Revista UNIMAR

Tendencias de estudios sobre los saberes previos, las estrategias metacognitivas y la transformación semiótica en la resolución de problemas algebraicos

Oscar Olmedo Valverde-Riascos[1], Abel Antonio Díaz-Castellar[2]

Cómo citar este artículo / To reference this article / Para citar este artigo: Valverde-Riascos, O. O. y Díaz-Castellar, A. A. (2021). Tendencias de estudios sobre los saberes previos, las estrategias metacognitivas y la transformación semiótica en la resolución de problemas algebraicos. *Revista UNIMAR, 39*(2), 206-230. DOI: https://doi.org/10.31948/Rev.unimar/unimar39-2-art10

Fecha de recepción: 02 de marzo de 2021
Fecha de revisión: 21 de mayo de 2021
Fecha de aprobación: 29 de junio de 2021

Resumen

El presente artículo se realizó mediante una revisión documental que utilizó el procedimiento del estado de arte o estado del conocimiento, permitiendo un análisis de la literatura del estudio en desarrollo de la estructura de los saberes previos, estrategias metacognitivas y transformación semiótica en la resolución de problemas algebraicos, desde la dimensión conceptual, empírica y hermenéutica, para continuar explorando, hilvanando discursos y comprendiendo las tendencias de los estudios a profundidad. En ese sentido, se define cada uno de ellos y se describe las tendencias o enfoques, desde el ámbito teórico, epistémico y metodológico, concluyendo que se utiliza una diversidad de metodologías cualitativas, cuantitativas, y algunos diseños mixtos o plurimetódicos, y que los procesos característicos del funcionamiento articulado de los saberes previos, estrategias metacognitivas y transformación semiótica en su ambiente natural de aprendizaje, son fundamentales en los análisis investigativos de transición de procesos aritméticos a procesos algebraicos.

Palabras clave: Conocimientos aritméticos; cognición; semiología; resolución de problemas; álgebra.

Artículo de Revisión, derivado del estado del arte de la tesis doctoral en curso, titulada: *Estructura de los saberes previos, estrategias metacognitivas y transformación semiótica, en la resolución de problemas algebraicos*.

[1]Doctor en Estudios Sociales y Políticos de la Educación. Investigador Senior reconocido por Minciencias, Colombia; grupo Praxis, categoría A. Profesor Universidad Mariana y UMECIT-Panamá. E-mail: ovalverde@umariana.edu.co ORCID

[2]Estudiante de doctorado en Ciencias de la Educación, Universidad UMECIT-Panamá. Magíster en Ciencias de la Educación. Docente de educación básica secundaria y media en el Magisterio Público de Colombia. Residente en Chigorodó, Colombia. E-mail: abeldc22@gmail.com ORCID

Trends in studies on prior knowledge, metacognitive strategies and semiotic transformation in solving algebraic problems

Abstract

This article was carried out through a documentary review, which used the state of the art or state of knowledge procedure, allowing an analysis of the literature of the study in the development of the structure of previous knowledge, metacognitive strategies, and semiotic transformation in the resolution of algebraic problems, from the conceptual, empirical and hermeneutical dimension, to continue exploring, weaving together discourses and understanding the trends of in-depth studies. In this sense, each one of them is defined, and the trends or approaches are described, from the theoretical, epistemic, and methodological fields, concluding that a variety of qualitative and quantitative methodologies are used, and some mixed or multimethodical designs, and that the characteristic processes of the articulated functioning of previous knowledge, metacognitive strategies and semiotic transformation in their natural learning environment are fundamental in the investigative analyzes of the transition process from arithmetic to algebraic processes.

Keywords: Arithmetic knowledge; cognition; semiology; problem solving; algebra.

Tendências em estudos sobre conhecimento prévio, estratégias metacognitivas e transformação semiótica na solução de problemas algébricos

Resumo

Este artigo foi realizado por meio de uma revisão documental que utilizou o procedimento do estado da arte ou estado do conhecimento, permitindo uma análise da literatura do estudo no desenvolvimento da estrutura do conhecimento prévio, estratégias metacognitivas e transformação semiótica na resolução de problemas algébricos, desde a dimensão conceitual, empírica e hermenêutica, para continuar explorando, tecendo discursos e entendendo as tendências dos estudos aprofundados. Nesse sentido, cada uma delas é definida, e são descritas as tendências ou abordagens, a partir dos campos teórico, epistêmico e metodológico, concluindo que são utilizadas diversas metodologias qualitativas e quantitativas, e alguns desenhos mistos ou multimetódicos, e que os processos característicos do funcionamento articulado dos conhecimentos prévios, as estratégias metacognitivas e a transformação semiótica no seu ambiente natural de aprendizagem são fundamentais nas análises investigativas do processo de transição dos processos aritméticos para os algébricos.

Palavras-chave: Conhecimento aritmético; cognição; semiologia; resolução de problemas; álgebra.

Rev. Unimar Julio - Diciembre 2021
e-ISSN: 2216-0116 ISSN: 0120-4327
DOI: https://doi.org/10.31948/Rev.unimar

1. Introducción

El contexto inicial de los estudios relacionados con la resolución de problemas algebraicos utiliza con bastante frecuencia términos como: saberes previos o recursos cognitivos, estrategias metacognitivas y transformación semiótica (Barrantes, 2008; Rocha, 2006; D'Amore, 2012; Duval, 2016; Vergnaud, 2016; Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017). Para empezar, los saberes previos hacen referencia a todas aquellas nociones y concepciones estructuradas como modelo mental, analogías, imágenes; o, proposicional (no en acto), que son prerrequisitos para comprender y posibilitar la resolución de un problema (Ausubel, 2012). En el ámbito algebraico, se refiere a las definiciones de operaciones con números reales, comprensión de propiedades de R, así como nociones algebraicas (Palarea, 2012). Aunque son construidos en acto (en el contexto de problemas aritméticos y algebraicos), al asimilarse y acomodarse, se convierten en no en acto (Piaget, citado en Lacasa, 2015; Vergnaud, 2016). Asimismo, otros autores describen los saberes previos como un sistema de creencias (no en acto), idearios o supuestos que son operativizados al enfrentarse a un problema (Schoenfeld, citado por Barrantes, 2008; Chaves, Gamboa y Castillo 2010; Oropeza y Sánchez, 2014; Molina, 2014; Montes, Flores-Medrano, Carmona, Huitrado y Flores, s.f.; Montes, Aguilar-González, Carmona, Carrillo, Contreras-Gonzáles, Climent, Escudero, Flores-Medrano, Flores, Huitrado, Muñoz-Catalán, Rojas, Sosa, Vasco y Zakaryan, 2014; Otero, Papini y Elichiribehety, 2016; Iriondo-Otxotorena, 2016).

Respecto a las estrategias metacognitivas, diversos autores plantean que son procedimientos cognoscitivos utilizados para identificar la forma propia de razonar (creencias, concepciones sobre la mejor forma de usar los saberes previos en un problema determinado) para modificarlos o sustituirlos, según la percepción de las demandas del problema en cualquier momento resolutivo, a través de procesos de planeación, regulación y evaluación, mediante técnicas como la heurística, razonamiento plausible, formulación de hipótesis, tanteo y contraejemplo, con el fin de generar avances progresivos (Rodríguez, 2005; Rocha, 2006; Weinstein, Mayer, Brown y Flavell, citados en Osses y Jaramillo, 2008; Ottonello, Veliz y Ross, 2011; Palacios y Solarte, 2013).

Por último, sobre la transformación semiótica, los estudios revisados indican que este componente se refiere al cambio de representación de un objeto abstracto, mediante funciones semióticas de tratamiento y/o conversión en los registros natural, algebraico, aritmético, pictográfico y figural. Particularmente, en el caso de los registros aritmético y algebraico, para el nivel de bachillerato, los tres niveles de algebrización implican procesos de tratamiento y conversión (Duval, 2012, D'Amore, 2012; Godino, Neto, Wilhelmi, Aké, Etchegaray y Lasa, 2015; Duval 2016; Vergnaud, 2016).

No obstante, Godino et al., (2015) mencionan que se requiere más profundidad en la exploración del funcionamiento articulado de los conocimientos previos o "plano personal e institucional, las estrategias metacognitivas utilizadas por el estudiante y las transformaciones semióticas de los objetos matemáticos, durante el proceso de resolución" (Godino, Gonzato, Cajaraville y Fernández, 2012, p. 19). Asimismo, Vergnaud (2016) afirma que las dificultades de estudiantes en la resolución de problemas matemáticos están dadas "en términos de esquemas que se necesita para estructurar el proceso resolutivo" (p. 33).

Por lo anterior, este artículo se centrará en mostrar el estado de conocimiento y una mirada crítica sobre las investigaciones educativas y pedagógicas con relación a la temática, con el fin de poner a disposición de investigadores e interesados en la materia, herramientas teóricas y conceptuales de base para sus estudios. En ese sentido, se dará respuesta a los siguientes interrogantes:

- ¿Cuáles son los resultados de las investigaciones educativas, en torno a los saberes previos, estrategias metacognitivas y transformación semiótica en la resolución de problemas algebraicos?
- ¿Cuáles son las tendencias de las investigaciones educativas sobre los componentes de los saberes

Rev. Unimar Julio - Diciembre 2021
e-ISSN: 2216-0116 ISSN: 0120-4327
DOI: https://doi.org/10.31948/Rev.unimar
Revista UNIMAR

previos, estrategias metacognitivas y transformación semiótica en la resolución de problemas algebraicos?

- ¿Cuáles son los vacíos de conocimiento, hipótesis y posibles líneas de investigación derivadas de las tendencias de investigaciones sobre los componentes de los saberes previos, estrategias metacognitivas y transformación semiótica en la resolución de problemas algebraicos?

2. Metodología

La elaboración del presente artículo de revisión se realizó mediante un análisis documental que, utilizando el procedimiento del estado del conocimiento, permitió la revisión literaria o construcción del estado del arte del estudio en desarrollo de la estructura de los saberes previos, estrategias metacognitivas y transformación semiótica en la resolución de problemas algebraicos; es decir, se recabó la dimensión conceptual, empírica y hermenéutica, para continuar explorando, hilvanando discursos y comprendiendo las tendencias de los estudios a profundidad; por ello, el estado del arte como procedimiento y forma de recuperar, analizar e interpretar las investigaciones, se fue construyendo desde el año 2019 hasta 2020, en una serie de fases interrelacionadas y continuas entre sí, como un modelo cíclico que requirió de una fase heurística con búsqueda, selección y análisis; de una fase hermenéutica como interpretación de las diferentes posturas de los autores y, una fase holística que integra las diferentes tendencias metodológicas, herramientas y relaciones existentes. De esta manera, la fase heurística requirió de programas de software como *Publish or Perish* que recupera y analiza citas académicas, textos y fuentes de datos como Google Scholar y Microsoft Academic, Web of Science y Scopus; como resultado, capturó 920 documentos, artículos y citas de Lote, o citas en libros o capítulos de libros.

Además, las bases de datos científicas reconocidas que se usó para el rastreo del material bibliográfico, fueron: Google Scholar, Scielo, Redalyc, Research Gate, Dialnet y Scopus, de las cuales se seleccionó y extrajo información relacionada con artículos de revisión, tesis de maestría y doctorado, que examinaban los procesos asociados a los saberes previos, estrategias metacognitivas y transformación semiótica en la resolución de problemas algebraicos. Posteriormente, la información se organizó, estructurando el artículo, según las aristas propias del enfoque temático, mediante el uso de la revisión sistemática, como: el establecimiento de la pregunta, revisión de los efectos de interés respecto al problema planteado, localización de estudios a través de *Publish or Perish*, y el uso de herramientas del investigador respecto a la elaboración de citas bibliográficas, administración de estudios encontrados y en la interacción con algunas bibliotecas digitales, como las herramientas Mendeley y RefWorks; se utilizó criterios de inclusión y exclusión referidos a la relación de los estudios de la resolución de problemas algebraicos con los saberes previos, estrategias metacognitivas y transformación semiótica.

