kappa_2 - \varkappa}{\mathfrak{h}_2^2 + \mathfrak{h}_3^2} \right) \ln \left(\frac{\vartheta - \vartheta_0 - t}{\vartheta - \vartheta_0 - T} \right)^2 + \left(\frac{1}{\mathfrak{h}_1^2} + \frac{1}{\mathfrak{h}_2^2 + \mathfrak{h}_3^2} \right) \left(\frac{T - t}{(\vartheta - \vartheta_0 - t)(\vartheta - \vartheta_0 - T)} \right) \right]}{Var_{t,r}[\mathcal{R}^{\mu^*}(t)]}} + r \left(\frac{\vartheta - \vartheta_0 - T}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right)^{k-1} e^{\varkappa(T-t)} + m(\vartheta - \vartheta_0 - T)^{k-1} e^{\varkappa T} \int_t^T e^{\varkappa \tau} \left(\frac{\vartheta - \vartheta_0 - (1+k)\tau}{(\vartheta - \vartheta_0 - \tau)^k} \right) d\tau \right) \quad (47)$$

Observación: El plan de control óptimo con interés predeterminado y cláusula de devolución de contribución se obtiene cuando μ_1^* y se da cuando:

$$\mu_1^* = 1 - \frac{\left((\kappa_1 - \varkappa) + \frac{1}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right) e^{\varkappa(t-T)}}{\gamma r \mathfrak{h}_1^2} - \frac{\left((\kappa_2 - \varkappa) + \frac{1}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right) e^{\varkappa(t-T)}}{\gamma r (\mathfrak{h}_2^2 + \mathfrak{h}_3^2)} \quad (48)$$

$$\mu_2^* = \frac{\left((\kappa_1 - \varkappa) + \frac{1}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right) e^{\varkappa(t-T)}}{\gamma r \mathfrak{h}_1^2} \quad (49)$$

$$\mu_3^* = \frac{\left((\kappa_2 - \varkappa) + \frac{1}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right) e^{\varkappa(t-T)}}{\gamma r (\mathfrak{h}_2^2 + \mathfrak{h}_3^2)} \quad (50)$$

A continuación, se realiza un análisis teórico, presentamos una propuesta que compara el resultado [11] y el de [4] con el resultado en [2]

Sea μ_1^{1*} , μ_2^{1*} y μ_3^{1*} sea el plan de control óptimo en [2] y se está dado por:

$$\mu_1^{1*} = 1 - \frac{(\kappa_1 - \varkappa) \left(\frac{\vartheta - \vartheta_0 - T}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right) e^{\varkappa(t-T)}}{\gamma r^1 \mathfrak{h}_1^2} - \frac{(\kappa_2 - \varkappa) \left(\frac{\vartheta - \vartheta_0 - T}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right) e^{\varkappa(t-T)}}{\gamma r^1 (\mathfrak{h}_2^2 + \mathfrak{h}_3^2)} \quad (51)$$

$$\mu_2^{1*} = \frac{(\kappa_1 - \varkappa) \left(\frac{\vartheta - \vartheta_0 - T}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right) e^{\varkappa(t-T)}}{\gamma r^1 \mathfrak{h}_1^2} \quad (52)$$

$$\mu_3^{1*} = \frac{(\kappa_2 - \varkappa) \left(\frac{\vartheta - \vartheta_0 - T}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right) e^{\varkappa(t-T)}}{\gamma r^1 (\mathfrak{h}_2^2 + \mathfrak{h}_3^2)} \quad (53)$$

Proposición 1: Sea $\kappa_1 > 0, \kappa_2 > 0, \vartheta > 0, \vartheta_0 > 0, \varkappa > 0, \mathfrak{h}_1 > 0, \mathfrak{h}_2 > 0, \mathfrak{h}_3 > 0, T > 0, t > 0$ y $r(t) > 0, r^1 > 0$ para $t \in [0, T]$ tal que $r^1(t) > r(t)$ y $(\vartheta - \vartheta_0 - t) \geq (\vartheta - \vartheta_0 - T)$, entonces:

