RECIBIDO EL 24 DE OCTUBRE DE 2020 - ACEPTADO EL 23 DE ENERO DE 2021

APLICACIONES DEL MÉTODO DE HIPERCUBO LATINO PARA LA ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS DE MODELOS MATEMÁTICAS DESDE UNA PERSPECTIVA PEDAGÓGICA

APPLICATIONS OF THE LATIN HYPERCUBE METHOD FOR THE ESTIMATION OF PARAMETERS OF MATHEMATICAL MODELS FROM A PEDAGOGICAL PERSPECTIVE

Jhon Franklin Puerres Tipas[1]

Eduardo Ibarguen Mondragón[2]

Miller Cerón Gómez[3]

Universidad de Nariño

RESUMEN

En el presente artículo se desarrolla una metodología didáctica para obtener muestras a través del método de hipercubo latino. Simultáneamente se utiliza una serie de herramientas estadísticas, con el propósito de analizar la incertidumbre, sensibilidad e importancia de los parámetros de modelos matemáticos formulados a partir de ecuaciones diferenciales ordinarias. El muestreo de hipercubo latino es un método estadístico que permite crear muestras con valores de

1 Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad de Nariño, Pasto, Colombia. Correo: jhon1998@udenar.edu.co Orcid: https://orcid.org/0000-0003-2773-7793

2 Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad de Nariño, Pasto, Colombia. Correo: edbargun@udenar.edu.co
Orcid: https://orcid.org/0000-0001-6308-1344

3 Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad de Nariño, Pasto, Colombia. Correo: millercg@udenar.edu.co
Orcid: https://orcid.org/0000-0002-2689-495X

una distribución multidimensional, a partir de un procedimiento aleatorio estratificado. Se presenta conceptos y definiciones del método, la metodología para obtener una muestra y finalmente aplicaciones de este método asociadas al análisis de sensibilidad local de un modelo.

PALABRAS CLAVE

Muestreo de hipercubo latino, modelos matemáticos, distribución de probabilidad, análisis de sensibilidad, ecuaciones diferenciales.

ABSTRACT

In this article a didactic methodology is developed to obtain samples through the Latin hypercube method. In addition, simultaneously a series of statistical tools is used, with the purpose of analyzing the uncertainty, sensitivity and importance of the parameters of mathematical models formulated from ordinary differential equations. Latin hypercube sampling is a statistical method that allows to create samples with values of a multidimensional distribution from a stratified random procedure. Concepts and definitions of the method, the methodology to obtain a sample and finally applications of this method associated with the local sensitivity analysis of a model are developed in this work.

KEYWORDS

Latin hypercube sampling, mathematical models, probability distribution, sensitivity analysis, differential equations.

INTRODUCCIÓN AL MUESTREO DE HIPERCUBO LATINO

Muestras de hipercubo latino

El método de muestreo hipercubo latino (LHS por las siglas en inglés de “Latin Hypercube Sampling”) es un método estadístico para generar una muestra de colecciones plausibles de valores de los parámetros a partir de distribuciones multivariadas (Minasny & McBratney, 2006). El propósito del muestreo es obtener datos que permitan la estimación de algún parámetro estadístico, a través de un procedimiento aleatorio estratificado que proporcione una forma eficiente de muestrear variables. El LHS se utiliza a menudo para estudios de incertidumbre y sensibilidad de parámetros en modelos matemáticos, estos estudios permiten realizar un análisis del comportamiento del modelo frente a la variación de las variables de entrada, esto permite caracterizar la incertidumbre de la respuesta y realizar una clasificación de la importancia de éstas en base a la sensibilidad (Liu, Li & Yang, 2015)

Para constatar la definición anterior se muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1: Muestreo de hipercubo latino en una dimensión.

En este caso se desea generar cuatro muestras de hipercubo latino en una dimensión. El primer paso consiste en seleccionar la variable a muestrear denotada por , a la cual se le asigna la distribución de probabilidad normal (esta asignación se fundamenta en estudios teóricos o mediciones experimentales). El segundo paso consiste en dividir el rango de la función acumulada de la distribución normal en 4 intervalos equiprobables. En el tercer paso se genera una muestra aleatoria (r_1, r_2, r_3, r_4) para cada intervalo equiprobable de x_1 . En el cuarto paso se evalúa la inversa de la función acumulada f^{-1} en la muestra aleatoria $(f^{-1}(r_i)$, donde $i = 1,2,3,4)$ para generar una muestra de hipercubo latino $(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14})$ (Barón, 1999).