En la fase hermenéutica se elaboró un diálogo entre los textos, una vez efectuada la búsqueda de información y datos relevantes, se encontró la información de interés referente a las características de la población de estudio, variables o categorías, su calidad metodológica (incluyendo los métodos de análisis estadístico o de análisis cualitativos utilizados), que se clasificó en una matriz en Excel, analizando el país, año, objetivo, metodología, enfoque metodológico y disciplinar, resultados y aporte, hallando que existían 27 artículos, de los cuales el 33,33 % son de Colombia; el 33,33 % de España con enfoques educativo y psicoeducativo; el 11,11 % de México con enfoques educativo y socioeducativo; el 7,41 % de Costa Rica; el 3,7 % de Estados Unidos; el 3,7 % de Perú; el 3,7 % de Puerto Rico y el 3,7 % de Venezuela, con enfoques educativo, psicoeducativo y de neuroaprendizaje. Los estudios se caracterizaron por utilizar diseños metodológicos cuantitativos, cualitativos y mixtos. De igual forma, en el análisis de sus resultados, se hace especial énfasis en el aporte que efectúa al estudio de la resolución de problemas algebraicos, asumiendo tendencias epistémicas y teóricas de la matemática centrada en la resolución de problemas matemáticos que enfatizan en el desarrollo de una serie de pasos heurísticos, los recursos

Rev. Unimar Julio - Diciembre 2021
e-ISSN: 2216-0116 ISSN: 0120-4327
DOI: https://doi.org/10.31948/Rev.unimar
Revista UNIMAR

cognitivos o saberes previos como acervo de conocimientos del dominio del problema y los recursos metacognitivos y, el desarrollo del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática, el cual agrega los saberes previos y estrategias metacognitivas, propicio para el análisis de la estructura en la resolución de problemas algebraicos.

Finalmente, en la última fase holística se integró las diferentes tendencias metodológicas, herramientas y relaciones existentes, mediante las cuales se decidió que, para esta parte inicial, se utilizaría el estado de arte como un procedimiento del análisis documental que fortalecería el desarrollo de la investigación de la estructura de los saberes previos, estrategias metacognitivas y transformación semiótica en la resolución de problemas algebraicos, para develar aspectos integrales de los componentes que se estructura en la resolución de problemas algebraicos en educación secundaria, procurando que se lleve a cabo un proceso de caracterización y valoración de las concepciones, constructos, significados de los estudiantes, para comprender la forma como son implicados los aspectos de las categorías de análisis de saberes previos, estrategias metacognitivas y transformación semiótica en sus procesos de resolución de problemas algebraicos en la educación secundaria.

Revisión actual de la temática, desarrollos, avances y tendencias

La resolución de problemas matemáticos, como eje independiente de enseñanza en la educación matemática, aparece de forma contundente a mediados del siglo XX, cuando el matemático y educador George Polya publicó en 1965 su famoso libro *How solve it,* en el que ofrece una serie de pasos heurísticos para resolver problemas, entre ellos, los de tipo algebraico (Bello, García, Rojas y Sigarreta, 2016).

Posteriormente, en la década de los 80 y 90 aparece en escena el matemático y educador Alan Schoenfeld (Barrantes, 2008), para profundizar en la comprensión que se tenía hasta entonces, de los aspectos implicados en la resolución de problemas matemáticos, e hizo referencia a los recursos cognitivos o saberes previos (acervo de conocimientos del dominio del problema), recursos metacognitivos, etc., centrándose en los aspectos del Saber, no en los del Ser (ej. la motivación), igualmente implicados en la resolución de problemas.

Ahora bien, desde 1992 hasta la actualidad, el matemático y educador español Juan Díaz Godino, en compañía de su grupo de investigación, con el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática y la colaboración de investigadores reconocidos como Chevallard, con su Teoría Antropológica de lo Didáctico; Bruno D'Amore y sus aportes a la didáctica de la matemática; Vergnaud, con su Teoría de los Campos Conceptuales y Duval, con la Teoría de Registros de Representaciones Semióticas, han complementado y clarificado conceptualmente las categorías temáticas que se integran en el proceso resolutivo: saberes previos, estrategias metacognitivas y transformación semiótica, haciendo énfasis en la subjetividad e institucionalidad presente en el uso cognoscitivo y funcionamiento articulado de dichos componentes, así como en las transformaciones que de ellos se derivan, para la solución de problemas algebraicos (Chevallard, citado en Munzón, Bosch y Gascón, 2015; Godino et al., 2015).

Todas estas investigaciones han sido la base de nuevos estudios que buscan replicar dichos paradigmas en contextos escolares específicos, con el fin de avanzar en la clarificación de los procesos cognoscitivos de la actividad resolutiva de los estudiantes. Por eso, en este artículo, dichos estudios han sido ordenados con base en el grado de significación respecto a las aristas de la temática en cuestión.

En los saberes previos

Desde el ámbito conceptual, según el matemático y educador Alan Schoenfeld, cuyos estudios fueron recopilados por Barrantes (2008), los saberes previos hacen referencia a:

> conceptos, fórmulas, algoritmos, creencias asociadas y, en general, a todas las nociones que se considere necesario saber para enfrentarse a un determinado problema. Además, dichos saberes deben ser plenamente identificados por el profesor, lo que implica comprender, con claridad, cuáles son las herramientas a disposición del sujeto que aprende y como accede a los conceptos que tiene. (p. 4)

Revista UNIMAR
Rev. Unimar Julio - Diciembre 2021
e-ISSN: 2216-0116 ISSN: 0120-4327
DOI: https://doi.org/10.31948/Rev.unimar

En cuanto a las formas de representación cognoscitiva de cualquier objeto mental, incluidos los saberes previos, Otero et al., (2016), citando a Johnson Laird, mencionan que existen, al menos, tres: los "modelos mentales, proposiciones e imágenes" (p. 15). En esa línea, Vergnaud (2016), D'Amore, Pinilla, Iori y Matteuzzi (2015), plantean que estas formas de representación están interconectadas de forma similar a un "framework conceptual" (p. 23), lo que implica que conforman una estructura cognoscitiva de redes semánticas, con asociaciones de los contextos de donde emergen los conceptos (D'Amore et al., 2015; Vergnaud, 2016).

Así puede decirse que, en dicha estructura cognoscitiva de redes semánticas, se encuentran integrados los conocimientos de tipo disciplinar y las concepciones (creencias) asociadas (Schoenfeld, citado por Barrantes, 2008; López, 2009). Algunas de estas creencias son el uso innecesario de conceptos, propiedades y procedimientos formales, la irrelevancia de probar la consistencia de reglas personales, el sentido de única respuesta correcta -según la regla del docente-, la concepción memorística de las matemáticas, el trabajo individual y la inmediatez resolutiva sin verificación (Williams y Gómez, 2007; López, 2009). No obstante, gran parte de estas creencias son desarrolladas por el estudiante, como consecuencia del estilo formativo tradicional que refleja las creencias del profesorado (Barrantes, 2008). Por esta razón, los docentes deben generar espacios de autorreflexión de sus concepciones pedagógicas sobre la disciplina, con el fin de reorientar constantemente su enseñanza hacia la identificación de concepciones algebraicas previas y el fomento de la autocrítica formativa.

En cuanto a las investigaciones relacionadas con la resolución de problemas algebraicos, Rojas (2010) argumenta que, para resolver un problema, el estudiante debe hacer transferencia de conceptos, procedimientos, interpretaciones, estrategias aritméticas aplicadas durante experiencias previas en la resolución de problemas, siendo consciente del carácter cuasi general de algunos procesos y procedimientos de resolución.

Cervantes, Mendoza, Peñaloza, Ramírez y Viñas (2011) sostienen que los saberes previos no tienen sentido por sí mismos, sino por la utilidad que tienen en los contextos que los demandan.

Voisin (2011) sostiene que una forma de propiciar la emergencia de los saberes previos, es haciendo tangibles los objetos matemáticos del problema y la cuestión a resolver, de forma que se relacione con la experiencia previa de los estudiantes. Para ello, puede utilizarse materiales analógicos basados en representaciones concretas, pictóricas y abstractas.

Hoyles, Krummheuer, Ciscar, Raig, Potari, Setati y Rodríguez (2012) mencionan que el uso productivo de saberes previos requiere de ambientes de aprendizaje que fortalezcan el desarrollo autónomo de la selección y uso oportuno de dicho recurso cognitivo.

Palarea (2012), y Becerra, Buitrago y Calderón (2014) manifiestan que el sentido de los conocimientos previos para resolver un problema específico, requiere de habilidades metacognitivas que le permitan al resolutor, la autorretroalimentación gradual y autocrítica de procesos o resultados para la producción y consolidación y replicación futura de estrategias. Estos autores plantean que, tras decidir si utilizar o no un concepto previo, se debe cuestionar por qué se necesita y si su uso es indispensable para avanzar.

Conejo y Ortega (2013), Arroyo (2014), Sánchez (2014), Mejía y Londoño (2017) destacan la importancia de expresar en términos aritméticos, la información contenida en el lenguaje natural de un problema; es decir, el estudiante debe poseer habilidades en la modelación aritmética propia de la educación primaria. Asimismo, señalan que la identificación de marcadores lingüísticos en el enunciado es un aspecto clave para traducir el sentido del problema a una forma aritmética o gráfica.

Molina (2014), Lira López y Pérez (2014) e Iriondo-Otxotorena (2016) resaltan que los saberes previos, como constructo de partida en el proceso de resolución de problemas matemáticos y, por supuesto, algebraicos, están integrados en una red cognoscitiva que abarca creencias, conocimientos disciplinares (axiomas, teoremas, propiedades, concepto de variable, incógnita, despeje, constante,

Rev. Unimar Julio - Diciembre 2021
e-ISSN: 2216-0116 ISSN: 0120-4327
DOI: https://doi.org/10.31948/Rev.unimar
Revista UNIMAR

etc.), reglas personales e institucionales de operacionalización, que incluyen los algoritmos de las operaciones básicas, jerarquía de operaciones, etc.

Popayán (2016) y Vega (2016) apuntan al mejoramiento de la comprensión de un problema mediante la búsqueda autónoma de casos particulares o soluciones aritméticas, que, por lo general, se les dificulta menos a los estudiantes y les permite fundamentar el pensamiento simbólico a partir de la interrelación de variables.

Ruiz (2016) y Benavides (2018) argumentan que los saberes previos son un constructo cuya optimización procedimental se obtiene con la práctica orientada por ambientes de aprendizaje, sobre técnicas concretas de identificación de la información clave del problema (variables conocidas y desconocidas) y la selección de conceptos o procedimientos que son pertinentes en una etapa inicial de resolución.

En las estrategias metacognitivas

Para empezar, Osses y Jaramillo (2008), haciendo eco a los estudios de Weinstein y Mayer, definen estrategia metacognitiva como "el conjunto de acciones orientadas a conocer las propias operaciones y procesos mentales, saber utilizarlas y saber readaptarlas y/o cambiarlas cuando así lo requieran las metas propuestas" (p. 191).

Por su parte, según Rocha (2006), las estrategias metacognitivas se refieren a:

> la utilización y adaptación del conocimiento para la gestión de la actividad mental y consiste en predecir, planificar, controlar, regular y verificar esta actividad en la ejecución de una tarea. Su principal manifestación de desarrollo es el control y la regulación aportada constantemente durante la ejecución de una tarea. (p. 58)

Además, Rodríguez (2005) resalta el papel de la heurística y el razonamiento plausible, como una aproximación al razonamiento lógico, como herramientas incluidas en las estrategias metacognitivas en la resolución de problemas, mediante tareas como "elaborar un diagrama donde se representen las afirmaciones del problema, dividir el problema en partes o encontrar un problema relacionado" (p. 36), las cuales permiten formular hipótesis, contraejemplos y técnicas de tanteo, como constructos auxiliares en la creación de enfoques, durante el proceso de resolución de problemas algebraicos.