(i) $\mu_2^* > \mu_2^{1*}$

(ii) $\mu_3^* > \mu_3^{1*}$

(iii) $\mu_1^* < \mu_1^{1*}$

Demostración:

$$(i) \text{ Recordar que } \mu_2^{1*} = \frac{(\kappa_1 - \varkappa) \left(\frac{\vartheta - \vartheta_0 - T}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right) e^{\varkappa(t-T)}}{\gamma r r^1 \mathfrak{h}_1^2} \text{ y } \mu_2^* = \frac{\left((\kappa_1 - \varkappa) + \frac{1}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right) e^{\varkappa(t-T)}}{\gamma r \mathfrak{h}_1^2} \quad (54)$$

Supongamos que $\mu_2^* > \mu_2^{1*}$, queremos demostrar que $\mu_2^* - \mu_2^{1*} > 0$, así que

$$\begin{aligned} \mu_2^* - \mu_2^{1*} &= \frac{\left((\kappa_1 - \varkappa) + \frac{1}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right) e^{\varkappa(t-T)}}{\gamma r \mathfrak{h}_1^2} - \frac{(\kappa_1 - \varkappa) \left(\frac{\vartheta - \vartheta_0 - T}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right) e^{\varkappa(t-T)}}{\gamma r r^1 \mathfrak{h}_1^2} \\ &= \frac{e^{\varkappa(t-T)}}{\gamma r r^1 \mathfrak{h}_1^2} \left(\frac{r(\kappa_1 - \varkappa)(\vartheta - \vartheta_0 - t) + r - r^1(\kappa_1 - \varkappa)(\vartheta - \vartheta_0 - T)}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right) \\ &= \frac{e^{\varkappa(t-T)}}{\gamma r r^1 \mathfrak{h}_1^2 (\vartheta - \vartheta_0 - t)} (r(\kappa_1 - \varkappa)(\vartheta - \vartheta_0 - t) + r - r^1(\kappa_1 - \varkappa)(\vartheta - \vartheta_0 - T)) \end{aligned} \quad (55)$$

Dado que $r^1(t) > r(t)$, $(\vartheta - \vartheta_0 - t) \geq (\vartheta - \vartheta_0 - T)$ y $r > 0$ entonces, tenemos que:

$$(r(\kappa_1 - \varkappa)(\vartheta - \vartheta_0 - t) + r - r^1(\kappa_1 - \varkappa)(\vartheta - \vartheta_0 - T)) > 0 \quad (56)$$

Por lo tanto

$$\mu_2^* - \mu_2^{1*} = \frac{e^{\varkappa(t-T)}}{\gamma r r^1 \mathfrak{h}_1^2 (\vartheta - \vartheta_0 - t)} (r(\kappa_1 - \varkappa)(\vartheta - \vartheta_0 - t) + r - r^1(\kappa_1 - \varkappa)(\vartheta - \vartheta_0 - T)) > 0 \quad (57)$$

Esto implica que $\mu_2^* - \mu_2^{1*} > 0$:

$$(ii) \text{ Recordar que } \mu_2^{1*} = \frac{(\kappa_2 - \varkappa) \left(\frac{\vartheta - \vartheta_0 - T}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right) e^{\varkappa(t-T)}}{\gamma r^1 (\mathfrak{h}_2^2 + \mathfrak{h}_3^2)} \text{ y } \mu_2^* = \frac{\left((\kappa_2 - \varkappa) + \frac{1}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right) e^{\varkappa(t-T)}}{\gamma r (\mathfrak{h}_2^2 + \mathfrak{h}_3^2)} \quad (58)$$

Supongamos que $\mu_3^* > \mu_3^{1*}$, queremos demostrar que $\mu_3^* - \mu_3^{1*} > 0$, así que:

$$\begin{aligned} \mu_3^* - \mu_3^{1*} &= \frac{\left((\kappa_2 - \varkappa) + \frac{1}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right) e^{\varkappa(t-T)}}{\gamma r (\mathfrak{h}_2^2 + \mathfrak{h}_3^2)} - \frac{(\kappa_2 - \varkappa) \left(\frac{\vartheta - \vartheta_0 - T}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right) e^{\varkappa(t-T)}}{\gamma r^1 (\mathfrak{h}_2^2 + \mathfrak{h}_3^2)} \\ &= \frac{e^{\varkappa(t-T)}}{\gamma r r^1 (\mathfrak{h}_2^2 + \mathfrak{h}_3^2)} \left(\frac{r(\kappa_2 - \varkappa)(\vartheta - \vartheta_0 - t) + r - r^1(\kappa_2 - \varkappa)(\vartheta - \vartheta_0 - T)}{\vartheta - \vartheta_0 - t} \right) \\ &= \frac{e^{\varkappa(t-T)}}{\gamma r r^1 (\mathfrak{h}_2^2 + \mathfrak{h}_3^2) (\vartheta - \vartheta_0 - t)} (r(\kappa_2 - \varkappa)(\vartheta - \vartheta_0 - t) + r - r^1(\kappa_2 - \varkappa)(\vartheta - \vartheta_0 - T)) \end{aligned} \quad (59)$$