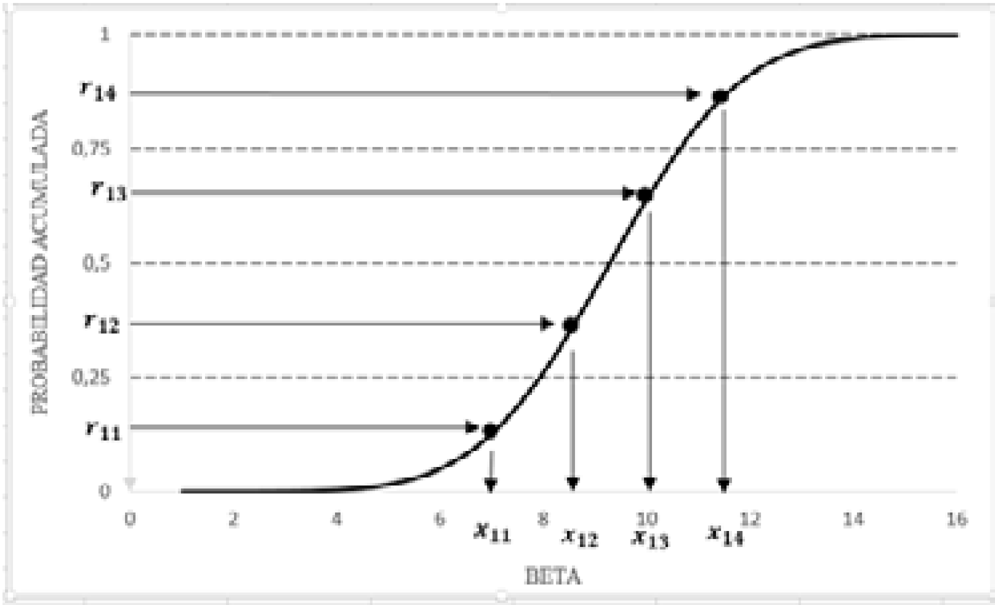


Figura 1: Muestra de hipercubo latino unidimensional.

La grafica de la Figura 1 corresponde a la muestra generada por el método de hipercubo latino unidimensional del ejemplo 1.

En el siguiente ejemplo se extiende el método LHS a dos dimensiones.

Ejemplo 2: Muestreo de hipercubo latino en dos dimensiones.

Para generar cinco muestras de hipercubo latino en dos dimensiones. El primer paso es seleccionar las variables a muestrear x_1 y x_2, a las cuales se asigna distribuciones de probabilidad normal. El segundo paso consiste en dividir el rango de la función acumulada de la distribución normal en 5 intervalos equiprobables para generar una muestra aleatoria $(r_{11}, r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{15})$ y $(r_{21}, r_{22}, r_{23}, r_{24}, r_{25})$ para cada intervalo equiprobable de x_1 y x_2 , observar las Figuras 2A y 2C. En el tercer paso se evalúa la inversa de la función acumulada f^{-1} en la muestra aleatoria $(f^{-1}(r_i)$, donde $i=1,2,3,4,5)$ para generar las muestras $(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15})$ y $(x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{25})$, en eje de las abscisas de las variables x_1 y x_2 respectivamente. En el cuarto paso se realiza emparejamientos de manera aleatoria o en un orden prescrito de las muestras entre variables x_1 y x_2 , en este caso se optó por el siguiente emparejamiento:
:(x_{11}, x_{25}) ; (x_{12}, x_{24}); (x_{13}, x_{23}); (x_{14}, x_{22}) y $(x_{15},$
De esta manera se obtiene los vectores de entrada. Observar la Figura 2B.