Hasta este punto, analizando las descripciones sobre el concepto de metacognición recopiladas por Rodríguez (2005), Atenas y Vera (2017), así como de las caracterizaciones referentes a las estrategias metacognitivas de Osses y Jaramillo (2008), Rocha (2006) y Rodríguez (2005), se puede inferir que éstas implican la acción consciente y regulada de una serie de actividades cognitivas representadas en la planeación, regulación y evaluación, para orientar la resolución del problema. Adicionalmente, la heurística y el razonamiento plausible les confieren a dichos componentes metacognitivos, un sentido práctico a través de la ejecución de tareas secundarias, que le permitan al sujeto acercarse progresivamente a la solución del problema algebraico.

Sobre los estudios investigativos de las estrategias metacognitivas en la resolución de problemas algebraicos, Rocha (2006) y Zambrano (2008) argumentan que éstas son una función de las estrategias cognitivas; es decir, del conjunto de recursos cognitivos o saberes previos de los que habla Schoenfeld. En estos mismos estudios se recalca la importancia de los ambientes de aprendizaje para fortalecer los procesos cognitivos como punto de partida para mejorar los procesos metacognitivos.

Klimenko (2009), Ottonello et al., (2011), así como Valencia y Salinas (2019), mencionan que las estrategias metacognitivas incluyen actividades del tipo ensayo-error, reglas empíricas, diagramas, etc., extrapolación de procesos generales que han tenido éxito en problemas anteriormente abordados, así como técnicas no algorítmicas para avanzar en la resolución de un problema.

Troncoso (2013) y Palacios y Solarte (2013) plantean que las estrategias metacognitivas se encuentran integradas por una red de categorías supraordinadas, significados contextuales y etimológicos de un concepto o marca lingüística, imágenes mentales, representaciones semióticas; es decir, saberes previos. Dichos

Rev. Unimar Julio - Diciembre 2021
e-ISSN: 2216-0116 ISSN: 0120-4327
DOI: https://doi.org/10.31948/Rev.unimar
Revista UNIMAR

elementos sustentan los procesos cognoscitivos de planeación, regulación y evaluación.

Arteaga y Macías (2016) mencionan que, como punto de partida del análisis metacognitivo, se debe identificar supuestos textuales, creencias, ideas centrales y secundarias respecto al problema, con el fin de reorientar o dinamizar las concepciones y generar interpretaciones parciales sobre el avance del problema en momentos distintos del mismo.

Duval (2016) indica que la metacognición implica cambiar deliberadamente el lenguaje natural, a otro registro: figural, geométrico, pictórico, etc., para facilitar la comprensión y la construcción de un modelo algebraico que resuelva el problema.

Desoete (2017) plantea que las estrategias metacognitivas implican procesos comprensivos y críticos del pensamiento sobre el análisis realizado a un problema, mediante el parafraseo del enunciado, la cuestión del problema y su representación mediante diferentes formas, con la misma carga semántica que el registro inicial.

Lara (2017) expresa que las estrategias metacognitivas implican, entre otras cosas, el conocimiento consciente y de amplitud paradigmática frente al proceso de traducción de un problema, nemotecnias para traducir del lenguaje verbal a lenguaje algebraico, tales como la asociación de marcas lingüísticas con su respectiva marca algebraica, así como el uso de imágenes mentales. Una forma de potenciar esta habilidad en los estudiantes es, a través de la realización de diarios resolutivos como ejercicio introspectivo de todos los procesos, pensamientos, pasos observables y no observables, ejecutados durante el abordaje de un problema.

Gasco-Txabarri (2017) indica que, en los espacios pedagógicos de aula, el docente debe explicitar una conducta metacognitiva que sirva a los estudiantes como modelo, por medio de diversas técnicas como pensar en voz alta durante la resolución de un problema, verificar la respuesta final, lo cual implica procesos de planeación, regulación y evaluación, organización del lugar y elementos de trabajo. Asimismo, debe indicar cómo priorizar las actividades, mediante autopreguntas, autorrevisión de resultados parciales e instrucciones de autorreforzamiento.

Gutiérrez y Vargas (2020) y Martínez, Sánchez y Pizarro (2020) plantean el alto valor pedagógico de mostrar distintos caminos resolutivos en el abordaje de cierto problema, dado que permite concebir la resolución, no como un proceso algorítmico que conduce de forma secuencial a la respuesta esperada, sino con probabilidad de éxito y fracaso, susceptible de transformación y/o reemplazo.

En la transformación semiótica

A partir del ejercicio de revisión de los aspectos conceptuales vinculantes a este subtema, se encontró que Duval (2006), en su Teoría de Registros de Representación Semiótica considera que, dada una representación inicial, propia de cierto registro, la transformación semiótica se refiere:

> al proceso de tratamiento; es decir, la construcción de otra representación dentro del mismo registro de la representación inicial y al proceso de conversión; esto es, la construcción de la representación en otra representación de otro registro, en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial. (p. 65)

Con referencia a la resolución de problemas algebraicos, Muñoz, Erazo y Marmolejo (2013), en sintonía con Duval (2012), explican que la transformación semiótica es una actividad consciente o inconsciente de todo resolutor de problemas. Además, en los constructos teóricos de Godino et al., (2015) y Duval (2012; 2016), el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática y la teoría de registros de representación semiótica, respectivamente, se plantea el papel fundamental de las operaciones de tratamiento (despeje, mediante el uso de axiomas y propiedades de los números reales) y/o conversión semiótica en los registros natural, algebraico, aritmético, pictográfico y figural, para resolver problemas algebraicos.

No obstante, en los trabajos de Godino, Batanero, Font y Giacomone (2016) y Duval (2012; 2016) no se ha definido funciones semióticas de tratamiento y conversión, con la desagregación didáctica suficiente para la enseñanza y aprendizaje de los estudiantes; hace falta construir un sistema de reglas o funciones semióticas que les permitan realizar

Rev. Unimar Julio - Diciembre 2021
e-ISSN: 2216-0116 ISSN: 0120-4327
DOI: https://doi.org/10.31948/Rev.unimar
Revista UNIMAR

transformaciones semióticas progresivas. Para el caso del procesamiento aritmético y algebraico de las cantidades, una evidencia de la deficiencia en la conceptualización y didáctica de estas funciones semióticas es el tradicional conflicto de los estudiantes en el paso de información dada en registro aritmético a algebraico, consistente en asociar sus propias técnicas inventadas, a aspectos semánticos y sintácticos de la manipulación del lenguaje algebraico, que son la esencia de las transformaciones de tratamiento y conversión (Godino et al., 2015; Duval, 2012; 2016).

En el caso del registro del lenguaje natural o verbal, para un texto *n*, no existe una regla de transformación que permita obtener otra representación en el mismo registro y semánticamente equivalente (ej. la reconstrucción personal del problema y la recuperación de información explicita e implícita); es decir, no se ha clarificado las funciones semióticas de tratamiento en lenguaje natural, siendo especialmente importantes, puesto que orientarían el desarrollo de procesos analíticos con información de partida de un enunciado o problema algebraico, para la construcción de interpretaciones, información útil para hallar investigaciones que orienten al sujeto sobre las subsiguientes estrategias a utilizar.

Respecto a los estudios sobre el tema de transformación semiótica en la resolución de problemas algebraicos, se tiene en primera instancia a Rodríguez, Barría, Chavarría y la Universidad del Bío-Bío – Escuela de Pedagogía en Educación Matemática, Chile (2010), quienes mencionan que los procesos de conversión y tratamiento en la transformación semiótica implican funciones semióticas para identificar los marcadores en lenguaje natural propios del contexto donde se encuentran, para tipificar y cuantificar las relaciones entre dichas variables.

Guzmán (2010) explicita que el proceso de conversión en la resolución de problemas algebraicos implica la coordinación de dos o más registros semióticos; es decir, el registro en el cual está planteada la pregunta y, el registro algebraico, pictórico-geométrico o gráfico. Ricaldi (2013) plantea la necesidad de aprender a modelar en el lenguaje aritmético, como un aprendizaje precursor de las construcciones o modelos algebraicos.

Olmedo, Galíndez, Peralta y Di Bárbaro (2015) enfatizan que los operadores son más que un algoritmo o acción cuantitativa (una representación en acto): representan un concepto (objeto) que debe comprenderse, para dinamizar la transformación semiótica (Vergnaud, 2016; Duval, 2016).

Godino et al., (2015) han desarrollado desde 1992, un constructo teórico denominado Enfoque Ontosemiótico de la cognición en instrucción matemática (EOS) que sintetiza y profundiza otros aportes teóricos, tales como la teoría antropológica de lo didáctico, de Chevallard, la teoría de los campos conceptuales, de Vergnaud y la teoría de registros de representación semiótica, de Duval. Con base en estos autores, el EOS sostiene que los aspectos específicos de la transformación semiótica son las funciones semióticas, las concepciones personales, institucionales, conceptos, práctica matemática, representaciones y registros semióticos. Al respecto, dichos autores manifiestan que el proceso didáctico de la transformación semiótica requiere del tránsito, desde la concepción personal hasta los significados institucionales de un objeto matemático, entendidos ambos en términos de un sistema de prácticas como objeto de análisis para la resignificación didáctica. En el ámbito algebraico, proponen tres niveles de algebrización que, en el nivel educativo secundario son: Concepción y generación de cantidades generales; Sentido de proporcionalidad y, Resolución de problemas mediante el planteamiento de ecuaciones del tipo $Ax + B = C$ y $Ax + B = Cx + D$, con A, B, C, D constantes, siendo x la variable (Godino et al., 2015).

Erazo y Muñoz (2014), así como García (2015) sostienen que, en los procesos de conversión y tratamiento en la resolución de problemas algebraicos, existe una relación con la construcción, interpretación y valoración del significado de conceptos del lenguaje ordinario, dado que la riqueza semántica que se tiene de los mismos, determina la diversidad de representaciones realizables de cierta idea, para comprenderla mejor.

Duval (2012; 2016), quien desarrolló su Teoría de Registros de Representación Semiótica, menciona que en ella se encuentran implicados los registros y representaciones de objetos lingüísticos y funciones semióticas. Asimismo,

Rev. Unimar Julio - Diciembre 2021
e-ISSN: 2216-0116 ISSN: 0120-4327
DOI: https://doi.org/10.31948/Rev.unimar
Revista UNIMAR

sus procedimientos centrales son la conversión y el tratamiento. Además, menciona que no existe claridad didáctica respecto a la diferencia entre el objeto y su representación; por lo tanto, propone construir espacios didácticos que permitan dicha distinción, mediante la construcción de múltiples representaciones de un mismo objeto matemático.

Castro Araujo (2017) sostiene que, en procesos de generalización, los estudiantes no ven la necesidad de utilizar el lenguaje algebraico o simbólico, como tampoco evidencian los aspectos clave que esclarecen la relación entre variables y poseen incorrecciones en el despeje de incógnitas y operaciones algebraicas en el parafraseo de cierto problema algebraico.

Prada, Hernández-Suárez y Jaimes (2017), Navia Ordóñez (2017), así como Rojas y Salazar (2018), plantean que la transformación de conversión implica expresar una función en diferentes representaciones: verbal, tabla y/o gráfica, a la algebraica.

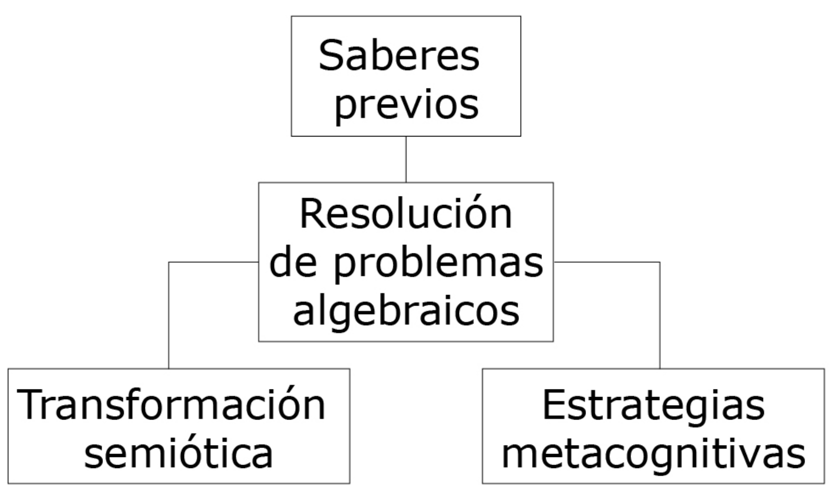
Ospina y Reyes (2018) sostienen que los estudiantes no dominan las funciones semióticas de conversión, pues les cuesta identificar un problema cuando una cantidad es negativa o positiva; por ejemplo, si el enunciado dice: 'hace 10 años, o dentro de 10 años', los alumnos se confunden y no hacen la diferencia al momento de plantearse alguna ecuación, por lo que muchas veces, incluso, llegan a encontrar cantidades o, específicamente, edades negativas; es decir, no tienen en cuenta la pertinencia de la solución.