Dado que $r^1(t) > r(t)$, $(\vartheta - \vartheta_0 - t) \geq (\vartheta - \vartheta_0 - T)$ y $r > 0$ entonces

$$(r(\kappa_2 - \varkappa)(\vartheta - \vartheta_0 - t) + r - r^1(\kappa_2 - \varkappa)(\vartheta - \vartheta_0 - T)) > 0 \quad (60)$$

Por lo tanto

$$\mu_3^* - \mu_3^{1*} = \frac{e^{\varkappa(t-T)}}{\gamma r r^1 (\mathfrak{h}_2^2 + \mathfrak{h}_3^2) (\vartheta - \vartheta_0 - t)} (r(\kappa_2 - \varkappa)(\vartheta - \vartheta_0 - t) + r - r^1(\kappa_2 - \varkappa)(\vartheta - \vartheta_0 - T)) > 0 \quad (61)$$

Esto implica que $\mu_3^* - \mu_3^{1*} > 0$.

$$(iii) \text{ Recordar que } \mu_1^{1*} = 1 - \mu_2^{1*} - \mu_3^{1*} \text{ y } \mu_1^* = 1 - \mu_2^* - \mu_3^* \quad (62)$$

Supongamos que $\mu_1^* < \mu_1^{1*}$, queremos demostrar que $\mu_1^* - \mu_1^{1*} < 0$, así que

$$\begin{aligned} \mu_1^* - \mu_1^{1*} &= 1 - \mu_2^* - \mu_3^* - (1 - \mu_2^{1*} - \mu_3^{1*}) \\ &= 1 - 1 - (\mu_2^* - \mu_2^{1*}) - (\mu_3^* - \mu_3^{1*}) \\ &= -[(\mu_2^* - \mu_2^{1*}) + (\mu_3^* - \mu_3^{1*})] \end{aligned} \quad (63)$$

Dado $\mu_2^* - \mu_2^{1*} > 0$ y $\mu_3^* - \mu_3^{1*} > 0$, entonces

$$(\mu_2^* - \mu_2^{1*}) + (\mu_3^* - \mu_3^{1*}) > 0 \quad (64)$$

Por lo tanto

$$\mu_1^* - \mu_1^{1*} = -[(\mu_2^* - \mu_2^{1*}) + (\mu_3^* - \mu_3^{1*})] < 0 \quad (65)$$

Esto implica que $\mu_3^* - \mu_3^{1*} > 0$.

Ahora, procederemos a realizar unas simulaciones numéricas de la política de inversión óptima con respecto al tiempo utilizando los siguientes parámetros: $\vartheta = 100$; $\vartheta_0 = 20$; $\gamma = 0,055$; $\varkappa = 0,022$; $\kappa_1 = 0,057$; $\kappa_2 = 0,067$; $\mathfrak{h}_1 = 0,87$; $\mathfrak{h}_2 = 1$; $\mathfrak{h}_3 = 0,65$; $r = \mathcal{R}(t)$; $r_0 = 1$; $T = 40$; $t = 0: 5: 20$. La siguiente simulación se realizó utilizando Fortran.

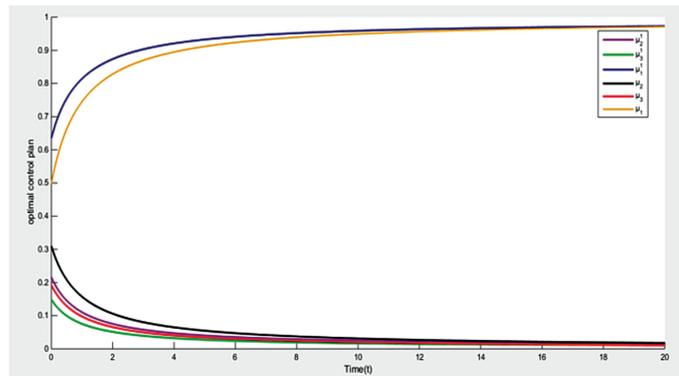


Figura 1. Evolución temporal de los planes de control óptimos con predeterminado cuando $r = \mathcal{R}^{\mu^*}(t)$.