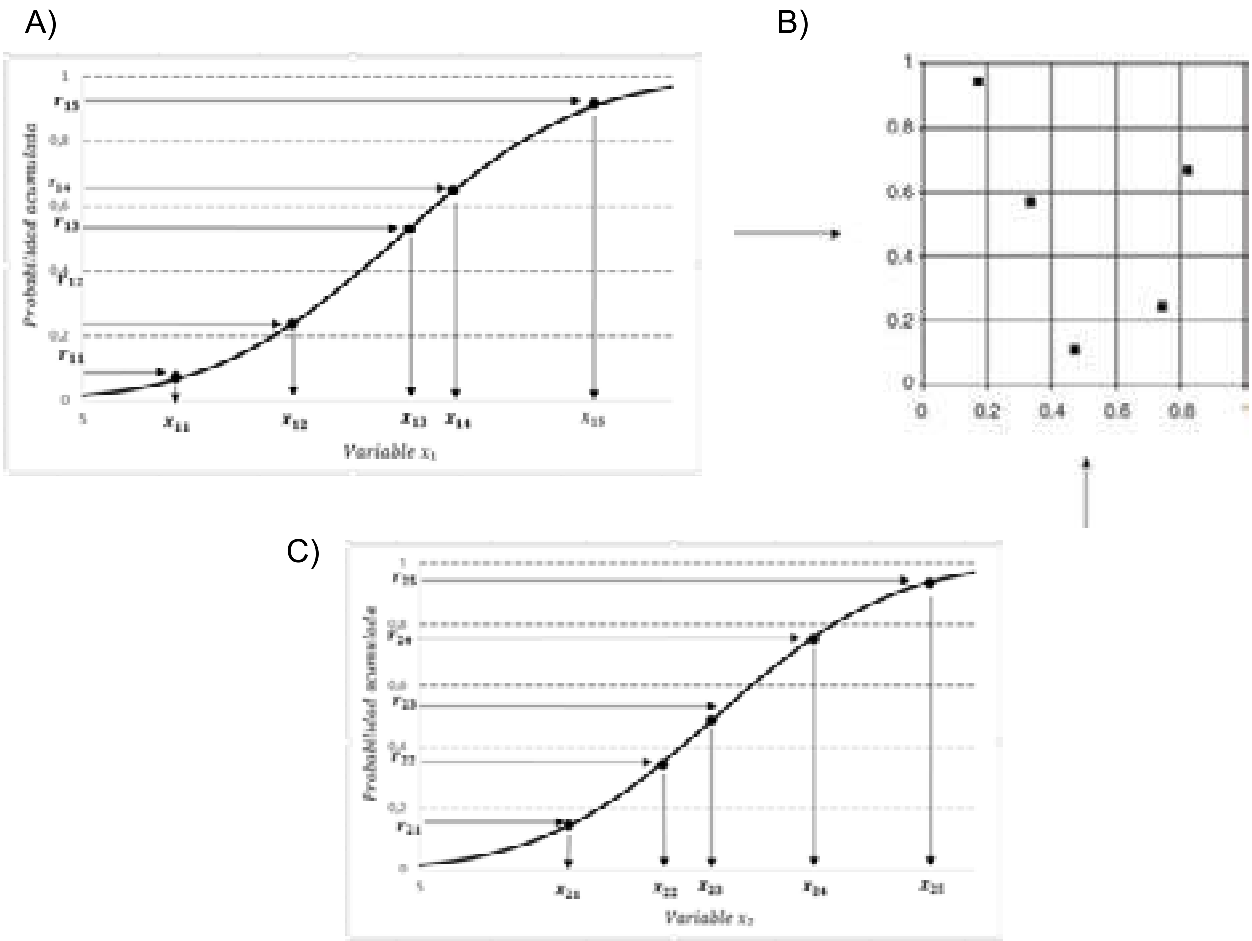


Figura 2: Ejemplo de LHS para 2 variables con distribución normal. La probabilidad acumulada para cada variable se divide en 5 estratos iguales y se toma una muestra aleatoria de cada estrato.

PROCEDIMIENTO DEL MUESTREO DE HIPERCUBO LATINO

En los ejemplos 1 y 2 de la sección anterior se presentaron los pasos para realizar el muestreo de LHS en una y dos dimensiones, respectivamente. En esta sección generalizaremos el método a r dimensiones.

Sean $x_1, x_2, x_3, \dots, x_r$ las variables de entrada y $u_i = [a_i, b_i]$ con $i = 1,2,3,\dots,r$, el rango de x_i. Los pasos para desarrollar el método LHS son los siguientes:

Paso 1: Dividir el rango ui en intervalos equiprobables $u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}, , \dots, u_{in}$
con $i = 1,2,3 \dots, r$ Estos intervalos deben cumplir las siguientes condiciones:

$$u_{i1} \cup u_{i2} \cup u_{i3} \cup, \dots, u_{in} = u_i,$$

$$u_{ij} \cap u_{ik} = \emptyset, \quad j,k = 1,2,3,\dots,n$$

Dado que u_{ij} es equiprobable, entonces la probabilidad de escoger un elemento dentro del intervalo es $P(x \in u_{ij}) = 1/n$

Paso 2: Para *i-ésimo* intervalo u_{ij} de la variable x_i, la probabilidad acumulada se puede obtener como:

$$Prob_{ij} = \frac{(j-1)}{n} + \frac{r_{ji}}{n},$$

donde r_{ij} es el número aleatorio uniforme en el rango de 0 a 1. De esta manera todos los valores de probabilidad se pueden denotar por:.