Castellanos-Muñoz, Amaya y Sgreccia (2019), así como Mercado y Gil (2019), especifican que la transformación de tratamiento en la resolución de problemas algebraicos se evidencia en los procesos de comprensión a nivel intrarregistro: natural, pictórico y algebraico, que incluye la construcción de representaciones en procedimientos de despeje de ecuaciones, donde los axiomas y propiedades que los justifican, corresponden a las funciones semióticas que hacen posibles dichas transformaciones.

Con base en la revisión de las investigaciones relacionadas, se elaboró un mapa mental que sintetiza las tendencias investigativas en la temática, según su papel en el proceso de resolución de problemas, el cual consta del tópico general, a saber: resolución de problemas algebraicos (Figura 1) y de los tres componentes temáticos desglosados (Figuras 2, 3, 4).

Figura 1

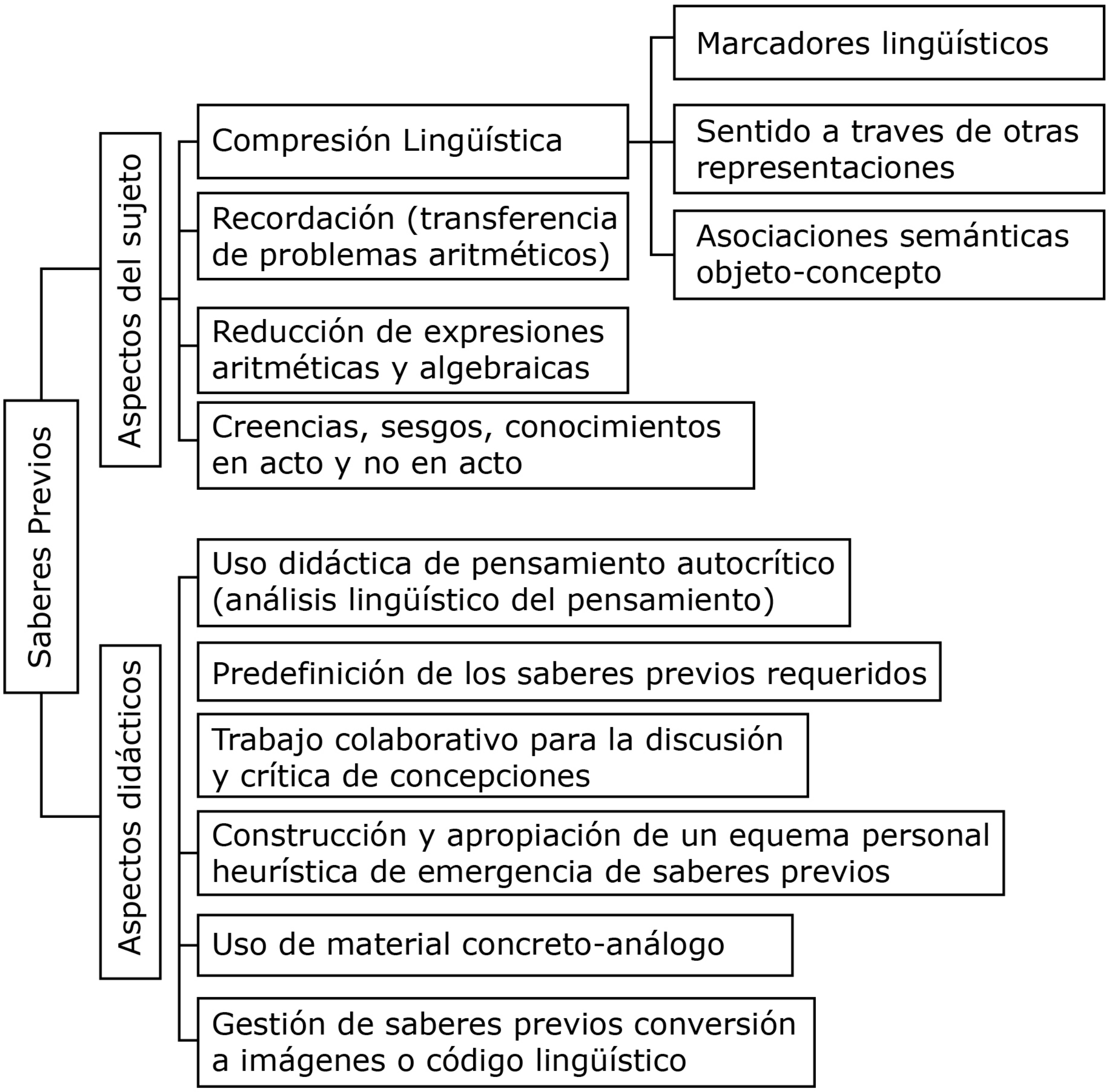
Componentes cognoscitivos en la resolución de problemas algebraicos



Nota: el gráfico presenta la desagregación conceptual-procedimental de los macro aspectos relacionados en la resolución de problemas algebraicos. Fuente: elaboración propia (2020).

Rev. Unimar Julio - Diciembre 2021
e-ISSN: 2216-0116 ISSN: 0120-4327
DOI: https://doi.org/10.31948/Rev.unimar
Revista UNIMAR

Figura 2
Elementos definitorios de los saberes previos

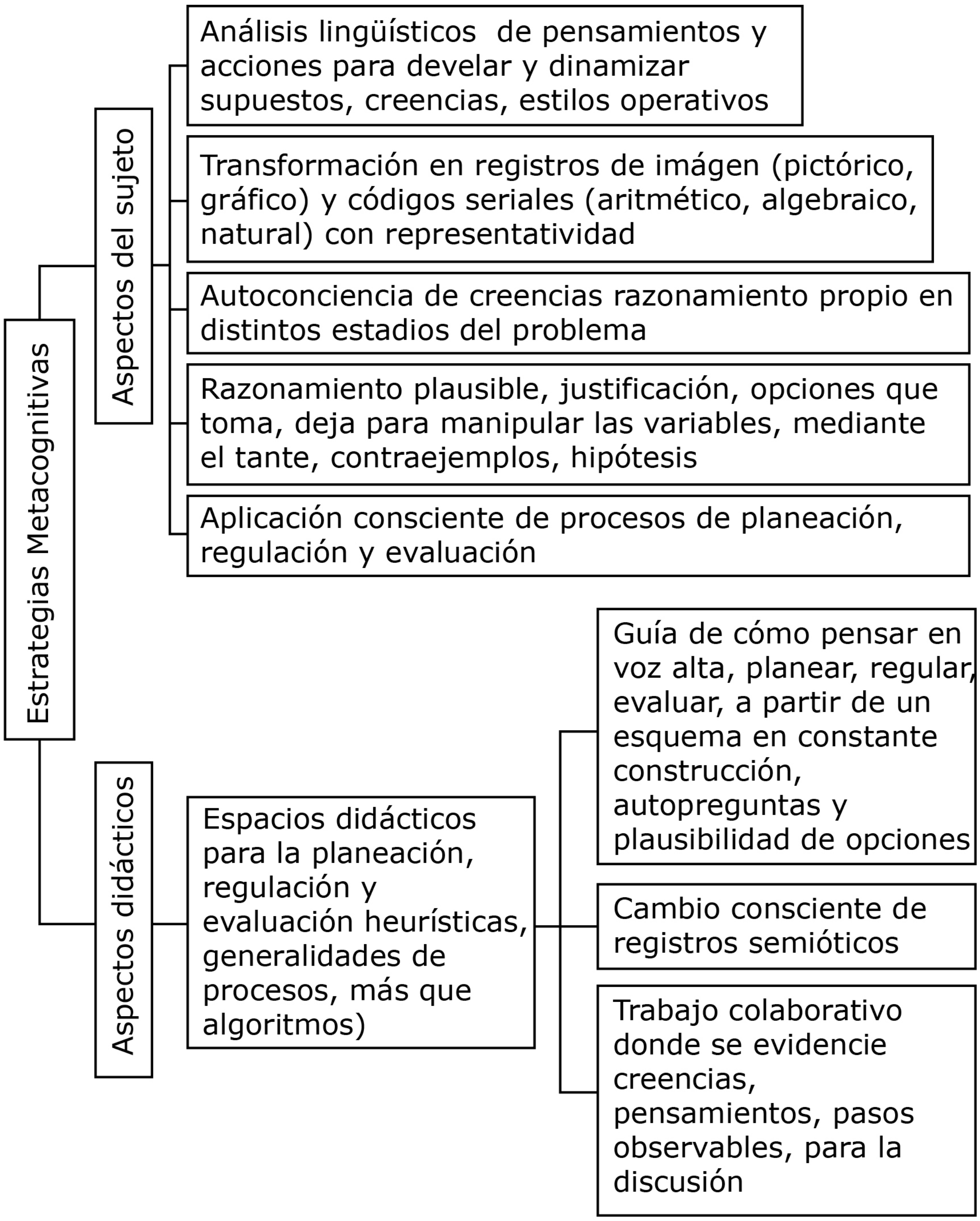


Nota: el gráfico presenta los aspectos característicos que se pone en juego en la emergencia de los saberes previos, en el contexto de un problema algebraico. Fuente: elaboración propia (2020).

Rev. Unimar Julio - Diciembre 2021
e-ISSN: 2216-0116 ISSN: 0120-4327
DOI: https://doi.org/10.31948/Rev.unimar
Revista UNIMAR