Fuente: Elaboración propia.

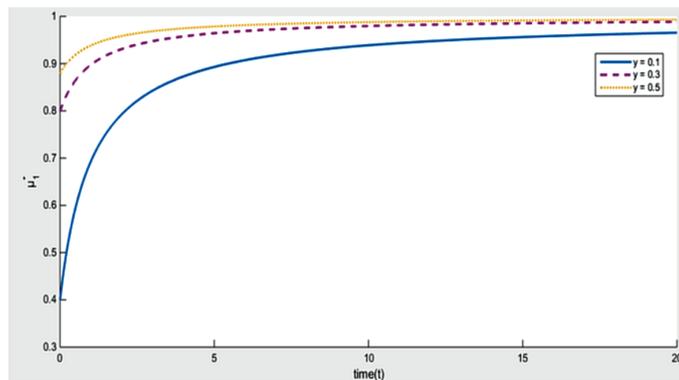


Figura 2. Evolución temporal de μ_1^* cuando $r = \mathcal{R}^{\mu^*}(t)$ con diferente aversión al riesgo γ .

Fuente: Elaboración propia.

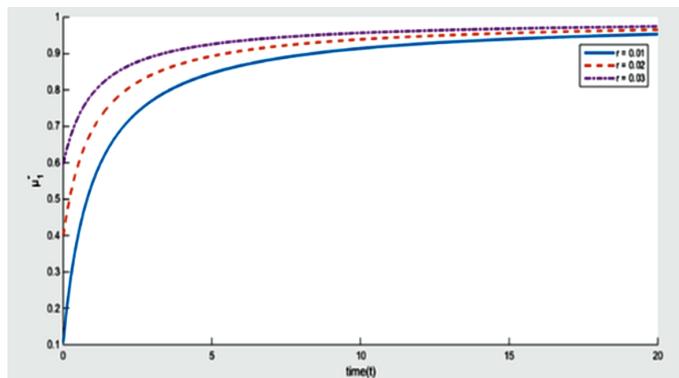


Figura 3. Evolución temporal de μ_1^* cuando $r = \mathcal{R}^{\mu^*}(t)$ con diferente tipo de interés predeterminado σ .

Fuente: Elaboración propia.

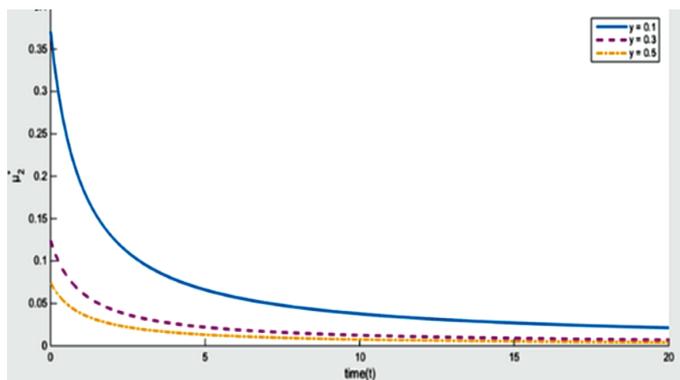


Figura 4. Evolución temporal de μ_2^* cuando riesgo $r = \mathcal{R}^{\mu^*}(t)$ con diferente aversión al γ .

Fuente: Elaboración propia.

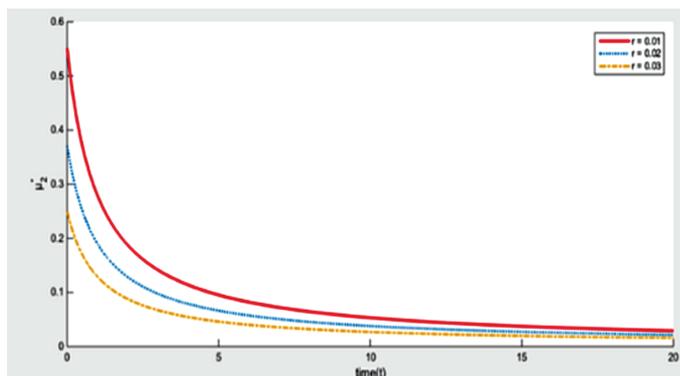


Figura 5. Evolución temporal de μ_2^* cuando $r = \mathcal{R}^{\mu^*}(t)$ con diferente tipo de interés predeterminado σ .