$$Prob = (Prob_{ij})_{n \times r}.$$

Paso 3: Transformar la probabilidad en el valor de la muestra x_{ij} por el inverso de la función acumulativa $F(*)$ de distribución acumulativa:

$$x_{ij} = F_i^{-1}(Prob_{ji})$$

Entonces, la matriz de muestra es:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{r1} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{r2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{rn} \end{pmatrix}$$

Paso 4: Los n valores de cada variable se emparejan aleatoriamente o en algún orden prescrito con los n valores de las otras variables. A continuación, la matriz de muestra de LHS se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} x'_{11} & x'_{12} & \cdots & x'_{r1} \\ x'_{21} & x'_{22} & \cdots & x'_{r2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x'_{n1} & x'_{n2} & \cdots & x'_{rn} \end{pmatrix}$$

Donde, cada fila es un punto de muestreo (Liu, Li & Yang, 2015).

El siguiente ejemplo es tomado del artículo de Liu, Li y Yang (2015), en el cual presentan una figura de una muestra de LHS en un cuadrado latino. El aporte consiste en realizar y aplicar la metodología presentada anteriormente (cuatro pasos) para encontrar la muestra de LHS de manera detallada.

Ejemplo 3.

Procedimiento del muestreo por medio del método LHS.

Paso 1: Sean las variables de entrada x_1 y x_2, con el rango $u_1 = [0,10]$ y $u_2 = [5,10]$ respectivamente.

Dividimos los intervalos equiprobables u_1 y u_2 con $n = 5$, para las variables x_1 y x_2 los intervalos equiprobables son:

$$u_{11} = [0,2) \qquad u_{21} = [5,6,6)$$

$$u_{12} = [2,4) \qquad u_{22} = [6,6,7,2)$$

$$u_{13} = [4,6) \qquad u_{23} = [7,2,7,7)$$

$$u_{14} = [6,8) \qquad u_{24} = [7,7,8,4)$$

$$u_{15} = [8,10] \qquad u_{25} = [8,4,10]$$

Luego verificamos las dos condiciones siguientes para el rango u_1 y u_2:

- $u_{11} \cup u_{12},\ldots,\cup\, u_{15} = u_1 \Leftrightarrow [0,2) \cup [2,4),\ldots,\cup [8,10] = [0,10]$
- $u_{21} \cup u_{22},\ldots,\cup\, u_{25} = u_2 \Leftrightarrow [5,6,6) \cup [6,6,7,2),\ldots,\cup [8,4,10] = [5,10]$
- $u_{11} \cap u_{12},\ldots,\cap\, u_{15} = \emptyset \Leftrightarrow [0,2) \cap [2,4),\ldots,\cap [8,10] = \emptyset$
- $u_{21} \cap u_{22},\ldots,\cap\, u_{25} = \emptyset \Leftrightarrow [5,6,6) \cap [6,6,7,2),\ldots,\cap [8,4,10] = \emptyset$

La probabilidad de que se escoja un elemento dentro del intervalo u_{ij} con $i,j = 1,2,3,4,5$ es $P(x \in u_{ij}) = \frac{1}{5}$, esto debido a que los intervalos u_1 y u_2 se dividen en 5 subintervalos de la misma probabilidad de ser escogidos dentro de cualquier intervalo u_{ij}.

Paso 2: Para el i - *ésimo* intervalo de u_{ji} de la variable x_i, la probabilidad acumulada se puede obtener como:

$$Prob_{11} = (1-1)/5 + r_{11}/5 = r_{11}/5 \qquad Prob_{12} = (1-1)/5 + r_{12}/5 = r_{12}/5$$

$$Prob_{21} = (2-1)/5 + r_{21}/5 = 1/5 + r_{21}/5 \qquad Prob_{22} = (2-1)/5 + r_{22}/5 = 1/5 + r_{22}/5$$

$$Prob_{31} = (3-1)/5 + r_{31}/5 = 2/5 + r_{31}/5 \qquad Prob_{32} = (3-1)/5 + r_{32}/5 = 2/5r_{32}/5$$

$$Prob_{41} = (4-1)/5 + r_{41}/5 = 3/5 + r_{41}/5 \qquad Prob_{42} = (4-1)/5 + r_{42}/5 = 3/5 + r_{42}/5$$

$$Prob_{51} = (5-1)/5 + r_{51}/5 = 4/5 + r_{51}/5 \qquad Prob_{52} = (5-1)/5 + r_{52}/5 = 4/5 + r_{52}/5$$