Figura 3

Elementos definitorios de las estrategias metacognitivas

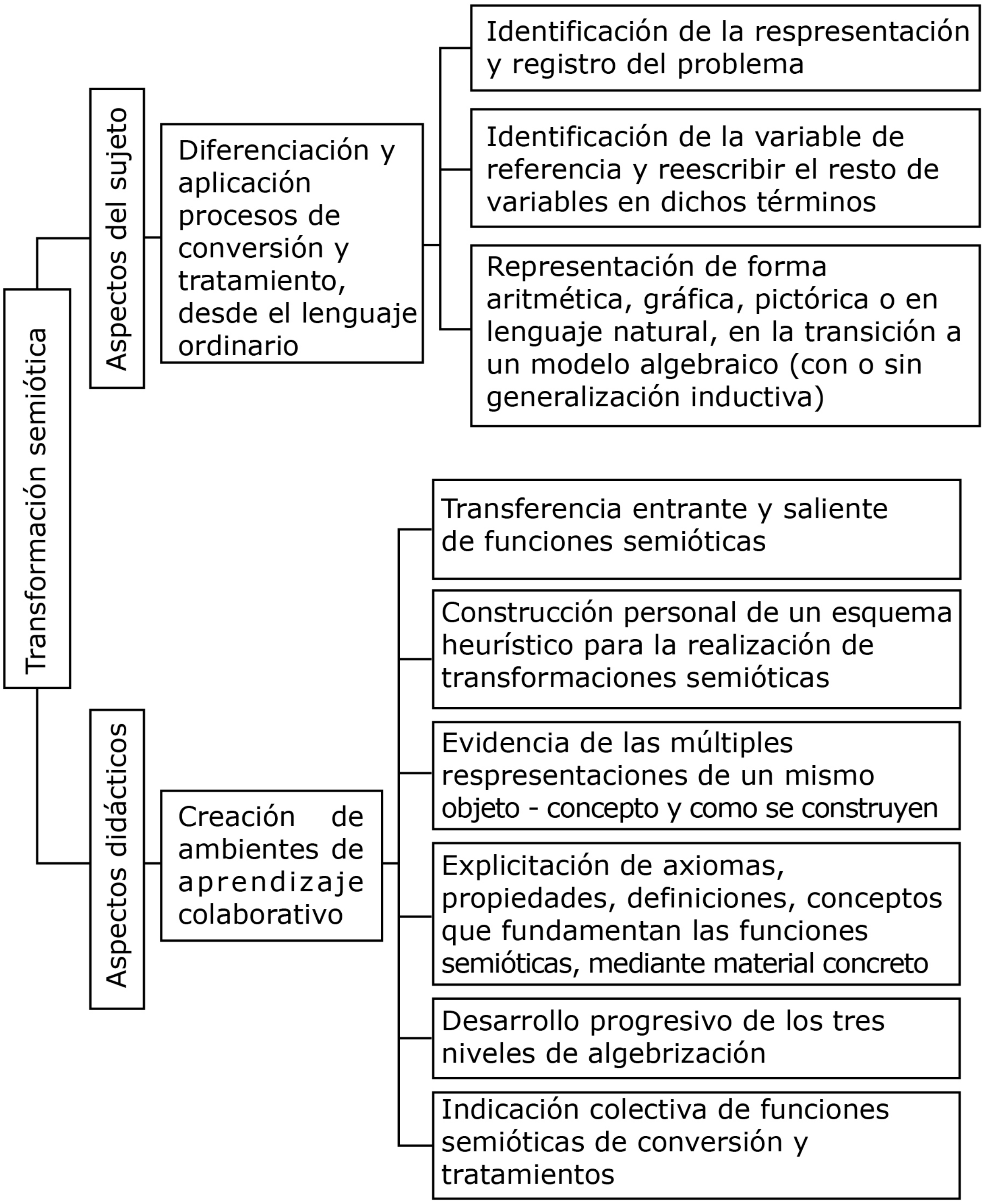


Nota: el gráfico presenta los aspectos característicos que se pone en juego en la caracterización de las estrategias metacognitivas, en el contexto de un problema algebraico. Fuente: elaboración propia (2020).

Rev. Unimar Julio - Diciembre 2021
e-ISSN: 2216-0116 ISSN: 0120-4327
DOI: https://doi.org/10.31948/Rev.unimar

Figura 4

Elementos definitorios de la transformación semiótica



Nota: el gráfico presenta los aspectos característicos que se pone en juego en la interpretación de la transformación semiótica en el contexto de un problema algebraico. Fuente: elaboración propia (2020).

En los estudios revisados se observa que las investigaciones relacionadas con la comprensión de los aspectos implicados en los saberes previos, estrategias metacognitivas y transformación semiótica, fueron desarrolladas con base en el paradigma cualitativo, con enfoque interpretativo, sociocrítico, de carácter descriptivo-interpretativo, etnometodológico y, tipo de diseño investigación acción participativa. En cuanto a las técnicas e instrumentos de recolección de datos, se utilizó los

Revista UNIMAR
Rev. Unimar Julio - Diciembre 2021
e-ISSN: 2216-0116 ISSN: 0120-4327
DOI: https://doi.org/10.31948/Rev.unimar

cuestionarios, guías de observación, guiones de entrevistas semiestructuradas, pruebas escritas y grabaciones audiovisuales.

Sobre las tendencias evidentes en la revisión de la literatura en la categoría de saberes previos, puede afirmarse que estos se refieren a conceptos, fórmulas, algoritmos, creencias asociadas, integradas en modelos mentales, proposiciones e imágenes, que se encuentran interconectadas de manera análoga a una red conceptual (Otero et al., 2016; Vergnaud, 2016; D'Amore et al., 2015). Esta red semántica es un constructo estructurado con conceptos, procedimientos asociados a dichos conceptos y sesgos, en torno a un objeto de conocimiento. Entre los sesgos más comunes destaca la tendencia a considerar innecesario el uso de conceptos, propiedades y procedimientos formales, así como la irrelevancia de identificar, construir una estructura lógica personal y aplicarla recurrentemente en los razonamientos. Además, los estudiantes tienden a creer que existe un solo procedimiento resolutivo correcto (el del docente); poseen una concepción memorística de las matemáticas; no ven necesario verificar procesos; hay ausencia del sentido de los procedimientos y modelos algebraicos por sí mismos (su sentido se vincula exclusivamente al conocimiento experiencial relacionado con la situación problema del que se deriva).

Una forma de visibilizar lo anterior y realizar las modificaciones paradigmáticas pertinentes (no solamente en lo que a sesgos se refiere, sino a conceptos y teoremas en acto) es retomar la resolución de problemas aritméticos, especialmente los que inducen razonamientos y procesos de tipo algebraico (axiomas, teoremas, propiedades de números reales, propiedades de la igualdad, concepto de variable, constante, despeje, transposición de términos) con los estudiantes, en un proceso de reflexión colectiva en torno a la transición de la aritmética al álgebra.

Con relación a las tendencias sobre la categoría de estrategias metacognitivas, éstas son definidas como "el conjunto de acciones orientadas a conocer las propias operaciones y procesos mentales, saber utilizarlas y saber readaptarlas y/o cambiarlas cuando así lo requieran las metas propuestas" (Osses y Jaramillo, 2008, p. 191). "Dicha gestión cognoscitiva se describe mediante procesos de planeación, regulación y control" (Rocha, 2006, p. 58). Asimismo, las estrategias metacognitivas están integradas por una red de categorías supraordinadas y, parten de significados contextuales y etimológicos de un concepto o marca lingüística, imágenes mentales, representaciones semióticas; es decir, de saberes previos (supuestos textuales, creencias, ideas centrales y secundarias, respecto al problema). Dichos elementos permiten construir y reconstruir los procesos cognoscitivos de planeación, regulación y evaluación, que conlleva la producción de heurísticas para resolver cierto tipo de problemas, desarrollo de formas de razonamiento plausible, actividades de tanteo, etc., evaluación de autoconcepciones, etc. (Barrantes, 2008; Troncoso, 2013; Palacios y Solarte, 2013). Además, una estrategia didáctica para la identificación y desarrollo de habilidades de pensamiento metacognitivo es, construir diarios de resolución lo más específicos posibles que describan completamente lo que ocurre en el pensamiento cuando resuelve problemas. Para ello, el docente debe simular dicha conducta metacognitiva, utilizando el pensamiento en voz alta, finalizando con la reflexión, validez y factibilidad del resultado y la eficiencia de los procedimientos empleados (Gasco-Txabarri, 2017).

Asimismo, en la revisión de la literatura relacionada para develar las tendencias en la categoría de transformación semiótica se observa que ésta comprende procesos de tratamiento y conversión entre los registros natural, algebraico, pictórico-geométrico y gráfico (Duval, 2012; 2016). El primer proceso se refiere a la construcción de otra representación dentro del mismo registro de la representación inicial; el segundo, a la construcción de la representación en otra representación de otro registro, en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial (Duval, 2012; 2016).

Respecto a las operaciones de tratamiento, comprenden procesos asociados al despeje de variables mediante el uso de axiomas y propiedades de los números reales. Por su parte, las operaciones de conversión semiótica implican procesos relacionados con la modelación,

Rev. Unimar Julio - Diciembre 2021
e-ISSN: 2216-0116 ISSN: 0120-4327
DOI: https://doi.org/10.31948/Rev.unimar
Revista UNIMAR

generalización, representaciones gráficas y figurales. No obstante, no debe olvidarse que las operaciones de transformación semiótica, en este caso, los operadores son objetos, por lo que no puede reducirse a su representación, sino al concepto en su extensión, el cual debe tener claro el estudiante para concebir y construir posibles rutas alternativas de transformación semiótica (Vergnaud, 2016; Duval, 2016). Por último, en el ámbito algebraico, en el marco de la educación secundaria, actualmente se trabaja con tres niveles de algebrización: 1) sentido de proporcionalidad, concepción y representación simbólica de cantidades desconocidas; 2) resolución de problemas mediante el planteamiento de ecuaciones del tipo Ax + B = C y, 3) resolución de problemas mediante el planteamiento de ecuaciones del tipo Ax + B = Cx + D, con A, B, C, D constantes, siendo x la variable (Godino et al., 2015).

De esta manera, los puntos de encuentro entre las categorías temáticas existen de forma natural pues, en la transición del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico, se pone en juego funciones semióticas que permiten transformar el estado de conocimiento inicial o saberes previos a estados progresivos que culminen con la solución del problema (Kieran y Filloy, 1989; Duval, 2016). Asimismo, las estrategias metacognitivas permitirán la realización de un análisis crítico del proceso anterior, así como las técnicas utilizadas durante y después de superar obstáculos resolutivos, para derivar nuevas interpretaciones, rutas más efectivas e implicaciones susceptibles de transferirse al análisis, comprensión y resolución de la familia de problemas algebraicos de estructura similar (Rodríguez, 2005; Rocha, 2006; Zambrano, 2008; Klimenko, 2009; Iriarte, 2011; Godino et al., 2012; Duval, 2016; Lara, 2017; Gasco-Txabarri, 2017).

Respecto a los vacíos de conocimiento, cabe mencionar la ausencia de un modelo de resolución de problemas más o menos general, donde se describa el funcionamiento articulado de las categorías temáticas con las características de una red semántica o marco conceptual, a estilo de Vergnaud (2016). En el caso de querer construir un modelo de resolución de problemas, primero se debe clarificar las funciones semióticas para el procesamiento aritmético y algebraico de las cantidades, cuyo vacío se evidencia por el tradicional conflicto de los estudiantes en el paso de información dada en registro aritmético a algebraico o, a las transformaciones propias del registro algebraico (procesos en la resolución de ecuaciones, propiedades inferibles de ciertas expresiones, a partir de leyes algebraicas) características del desarrollo del pensamiento algebraico, absolutamente necesario para resolver problemas de esta naturaleza (Usiskin, citado por Ramos y Casas, 2017).

Además, en los trabajos investigativos aquí expuestos, producto de la revisión bibliográfica, así como en las teorías sustantivas relacionadas, no se ha clarificado y definido los atributos procedimentales de una función semiótica de tratamiento en lenguaje natural (Rodríguez y Abad, 2011). Esto es especialmente importante dado que, una función de este tipo facilitaría la construcción de interpretaciones y consideración de información de partida de un enunciado o problema algebraico, útil para hallar investigaciones que orienten al sujeto sobre las subsiguientes estrategias a utilizar y procedimientos a seguir.

Adicionalmente, no existe una caracterización y tipificación de los problemas algebraicos en orden de dificultad, según el requerimiento en cantidad y tipo de saberes previos, estrategias metacognitivas y transformación semiótica, para construir niveles didácticos de aprendizaje progresivos. Asimismo, hace falta profundizar en tareas operativas más elementales que componen las heurísticas metacognitivas, para facilitar su enseñanza - aprendizaje, la construcción y delimitación operacional de ciertas funciones semióticas de tratamiento y conversión, así como la estructuración de los mencionados componentes implicados en la resolución, en una red semántica cognoscitiva ideal (Rodríguez, 2005; Rocha, 2006; Palacios y Solarte, 2013; Moreno y Daza, 2014; Gasco-Txabarri, 2017).

Por esta razón a continuación, se describe los avances en la comprensión y clarificación conceptual del funcionamiento articulado de los saberes previos, estrategias metacognitivas y transformación semiótica en la resolución de problemas algebraicos.

Rev. Unimar Julio - Diciembre 2021
e-ISSN: 2216-0116 ISSN: 0120-4327
DOI: https://doi.org/10.31948/Rev.unimar

Resolución de problemas algebraicos

A partir del análisis realizado por Raynaudo y Peralta (2017) sobre los métodos y paradigmas existentes en la resolución de problemas algebraicos, puede afirmarse que estos adolecen de técnicas que permitan discriminar, con total certeza, el conjunto de objetos epistémicos, propio de los saberes previos, estrategias metacognitivas y transformación semiótica, necesarios para realizar avances epistémicos progresivos. Con todo lo anterior, entre los métodos más utilizados para resolver problemas, destacan el de Piaget y Polya. Enseguida, se presenta una síntesis de la propuesta piagetiana:

Tabla 1

Método de Resolución de Problemas, propuesto por Piaget

1. Encadenamiento hacia atrás
Atención hacia el objetivo estático; trata de deducir un estado precedente hacia el cual el objetivo pudo haber derivado; luego un estado desde el cual puede haber derivado y así sucesivamente hacia atrás, hasta llegar al planteamiento original del problema. En síntesis, un problema puede derivar en muchos otros problemas.
2. Prueba sistemática y error
Consiste en una prueba recursiva de posibles soluciones sistemáticamente y el refinamiento de los resultados. La aplicación de la estrategia de esta prueba sistemática y del error es un importante determinante en la habilidad operacional formal.
3. Representación alternativa
Esta técnica requiere la conceptualización de un problema desde diferentes perspectivas y registros lingüísticos distintos.
4. Analogía
Implica el descubrimiento de una similitud particular entre dos aspectos aparentemente distintos, quizá de contextos distintos, pero que poseen un aspecto estructural común que permite incluirlos en una categoría y, por tanto, que se los trate de forma parecida.