Fuente: Elaboración propia.

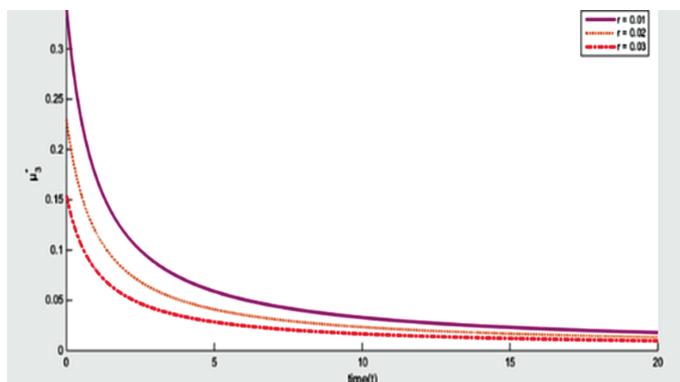


Figura 6. Evolución temporal de μ_3^* cuando $r = \mathcal{R}^{\mu^*}(t)$ con diferente tipo de interés predeterminado σ .

Fuente: Elaboración propia.

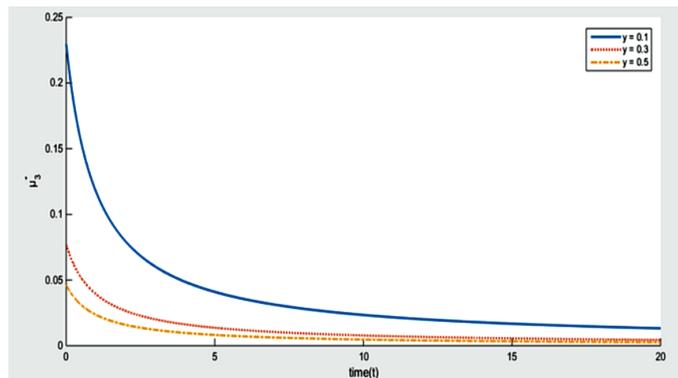


Figura 7. Evolución temporal de μ_3^* cuando riesgo $r = \mathcal{R}^{\mu^*}(t)$ con diferente aversión al γ .

Fuente: Elaboración propia.

3. ANÁLISIS

Teniendo en cuenta la proposición 1, podemos determinar que el plan de control óptimo para los activos de riesgo para el caso en el que el retorno de la cláusula es con un interés predeterminado es mayor en comparación con el caso en el que la cláusula de retorno no tiene un interés predeterminado. Esto se debe a que cuando las contribuciones devueltas tienen un interés predeterminado; el fondo restante en el sistema de pensiones es menor en comparación con cuando el rendimiento es sin intereses predeterminados. Además, una observación cuidadosa de la Figura 1, muestra que una disminución en la riqueza conduce a un aumento en el plan de control óptimo para los activos de riesgo y una disminución en el plan de control óptimo del activo libre de riesgo. Esto muestra que tanto el análisis numérico como el teórico se confirman mutuamente.

De las Figuras 2 y 3, el plan de control óptimo de efectivo es directamente proporcional tanto al coeficiente de aversión al riesgo del afiliado como a la tasa de interés predeterminada del activo libre de riesgo; esto implica que cuando la tasa de interés libre de riesgo es alta, el administrador del fondo aumentará su inversión en activos libres de riesgo mientras reduce la inversión en activos de riesgo y viceversa. Del mismo modo, si los miembros tienen un alto coeficiente de aversión al riesgo, invertirán más en activos libres de riesgo y viceversa. En las Figuras 4 y 7, observamos que el plan de control óptimo de los activos de riesgo es inversamente proporcional al nivel de aversión al riesgo de los miembros; esto implica que un inversor con alto nivel de aversión al riesgo invertirá menos en acciones y préstamos y viceversa a medida que se acerque la edad de jubilación. Las Figuras 5 y 6 muestran que los planes de control óptimos de los activos de riesgo son inversamente proporcionales al interés predeterminado; es decir, a medida que aumenta la tasa de interés predeterminada, hay una disminución en las inversiones en acciones y préstamos.