Fuente: adaptado de Saldarriaga-Zambrano, Bravo-Cedeño y Loor-Rivadeneira (2016).

Así, para Piaget, la resolución de problemas es un proceso cualitativo-cuantitativo no algorítmico, en el que se aplica heurísticas (análisis, síntesis, multirrepresentaciones), con costos y beneficios a los recursos cognitivos de partida y, emergentes para la construcción progresiva de nuevo conocimiento, hasta obtener nuevos recursos cognitivos (de llegada).

Por su parte, George Polya (1989), con un enfoque claramente educativo, plantea que la resolución de problemas "exige la búsqueda, mediante una acción adecuada, de un objetivo que no es inmediatamente alcanzable" (p. 12). Asimismo, propuso un método heurístico de resolución de problemas, estructurado con los siguientes pasos:

1. Comprender el problema
2. Concebir un plan
   2.1 Determinar la relación entre los datos y la incógnita
   2.2 De no encontrarse una relación inmediata, son considerados problemas auxiliares
   2.3 Obtener finalmente un plan de solución
3. Ejecución del plan
4. Examinar la solución obtenida. (p. 13)

Rev. Unimar Julio - Diciembre 2021
e-ISSN: 2216-0116 ISSN: 0120-4327
DOI: https://doi.org/10.31948/Rev.unimar
Revista UNIMAR

Ahora bien, desde la perspectiva de Godino et al., (2012; 2015), Duval (2006; 2016), Vergnaud (2016) y D'Amore (2012), en la resolución de problemas algebraicos está el sujeto epistémico con un esquema de objetos, conceptos y procedimientos matemáticos del plano propio e institucional, de tipo elemental, sistémico; extensivo, intensivo; ostensivo, no ostensivo; de expresión y de contenido, utilizados como mediadores, para generalizar o particularizar situaciones, en un proceso de coordinación, planificación, organización, supervisión, control, regulación y revisión, evaluación, hasta obtener una nueva representación (la solución del problema) (D'Amore, 2012; Godino et al., 2015; Duval, 2016; Vergnaud, 2016).

Llegado a este punto, puede decirse que la resolución de problemas algebraicos se entiende como un proceso de varias etapas procedimentales que pueden ser traslapadas o, que ocurren simultáneamente y que son susceptibles de aplicarse de forma continua, en cada obstáculo cognoscitivo parcial que se presenta desde el planteamiento hasta la resolución de un problema: 1) Comprensión del asunto problema; 2) Recordación o emergencia de criterios y estrategias de resolución; 3) Selección y uso de los objetos algebraicos personales e institucionales (recursos cognitivos o saberes previos) y, 4) Procesamiento y transformación semiótica de los elementos de partida del problema, hasta obtener el constructo solución (D'Amore, 2012; Godino et al., 2012; D'Amore et al., 2015; Godino et al., 2015; Duval, 2016; Vergnaud, 2016).

Retomando el hecho de la simultaneidad y traslape de las categorías temáticas, cabe aclarar que la definición de éstas se hace con el propósito de aprehender procesos operacionales esenciales en la resolución de problemas algebraicos, más que establecer límites o exclusiones teórico-prácticas entre uno y otro, toda vez que éstas se complementan. Incluso, un problema no puede ser solucionado si estas categorías no están entrelazadas procesual y operacionalmente.

Bajo este entendimiento, desde una perspectiva didáctico-algebraica, Socas (2011) da a entender que la comprensión del proceso de transición del pensamiento aritmético (vinculado a los saberes previos) al pensamiento algebraico (producto de la transformación semiótica) por parte de los estudiantes, donde las estrategias metacognitivas inducen la emergencia de nuevos paradigmas de los procesos transformacionales, permite visibilizar en contexto, los procesos característicos del funcionamiento articulado de los saberes previos, estrategias metacognitivas y transformación semiótica.

De forma complementaria, Filloy y Rojano (1989) señalan que el proceso de transición de la aritmética al álgebra puede convertirse en un momento valioso de aprendizaje para analizar cómo los estudiantes de niveles educativos pre-algebraicos interpretan un enunciado problema; es decir, cómo recaban información para construir modelos aritméticos, la forma de concebir, operar con dichos modelos aritméticos, con posibles representaciones de esos números y generalizaciones de acuerdo con los elementos conceptuales y procedimentales que describen la actividad algebraica. Según Usiskin (citado por Ramos y Casas, 2017): "procedimientos para resolver problemas, aritmética generalizada, lenguaje para el estudio de las relaciones existentes entre cantidades que varían, estudio de estructuras algebraicas" (p. 34).

Entonces, desde una visión integradora de las tendencias de las categorías temáticas, se plantea que el fortalecimiento de la habilidad de resolución de problemas algebraicos debe empezar con actividades específicas de la resolución de problemas aritméticos. Para ello, debe elegirse adecuadamente los tipos de problemas a utilizar, que favorezcan la emergencia de la actividad algebraica, según Usiskin (citado por Ramos y Casas, 2017), Puig (2014) y Kieran y Filloy (1989), a saber: el desarrollo de modelos aritméticos para resolver problemas, problemas que induzcan al planteamiento de ecuaciones aritméticas que permitan una reflexión analítica sobre las propiedades de los números reales y de la igualdad, generalización de números, reducción de expresiones o miembros de ecuaciones aritméticas (con base en propiedades de números reales), uso del lenguaje simbólico (representacional) y el estudio de ecuaciones algebraicas, con base en la transferencia del modo de reducir y verificar las ecuaciones aritméticas, por parte de los alumnos.

Rev. Unimar Julio - Diciembre 2021
e-ISSN: 2216-0116 ISSN: 0120-4327
DOI: https://doi.org/10.31948/Rev.unimar
Revista UNIMAR

Llegados a este punto, se presume que existe una definición más o menos estable sobre lo que es un problema algebraico, aritmético y aritmético-algebraico, con el fin de construir y/o seleccionar los adecuados, para favorecer la transición de la aritmética al aprendizaje del álgebra en los estudiantes. Con relación a lo anterior, Puig y Cerdán (1990) identifican al menos cuatro posibles vías para tratar de analizar el carácter aritmético o algebraico de un problema verbal:

> Analizar libros de texto, identificando en qué temas se propone, así como las estrategias de resolución que se presentan, examinar soluciones de alumnos, examinar respuestas de alumnos conocedores de las técnicas algebraicas, pero a los que se les impide usarlas, analizar lo que se denomina 'proceso de traducción' o 'texto intermedio'. (p. 41)

Asimismo, Cerdán (2008) plantea que "hay un tipo de problemas verbales que parecen obligar al uso del razonamiento algebraico para poder resolverlos" (p. 48); no obstante, aún no existe una definición y caracterización de los tipos de problema, según sean aritméticos puros, algebraicos puros o aritmético-algebraicos, lo suficientemente abarcadora, que sea aceptada por los investigadores del tema. Por ende, a medida que estas nociones sobre el concepto de problema sean clarificadas, se entiende que mejorará el proceso de selección de los problemas de uso didáctico que permitan crear ambientes de aprendizaje para fortalecer la habilidad de resolución de problemas algebraicos a partir del análisis colectivo (docentes y estudiantes) de los subprocesos cognoscitivos implicados en la transición de la aritmética al álgebra.

Funcionamiento articulado de saberes previos, estrategias metacognitivas y transformación semiótica en la resolución de problemas algebraicos

La teoría del EOS hace clara referencia a los saberes previos, como un acervo cognitivo del sujeto, compuesto de saberes del plano personal, que incluyen conocimientos subjetivos y creencias, así como de saberes institucionales, siendo la práctica matemática, producto de la integración de ambos tipos de saberes (Godino, 2012; Godino et al., 2015).

Ahora bien, el 'tránsito cognoscitivo' durante la ruta resolutiva de cierto problema algebraico, se concreta con las funciones semióticas que el sujeto puede establecer, para obtener nuevas representaciones de los objetos matemáticos. Estas funciones semióticas son reguladas y resignificadas por las estrategias metacognitivas, previo proceso de revisión y selección de saberes previos, tanto para asegurar que se va en la dirección correcta, según los fines del problema, como para favorecer el dinamismo paradigmático (Duval, 2016). Algunas herramientas específicas de las estrategias metacognitivas se refieren al pensamiento metafórico, analógico, plausible, así como a procesos de particularización, generalización, transferencia, contextualización, descontextualización, cambios de representación, etc. (Godino et al., 2017).

Adicionalmente, Duval (2006; 2016) señala que los objetos matemáticos tienen diferentes registros de representación, tales como: "registro verbal, registro tabular, registro gráfico, registro algebraico, registro simbólico y registro figural" (p. 18). Todos estos remiten a un objeto o concepto matemático y, por ende, "a un significado, por lo que cada vez que se construye un significado, en realidad se está realizando transformaciones semióticas" (Duval, 2016, p. 68).

En síntesis, puede afirmarse que la relación entre los saberes previos, estrategias metacognitivas y transformación semiótica para la resolución de problemas algebraicos, es la siguiente: las estrategias metacognitivas dinamizan y regulan las funciones semióticas, donde los saberes previos representan los valores de partida y las transformaciones semióticas, los valores de llegada, durante un proceso operativo y sistemático de la función semiótica, hasta obtener la transformación *n,* que se constituye en la solución del problema.

3. Conclusiones

Si bien las tendencias metodológicas en investigaciones en el campo de la resolución de problemas desde los ámbitos internacional, nacional y local, presentan diversidad de metodologías, en los estudios de saberes

Rev. Unimar Julio - Diciembre 2021
e-ISSN: 2216-0116 ISSN: 0120-4327
DOI: https://doi.org/10.31948/Rev.unimar
Revista UNIMAR

previos se encontró que son desarrolladas con la metodología cualitativa orientada al ámbito educativo, utilizando como instrumentos principales, pruebas escritas y grabaciones audiovisuales. En las investigaciones acerca de las estrategias metacognitivas, la metodología predominante es la mixta, con dominancia cualitativa cuantitativa, con una orientación claramente educativa y utilizando un grupo experimental y otro de control. Asimismo, los instrumentos utilizados consisten en cuestionarios ya validados y estandarizados por autores expertos en metacognición, estructurados con los componentes de planeación, regulación y control, sometiéndolos al análisis con técnicas estadísticas. Finalmente, en los análisis de la variable/categoría transformación semiótica, se observa que la tendencia metodológica es mixta, con enfoque educativo, utilizando como instrumentos, las pruebas escritas, orales, así como el uso de registros audiovisuales para la recolección de la información, a través de los cuales se interpreta el comportamiento de los estudiantes.

Toda esta perspectiva de estudios respecto a las dimensiones de saberes previos, estrategias metacognitivas y transformación semiótica, aunque muestran una diversidad metodológica, pocos desarrollan estudios plurimetódicos o de multimétodos con enfoques mixtos para apoyar resultados cuantitativos o cualitativos por complementación y así fortalecer los análisis en la resolución de problemas algebraicos. Además, cabe destacar que la tendencia en el tipo de problemas algebraicos abordados en estas investigaciones, son los modelables a través de ecuaciones de primer grado. Asimismo, la tendencia referente a los aportes de dichas investigaciones al presente estudio, se orienta a la construcción de ambientes de aprendizaje que fragmenten los procesos implicados de conocimiento del significado de signos y en las transformaciones de conversión y tratamiento, para resolver problemas algebraicos en un entorno colaborativo.

Desde la perspectiva del sujeto resolutor, a partir de las tendencias de los saberes previos, estrategias metacognitivas y transformación semiótica, como categorías conceptuales del proceso resolutivo, se puede afirmar que, para superar cada obstáculo cognoscitivo percibido durante el proceso resolutivo, es necesario comprender el asunto problema, recordar criterios y estrategias de resolución, seleccionar y utilizar objetos algebraicos personales e institucionales (recursos cognitivos o saberes previos) y transformar semióticamente el estado de conocimiento inicial del problema, mediante la superación constante de obstáculos cognoscitivos, hasta llegar a su solución (Duval, 2006; Rodríguez et al., 2010; Guzmán, 2010; Ricaldi, 2013; García, 2015; Gasco-Txabarri, 2017; Cutimbo y Mendoza, 2018; Castellanos-Muñoz et al., 2019).

Ahora bien, desde el aspecto didáctico se mencionó que, en lugar de emitir juicios de valor contra un razonamiento, procedimiento o paso ejecutado por el estudiante en un problema concreto y corregirlo, más bien debe tomarse como objeto de investigación educativa, la estructura de la red semántica cognoscitiva en la resolución de dicho problema, pues este ejercicio le permitirá al docente comprender el estilo de razonamiento del estudiante y, en un ejercicio dialógico, inducirlo a identificar por sí mismo los absurdos, inconsistencias y contradicciones, con el fin de propiciar el descubrimiento y perfectibilidad de la propia estructura cognoscitiva (Palarea, 2012; Becerra et al,, 2014). Desde el aspecto didáctico-algebraico se apunta al análisis investigativo del proceso de transición de procesos aritméticos a procesos algebraicos, mediante la visibilización en contexto de los procesos característicos del funcionamiento articulado de los saberes previos, estrategias metacognitivas y transformación semiótica en su ambiente natural de aprendizaje (Socas, 2011).

Por lo anterior, las nuevas investigaciones sobre resolución de problemas algebraicos deben estar enfocadas en la delimitación de los problemas en función del nivel de abstracción del razonamiento y lenguaje utilizado en la resolución (problema aritmético, algebraico, aritmético-algebraico), así como en la caracterización y selección de problemas didácticamente útiles, cuyo lenguaje sea comprensible por el estudiante, para favorecer el funcionamiento articulado de las categorías temáticas en el fortalecimiento progresivo de la habilidad de resolución, así como el dominio conceptual y operacional de los conceptos

Rev. Unimar Julio - Diciembre 2021
e-ISSN: 2216-0116 ISSN: 0120-4327
DOI: https://doi.org/10.31948/Rev.unimar
Revista UNIMAR

algebraicos, evitando conflictos semióticos a nivel de tratamiento y conversión en el registro algebraico. Además, se debe aunar esfuerzos investigativos para conceptualizar y caracterizar una función semiótica de tratamiento en lenguaje natural; es decir, una regla de transformación que permita obtener otra representación en el mismo registro y semánticamente equivalente (ej. heurísticas o reglas para comprender -reconstruir personalmente- el problema, pues éste es el primer paso para avanzar en la resolución) (Rodríguez y Abad, 2011).

Por último, se sugiere generar modelos plausibles de resolución con los mismos estudiantes a partir del abordaje de problemas algebraicos, que conlleve la construcción colectiva de un modelo de resolución inductivo con la mayor desagregación conceptual y operacional de funciones semióticas para generar transformaciones de conversión y tratamiento entre registros, a partir de saberes previos, todo ello mediado por actividades metacognitivas. Luego de su construcción, debe articularse el nuevo constructo a los currículos institucionales y nacionales, como una estrategia didáctica para el mejoramiento de la enseñanza de la matemática en la educación secundaria (Rodríguez, 2005; Rocha, 2006; Ottonello et al., 2011; Voisin, 2011; Godino et al., 2012; Palacios y Solarte, 2013; Godino et al., 2015; Duval, 2016).

4. Conflicto de intereses

Los autores de este artículo declaran no tener ningún tipo de conflicto de intereses del trabajo presentado.

Referencias

Arroyo, G.C. (2014). Dificultades en el aprendizaje de problemas que se modelan con ecuaciones lineales: El caso de estudiantes de octavo nivel de un colegio de Heredia. *Uniciencia*, *28*(2), 15-44.

Arteaga, B. y Macías, J. (2016). La representación en la resolución de problemas matemáticos como diagnóstico de estrategias metacognitivas. En España Francisco J. (Ed.). *XVI Congreso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas* (pp. 118-126) http://funes.uniandes.edu.co/21754/

Atenas, A.P. y Vera, J.R. (2017). *Influencia de la comprensión lectora en la resolución de problemas matemáticos en estudiantes de segundo año básico del colegio San Luís de Maipú* (Trabajo de Grado). Universidad UCINF. http://repositorio.ugm.cl/handle/20.500.12743/1116

Ausubel, D.P. (2012). *The acquisition and retention of knowledge. A cognitive view*. Springer-Science & Business Media B.V.

Barrantes, H. (2008). Resolución de problemas: El trabajo de Allan Schoenfeld. https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6971

Becerra, O.J., Buitrago, M.R. y Calderón, S.C. (2014). Fenomenología asociada a una tarea que involucra adición y sustracción de números enteros. http://funes.uniandes.edu.co/5738/

Bello, W., García, M., Rojas, O. y Sigarreta, J. (2016). Incidencia de los problemas lógicos matemáticos en la motivación hacia la matemática. *Revista Premisa*, *18*(70), 17-35.

Benavides, Y. (2018). *Transformación del lenguaje natural al algebraico a través de estrategias metacognitivas con estudiantes de grado octavo* (Tesis de Maestría). Universidad Autónoma de Manizales. http://repositorio.autonoma.edu.co/xmlui/handle/11182/543

Castellanos-Muñoz, A., Amaya, T. y Sgreccia, N. (2019). Procesos argumentativos al hacer transformaciones de las representaciones semióticas de una relación funcional de variación y cambio en estudiantes de noveno grado. En Pérez-Vera, Iván Esteban, García, Daysi (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 47-57). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Rev. Unimar Julio - Diciembre 2021
e-ISSN: 2216-0116 ISSN: 0120-4327
DOI: https://doi.org/10.31948/Rev.unimar

Castro Araujo, E.A. (2017). Abordaje didáctico de la comprensión de los problemas algebraicos en el nivel secundario de la República Dominicana. *Transformación, 13*(3), 314-326.

Cerdán, F. (2008). *Estudios sobre la familia de problemas aritmético-algebraicos* (Tesis doctoral). Universidad de Valencia. https://roderic.uv.es/handle/10550/15723

Cervantes, G., Mendoza, A., Peñaloza, L., Ramírez, M. y Viñas, M.M. (2011). Descripción y análisis de procesos de pensamiento de estudiantes al resolver problemas matemáticos. *Revista Científica Ingeniería y Desarrollo*, (1).

Chaves, E., Gamboa, R. y Castillo, M. (2010). Creencias de los estudiantes en los procesos de aprendizaje de las matemáticas. https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6906.

Conejo, L. y Ortega, T. (2013). Clasificación de los problemas propuestos en aulas de Educación Secundaria Obligatoria. *Educación matemática*, *25*(3), 129-158.

Cutimbo, G.V. y Mendoza, M.L. (2018). *Procesos metacognitivos para la resolución de problemas en el área de matemática en alumnos de segundo grado del nivel secundario de la Institución Educativa "Coronel Gregorio Albarracín" de Tacna, 2008* (Trabajo de Grado). Escuela de Posgrado, Universidad Cesar Vallejo. https://repositorio.ucv.edu.pe/bitstream/handle/20.500.12692/35001/cutimbo_hg.pdf?sequence=1&isAllowed=y

D'Amore, B. (2012). *Perspectivas en la didáctica de las matemáticas*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

D'Amore, B., Pinilla, M.F., Iori, M. y Matteuzzi, M. (2015). Análisis de los antecedentes histórico-filosóficos de la 'Paradoja cognitiva de Duval'. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *18*(2), 177-212.

Desoete, A. (2017). La evaluación y mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas a través de la metacognición. *Electronic Journal of Research in Education Psychology*, *5*(13), 705-730.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *9*(1), 143-168.

Duval, R. (2012). Lo esencial de los procesos cognitivos de comprensión en matemáticas: los registros de representación semiótica. *Resúmenes del VI Coloquio Internacional de Didáctica de las Matemáticas: avances y desafíos actuales*, 14-17. http://www.irem.pucp.edu.pe/wp-content/uploads/2012/02/Resumen_coloquio_2012-1.pdf#page=31

Duval, R. (2016). Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. En Duval, R. y Sáenz-Ludlow, A. (Eds.), *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas Énfasis* (pp. 61-94). Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Erazo, L. y Muñoz, J. (2014). *La conversión en la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita. Diseño y validación de una metodología de análisis para libros de texto* (Trabajo de Grado). Universidad de Nariño. http://sired.udenar.edu.co/id/eprint/864

Filloy, E. y Rojano, T. (1989). Solving equations: the transition from arithmetic to algebra. *For the learning of mathematics*, *9*(2), 19-25.

García, J.Á. (2015). El lenguaje ordinario: la clave para el aprendizaje de las matemáticas basado en problemas. *Actualidades investigativas en educación, 15*(1), 495-519.

Gasco-Txabarri, J. (2017). La resolución de problemas aritmético-algebraicos y las estrategias de aprendizaje en matemáticas. Un estudio en educación secundaria obligatoria (ESO). *RELIME, Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 20*(2), 1-10.

Godino, J.D., Gonzato, M., Cajaraville, J.A. y Fernández, T. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las ciencias: Revista de investigación y experiencias didácticas*, 109-130.

Godino, J.D., Neto, T., Wilhelmi, M.R., Aké, L.P., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (8).

Rev. Unimar | Julio - Diciembre 2021
e-ISSN: 2216-0116 | ISSN: 0120-4327
DOI: https://doi.org/10.31948/Rev.unimar

Godino, J.D., Batanero, C., Font, V. y Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. En Fernández, C., González, J.L., Ruiz, F.J., Fernández, T. y Berciano, A. (Eds.). *Investigación en Educación Matemática* (pp. 288-297). https://www.researchgate.net/publication/309457869_Articulando_conocimientos_y_competencias_del_profesor_de_matematicas_el_modelo_CCDM

Godino, J.D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Boletim de Educação Matemática*, *31*(57), 90-113.

Gutiérrez, J.D. y Vargas, J.A. (2020). *Metacognición y aprendizaje de las matemáticas: el caso de la función lineal* (Trabajo de Grado). Universidad de Los Llanos. https://repositorio.unillanos.edu.co/handle/001/1589

Guzmán, I. (2010). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 1*(1), 5-21.

Hoyles, C., Krummheuer, G., Ciscar, S.L., Raig, N.P., Potari, D., Setati, M. y Rodríguez, A.G. (2012). *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (Vol. 41). Editorial Graó.

Iriarte, A.J. (2011). Desarrollo de la competencia resolución de problemas desde una didáctica con enfoque metacognitivo. *Zona próxima, Revista del Instituto de Estudios Superiores en Educación*, (15), 2-21.

Iriondo-Otxotorena, J. (2016). *Mejora didáctica en la transición de la aritmética al álgebra en el primer ciclo de la ESO basada en la ludificación* (Tesis de Maestría). Universidad Internacional de la Rioja, UNIR. https://reunir.unir.net/handle/123456789/3538

Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica (Trad. Puig Luis). *Enseñanza de las Ciencias,* 7(3), 229-240.

Klimenko, O. (2009). La enseñanza de las estrategias cognitivas y metacognitivas como una vía de apoyo para el aprendizaje autónomo en los niños con déficit de atención sostenida. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte, 1*(27), 1-19.