CONCLUSIONES

La idea principal de este artículo era tomar los resultados obtenidos por (MathLAB) y (colocar otros) y plasmar la importancia de maximizar los portafolios de inversión para obtener una mayor rentabilidad en las contribuciones. Para esto se estudió el plan de control óptimo para un afiliado en un plan DC con o sin cláusula de devolución de aportes con tasa de interés predeterminada. Se desarrolló un problema de control óptimo estocástico de varianza media en tiempo continuo utilizando el símbolo actuarial. Se consideró que las inversiones en efectivo, capital y préstamos aumentaban los fondos acumulados restantes para los miembros sobrevivientes. Se obtuvo un problema de optimización de las ecuaciones extendidas de Hamilton Jacobi Bellman utilizando el enfoque de la teoría de juegos y la función de utilidad de la varianza media. Resolviendo el problema de optimización, se encontraron algunas soluciones de forma cercana a los planes de control óptimo para los tres activos y la frontera eficiente de los afiliados. Además, se realizó una simulación numérica de los planes de control óptimos de los tres activos con respecto al tiempo. Finalmente, al comparar teóricamente los planes óptimos de control cuya devolución de aportes están con o sin intereses y observar que el plan del control óptimo de los activos de riesgo es inversamente proporcional al nivel de aversión al riesgo y tasa de interés predeterminado.

CONFLICTOS DE INTERÉS DE LOS AUTORES

Los autores declaramos que no tenemos ningún conflicto de interés.

REFERENCIAS

- [1] E.E. Akpanibah & B.O. Osu, "Optimal Portfolio Selection for a Defined Contribution Pension Fund with Return Clauses of Premium with Predetermined Interest Rate under Mean variance Utility", *Asian Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 2, N° 2, pp. 19-29, february 2018. Disponible en: https://www.researchgate.net/publication/330858069_Optimal_Portfolio_Selection_for_a_Defined_Contribution_Pension_Fund_with_Return_Clauses_of_Premium_with_Predetermined_Interest_Rate_under_Mean-variance_Utility
- [2] E.E. Akpanibah; B.O. Osu; B.I. Oruh & C.N. Obi, "Strategic Optimal Portfolio Management for a Dc Pension Scheme with Return of Premium Clauses", *Transactions of the Nigerian Association of Mathematical Physics*, Vol. 8, N° 1, pp. 121-130, January 2019. Disponible en: <http://e.nampjournals.org/product-info.php?pid3802.html>
- [3] E.E. Akpanibah; B.O. Osu & S.A. Ihedioha, "On the optimal asset allocation strategy for a defined contribution pension system with refund clause of premium with predetermined interest under Heston's volatility model", *J. Nonlinear Sci. Appl.*, Vol. 13, N° 1, pp. 53-64, January 2020. Disponible en: <http://dx.doi.org/10.22436/jnsa.013.01.05>

- [4] E.E. Akpanibah; B.O. Osu; B.I. Oruh; O.C. Ukwuoma & E.O. Eze, "On the maximization of investment portfolios with returns of contributions", *MathLAB Journal*, Vol. 6, pp. 1-16, August 2020. Disponible en: <https://purkh.com/index.php/mathlab/article/view/806/769>
- [5] T. Björk & A. Murgoci, "A general theory of Markovian time inconsistent stochastic control problems, Working Paper, Stockholm School of Economics", October 2010. Disponible en: <http://ssrn.com/abstract=1694759>
- [6] A.J. Cairns; D. Blake & K. Dowd, "Stochastic lifestyling: optimal dynamic asset allocation for defined contribution pension plans", *Journal of Economic Dynamics & Control*, Vol. 30, N° 5, pp. 843-877, May 2006. Disponible en: <https://doi.org/10.1016/j.jedc.2005.03.009>
- [7] G. Deelstra; M. Grasselli & P.F. Koehl, "Optimal investment strategies in the presence of a minimum guarantee". *Insurance*, Vol. 33, N° 1, pp. 189-207, August 2003. Disponible en: [https://doi.org/10.1016/S0167-6687\(03\)00153-7](https://doi.org/10.1016/S0167-6687(03)00153-7)
- [8] J. Gao, "Optimal portfolios for DC pension plan under a CEV model", *Insurance Mathematics and Economics*, Vol. 44, N° 3, pp. 479-490, June 2009. Disponible en: <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2009.01.005>
- [9] L. He & Z. Liang, "Optimal financing and dividend control of the insurance company with fixed and proportional transaction costs", *Insurance: Mathematics & Economics*, Vol. 44, N° 1, pp. 88-94, February 2009. Disponible en: <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2008.10.001>
- [10] L. He & Z. Liang, "The optimal investment strategy for the DC plan with the return of premiums clauses in a mean-variance framework", *Insurance*, Vol. 53, N° 3, pp. 643-649, November 2013. Disponible en: <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2013.09.002>
- [11] D. Li; X. Rong; H. Zhao & B. Yi, "Equilibrium investment strategy for DC pension plan with default risk and return of premiums clauses under CEV model", *Insurance*, Vol. 72, pp. 6-20, January 2013. Disponible en: <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2016.10.007>
- [12] Z. Liang & J. Huang, "Optimal dividend and investing control of an insurance company with higher solvency constraints", *Insurance: Mathematics & Economics*, Vol. 49, N° 3, pp. 501-511, November 2011. Disponible en: <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2011.08.008>
- [13] H.M. Markowitz, "Portfolio selection". *Journal of Finance*, Vol. 7, pp. 77-91, March 1952. Disponible en: <https://www.jstor.org/action/doBasicSearch?Query=no%3A1+AND+sn%3A0022-1082+AND+sp%3A77+AND+vo%3A7+AND+year%3A1952&ymod=Your+request+did+not+match+any+items>
- [14] K.N. Njoku; B.O. Osu; E.E. Akpanibah & R.N. Ujumadu, "Effect of Extra Contribution on Stochastic Optimal Investment Strategies for DC Pension with Stochastic Salary under the Affine Interest Rate Model", *Journal of Mathematical Finance*, Vol. 7, N° 4, pp. 821-833, June 2017. Disponible en: https://www.researchgate.net/publication/320666357_Effect_of_Extra_Contribution_on_Stochastic_Optimal_Investment_Strategies_for_DC_Pension_with_Stochastic_Salary_under_the_Affine_Interest_Rate_Model
- [15] B.O. Osu; E.E. Akpanibah & K.N. Njoku, "On the Effect of Stochastic Extra Contribution on Optimal Investment Strategies for Stochastic Salary under the Affine Interest Rate Model in a DC Pension

- Fund”, *General Letters in Mathematics*, Vol. 2, N° 3, pp. 138-149, June 2017. Disponible en: <https://doi.org/DOL:10.31559/glm2016.2.3.5>
- [16] D. Sheng & X. Rong, “Optimal time consistent investment strategy for a DC pension with the return of premiums clauses and annuity contracts”, Hindawi Publishing Corporation Vol. 2014, pp. 1-13, June 2014. Disponible en: <http://dx.doi.org/10.1155/2014/862694>
- [17] Y. Wang; S. Fan & H. Chang, “DC Pension Plan with the Return of Premium Clauses under Inflation Risk and Volatility Risk”, *J. Sys. Sci. & Math. Scis.*, Vol. 38, N° 4, pp. 423-437, July 2018. Disponible en: <http://sysmath.com/EN/abstract/abstract13391.shtml>
- [18] J. Xiao; Z. Hong & C. Qin, “The constant elasticity of variance (CEV) model and the Legendre transform-dual solution for annuity contracts”, *Insurance*, Vol. 40, N° 2, pp. 302-310, March 2007. Disponible en: <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2006.04.007>
- [19] Y. Zeng & Z. Li, “Optimal time consistent investment and reinsurance policies for mean-variance insurers”, *Insurance: Mathematics & Economics*, Vol. 49, N° 1, pp. 145-154, July (2011). Disponible en: <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2011.01.001>
- [20] C. Zhang & X. Rong, “Optimal investment strategies for DC pension with a stochastic salary under affine interest rate model”, Hindawi Publishing Corporation, Vol. 2013, pp. 1-11, February 2013. Disponible en: <http://dx.doi.org/10.1155/2013/297875>
- [21] H. Zhao & J. Cao, “Optimal investment with multiple risky assets for an insurer in an incomplete market”, Hindawi Publishing Corporation, pp. 1-12, March 2013. Disponible en: <https://doi.org/10.1155/2013/751846>