Lacasa, P. (2015). *La actividad del sujeto en el proceso de equilibración de las estructuras cognoscitivas en Jean Piaget* (Tesis Doctoral). Universidad Complutense de Madrid. https://eprints.ucm.es/52737/1/5309859548.pdf

Lara, J.H. (2017). *Aprendizaje autorregulado y metacognición para potenciar la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico en escolares de secundaria* (Tesis de Maestría) Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. http://repositorioinstitucional.buap.mx/handle/20.500.12371/200

Lira López, L. y Pérez, L. (2014) Problemas de comprensión sobre el planteamiento y solución de problemas en algebra. Un estudio de educación media superior tecnológica. http://www.comie.org.mx/congreso/memoriaelectronica/v11/docs/area_14/2554.pdf

López, J.A. (2009). La importancia de los conocimientos previos para el aprendizaje de nuevos contenidos. *Innovación y Experiencias Educativas*, (16), 1-14.

Martínez, B.A., Sánchez, J.M. y Pizarro, N. (2020). La representación en la resolución de problemas matemáticos: un análisis de estrategias metacognitivas de estudiantes de secundaria. *Uniciencia, 34*(1), 263-280.

Mejía, M.E. y Londoño, J.A. (2017). Caracterización de estrategias y procedimientos utilizados por los estudiantes de grado undécimo de la Institución Educativa Gilberto Alzate Avendaño en la solución de situaciones problema en el área de matemáticas, contrastadas con métodos heurísticos de George Polya y Allan Schoenfeld. En Alzate, Faber (Ed.), *La investigación en el contexto escolar. Un compromiso ético y político* (pp. 145-199). Alcaldía de Medellín.

Rev. Unimar Julio - Diciembre 2021
e-ISSN: 2216-0116 ISSN: 0120-4327
DOI: https://doi.org/10.31948/Rev.unimar
Revista UNIMAR

Mercado, M.E. y Gil, J.E. (2019). *Interpretación de problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita a partir del trabajo cooperativo* (Tesis de Maestría). Universidad de Antioquia. http://bibliotecadigital.udea.edu.co/bitstream/10495/10884/1/MercadoMercedes_GilJorge_EcuacionesPrimerGrado_2019_TG.pdf

Molina, J. (2014). Aprendizaje significativo y resolución de problemas de ecuaciones de primer grado. http://recursosbiblio.url.edu.gt/tesiseortiz/2014/05/86/Lopez-Juan.pdf

Montes, M., Flores-Medrano, E., Carmona, E., Huitrado, J.L. y Flores, P. (s.f.). Reflexiones sobre la naturaleza del conocimiento, las creencias y las concepciones. https://www.researchgate.net/profile/MiguelMontes/publication/271205342_Reflexiones_sobre_la_naturaleza_del_conocimiento_las_creencias_y_las_concepciones/links/5553144108ae980ca606d43e/Reflexiones-sobre-la-naturaleza-del-conocimiento-las-creencias-y-las-concepciones.pdf

Montes, M.Á., Aguilar-González, Á., Carmona, E., Carrillo, J., Contreras-Gonzáles, L.C., Climent, N., Escudero, D.I., Flores-Medrano, E., Flores, P., Huitrado, J.L., Muñoz-Catalán, M.C., Rojas, N., Sosa, L., Vasco, D. y Zakaryan, D. (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. Universidad de Huelva, Publicaciones.

Moreno, A.N. y Daza, B.Y. (2014). *Incidencia de estrategias metacognitivas en la resolución de problemas en el área de la matemática* (Tesis Doctoral). Pontificia Universidad Javeriana. http://funes.uniandes.edu.co/10689/

Munzón, N.R., Bosch, M. y Gascón, J. (2015). El problema didáctico del álgebra elemental: Un análisis macro-ecológico desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Journal of Research in Mathematics Education*, *4*(2), 106-131.

Muñoz, J., Erazo, L. y Marmolejo, G. (2013). La conversión en la resolución de ecuaciones lineales de primer grado con una incógnita: un análisis semiótico de libros de texto. En Gallego, A.P. (Ed.), *Memorias del 14° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (pp. 747-750). Universidad Distrital - Barranquilla.

Navia Ordóñez, L. (2017). Semiotic representations of the concept of linear equation with a variable from the implementation of a didactic game. *Amazonia Investiga, 6*(11), 38-52.

Olmedo, N., Galíndez, M., Peralta, J. y Di Bárbaro, M. (2015). Errores y concepciones de los alumnos en álgebra. En *XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/view/877

Oropeza, C. y Sánchez, J.I. (2014). Dificultades en la solución de problemas que involucran un enfoque algebraico. http://funes.uniandes.edu.co/5390/

Ospina, G. y Reyes, D. (2018). *Nociones conceptuales de función en los estudiantes de noveno grado* (Tesis de Maestría). Universidad de Medellín, Ciencia y Libertad. https://repository.udem.edu.co/handle/11407/4955?show=full

Osses B.S. y Jaramillo, M.S. (2008). Metacognición: un camino para aprender a aprender. *Estudios pedagógicos (Valdivia)*, *34*(1), 187-197.

Otero, M.R., Papini, C. y Elichiribehety, I. (2016). Las representaciones mentales y la resolución de un problema: Un estudio exploratorio. *Investigaçoes em Ensino de Ciencias*, *3*(1), 47-60.

Ottonello, S.I., Veliz, M. y Ross, S. (2011). Estrategias metacognitivas en el aprendizaje del álgebra. http://funes.uniandes.edu.co/4838/

Palacios, A.M. y Solarte, S.L. (2013). *Estudio de la resolución de problemas matemáticos no rutinarios de docentes de matemáticas en formación: una aproximación a las estrategias heurísticas.* Universidad del Valle.

Palarea, M.M. (2012). Introducción al seminario II sobre fines de la investigación en pensamiento algebraico. http://funes.uniandes.edu.co/11195/

Rev. Unimar Julio - Diciembre 2021
e-ISSN: 2216-0116 ISSN: 0120-4327
DOI: https://doi.org/10.31948/Rev.unimar
Revista UNIMAR

Polya, G. (1989). *Cómo plantear y resolver problemas.* Editorial Trillas.

Popayán, Y. (2016). *Situaciones didácticas en el aprendizaje de las expresiones algebraicas para la conversión del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico* (Tesis Doctoral). Universidad ICESI. http://funes.uniandes.edu.co/10645/

Prada, R., Hernández-Suárez, C.A. y Jaimes, L.A. (2017). Representación semiótica de la noción de función: concepciones de los estudiantes que transitan del colegio a la universidad. *Revista Panorama, 11*(20), 33-44.

Puig, L. (2014). El texto "Acerca del carácter aritmético o algebraico de los problemas verbales", veintitrés años después. En B. Gómez y L. Puig (Eds.), *Resolver problemas: Estudios en memoria de Fernando Cerdán*, (pp. 35-47). Universitat de València.

Puig, L. y Cerdán, F. (1990). Acerca del carácter aritmético o algebraico de los problemas verbales. En *Memorias del segundo simposio internacional sobre investigación en educación matemática* (pp. 35-48).

Ramos, L.A. y Casas, L.M. (2017). Enseñanza y evaluación del Álgebra en Honduras: concepciones y prácticas docentes. *Paradigma: Revista de Investigación Educativa*, *24*(38), 34-52. https://doi.org/10.5377/paradigma.v24i38.6769

Raynaudo, G. y Peralta, O. (2017). Cambio conceptual: una mirada desde las teorías de Piaget y Vygotsky. *Liberabit*, *23*(1), 110-122.

Ricaldi, M. (2013). Análisis del tratamiento del álgebra en el primer año de secundaria: su correspondencia con los procesos de algebrización y modelización. http://funes.uniandes.edu.co/3796/

Rocha, T.C. (2006). *Los procesos metacognitivos en la comprensión de las prácticas de los estudiantes cuando resuelven problemas matemáticos: una perspectiva ontosemiótica* (Tesis Doctoral). Universidad de Santiago de Compostela. http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/Tesis_doctoral_Tania_Gusmao.pdf

Rodríguez, E. (2005). *Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de matemáticas: una propuesta integradora desde el enfoque antropológico*. Universidad Complutense de Madrid.

Rodríguez, F.E., Barría, A.E. Chavarría, M.I. y Universidad del Bío-Bío – Escuela de Pedagogía en Educación Matemática, Chile. (2010). Dificultades que presentan los estudiantes de primer año de enseñanza media en la resolución de problemas que involucren ecuaciones de primer grado. http://repobib.ubiobio.cl/jspui/handle/123456789/1986

Rodríguez, J. y Abad, G. (2011). La comprensión de textos en la resolución de problemas algebraicos en el proceso de enseñanza - aprendizaje de la matemática. *Cuadernos de Educación y Desarrollo*, (28). https://ideas.repec.org/a/erv/cedced/y2011i2857.html

Rojas, P.J. (2010). Conflictos semióticos en un contexto algebraico: un análisis de las producciones de los estudiantes. *Revista Digital Matemática, 11*(1), 1-9.

Rojas, E.Y. y Salazar, Y.D. (2018). *La Interpretación semiótica en el aprendizaje de las ecuaciones de primer grado con una incógnita en el primer grado de secundaria de la IE N° 20575 José Antonio Encinas UGEL Nº 15 - Huarochirí 2016* (Trabajo de Grado). Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle, Lima, Perú. http://repositorio.une.edu.pe/handle/UNE/3279

Ruiz, M. (2016). Diseño de una propuesta metodológica que contribuya al lenguaje algebraico, su precisión e importancia para la enseñanza-aprendizaje del álgebra. https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/59655

Saldarriaga-Zambrano, P.J., Bravo-Cedeño, G. y Loor-Rivadeneira, M.R. (2016). La teoría constructivista de Jean Piaget y su significación para la pedagogía contemporánea. *Dominio de las Ciencias*, *2*(3 Especial), 127-137.

Rev. Unimar Julio - Diciembre 2021
e-ISSN: 2216-0116 ISSN: 0120-4327
DOI: https://doi.org/10.31948/Rev.unimar

Sánchez, N.A. (2014). Análisis de errores asociados a la resolución de ecuaciones de primer grado. una aproximación desde la zona de desarrollo próximo. En Montero, P., Silva, H., Soto, D. (Eds.), *Actas Jornadas Nacionales Educación Matemática* (pp. 196-203). http://funes.uniandes.edu.co/7757/

Socas, M. (2011). La enseñanza del álgebra en la educación obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *77*, 5-34.

Troncoso, O.M. (2013). *Estrategias metacognitivas en el aprendizaje de las matemáticas: una intervención en el aula para determinar las implicaciones de la implementación de estrategias metacognitivas en el aprendizaje de las matemáticas* (Tesis de Maestría). Universidad del Tolima. http://www.fisica.ru/dfmg/teacher/archivos/ESTRATEGIAS-METACOGNITIVAS-OSCAR-M-TRONCOSO.pdf

Valencia, P.A. y Díaz, E. (2019). *Estrategia didáctica para fortalecer el razonamiento algebraico fundamentada en la etnomatemática* (Trabajo de Grado). Universidad de Antioquia. http://bibliotecadigital.udea.edu.co/bitstream/10495/19369/1/ValenciaPaola_2019_EstrategiaRazonamientoAlgebraico.pdf

Vega, C. (2016). *Enseñanza del álgebra a través de la formalización progresiva* (Trabajo de Grado). Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. México. https://www.fcfm.buap.mx/assets/docs/docencia/tesis/matematicas/AlmaVegaCortazar.pdf

Vergnaud, G. (2016). ¿En qué sentido la teoría de los campos conceptuales puede ayudarnos para facilitar aprendizaje significativo? *Investigações em ensino de ciências*, *12*(2), 285-302.

Voisin, Y.S. (2011). Iniciación del aprendizaje del álgebra y sus consecuencias para la enseñanza. *Sapiens. Revista Universitaria de Investigación*, *12*(1), 122-142.

Williams, L.C. y Gómez, I.M. (2007). Sistema de creencias sobre las matemáticas en alumnos de secundaria. *Revista Complutense de Educación*, *18*(2), 125-143.

Zambrano, G. (2008). Preguntas cognitivas y metacognitivas en el aprendizaje y la generación de estrategias de resolución de problemas matemáticos. *INVENTUM*, *3*(4), 25-50.

Contribución:

Los autores participaron en la elaboración del manuscrito, lo leyeron y aprobaron.