Donde r_{ji} es el número aleatorio uniforme en el rango de 0 a 1 de esta manera todos los valores de probabilidad se pueden denotar por:

$$Prob = (Prob_{ji})_{5\text{x}2}$$

Pasa 3: Transformar la probabilidad en el valor de la muestra x_{ji} con $i = 1,2$ y $j = 1,2,3,4,5$ por el inverso de la fórmula acumulativa $F(*)$ de distribución acumulativa:

$$x_{11} = F_1^{-1}(Prob_{11}) \qquad x_{12} = F_2^{-1}(Prob_{21})$$

$$x_{11} = F_1^{-1}(r_{11}/5) \qquad x_{12} = F_2^{-1}(1/5 + r_{21}/5)$$

$$\vdots$$

$$x_{51} = F_1^{-1}(Prob_{51}) \qquad x_{52} = F_2^{-1}(Prob_{52})$$

$$x_{51} = F_1^{-1}(4/5 + r_{51}/5) \qquad x_{52} = F_2^{-1}(4/5 + r_{52}/5)$$

Entonces la matriz de muestra es:

$$X = \begin{pmatrix} F_1^{-1}(r_{11}/5) & F_2^{-1}(r_{12}/5) \\ F_1^{-1}(1/5 + r_{21}/5) & F_2^{-1}(1/5 + r_{22}/5) \\ F_1^{-1}(2/5 + r_{31}/5) & F_2^{-1}(2/5 + r_{32}/5) \\ F_1^{-1}(3/5 + r_{41}/5) & F_2^{-1}(3/5 + r_{42}/5) \\ F_1^{-1}(4/5 + r_{51}/5) & F_2^{-1}(4/5 + r_{52}/5) \end{pmatrix}$$

Paso 4: Los $n = 5$ valores de cada variable se emparejan aleatoriamente o en algún orden prescrito con los $n = 5$ valores de las otras variables. A continuación, la matriz de muestra de LHS se puede escribir como:

$$X' = \begin{pmatrix} (F_1^{-1})'(r_{11}/5) & (F_2^{-1})'(r_{12}/5) \\ (F_1^{-1})'(1/5 + r_{21}/5) & (F_2^{-1})'(1/5 + r_{22}/5) \\ (F_1^{-1})'(2/5 + r_{31}/5) & (F_2^{-1})'(2/5 + r_{32}/5) \\ (F_1^{-1})'(3/5 + r_{41}/5) & (F_2^{-1})'(3/5 + r_{42}/5) \\ (F_1^{-1})'(4/5 + r_{51}/5) & (F_2^{-1})'(4/5 + r_{52}/5) \end{pmatrix}$$

Donde cada fila es un punto de muestreo. Además la matriz de muestreo queda en función de la distribución de probabilidad, esto debido a que el ejemplo presentado en el artículo no se especifica la función de distribución acumulada.

Ejemplo 4

La generación de una muestra por hipercubo latino (LHS) se ilustra para las variables x_1 y x_2 , con una distribución uniforme y distribución triangular respectivamente.

Paso 1: Sean las variables de entrada x_1, x_2 donde $u_1 = [0,10]$ y $u_2 = [0,10]$
Dividimos los rangos u_i con $n=5$ donde $i=1,2$ intervalos equiprobables, para las variables x_1 y x_2 los intervalos equiprobables son:

$$u_{11} = [0,2) \qquad u_{21} = [0,4)$$

$$u_{12} = [2,4) \qquad u_{22} = [4,5.6)$$

$$u_{13} = [4,6) \qquad u_{23} = [5.6,6.9)$$

$$u_{14} = [6,8) \qquad u_{24} = [6.9,8)$$

$$u_{15} = [8,10] \qquad u_{25} = [8,10]$$

Luego verificamos las dos condiciones siguientes para el rango u_1 y u_2

- $u_{11} \cup u_{12}, \ldots, \cup u_{15} = u_1 \Leftrightarrow [0,2) \cup [2,4), \ldots, \cup [8,10] = [0,10]$
- $u_{21} \cup u_{22}, \ldots, \cup u_{25} = u_2 \Leftrightarrow [0,4) \cup [4,5.6), \ldots, \cup [8,10] = [0,10]$
- $u_{11} \cap u_{12}, \ldots, \cap u_{15} = \emptyset \Leftrightarrow [0,2) \cap [2,4), \ldots, \cap [8,10] = \emptyset$
- $u_{21} \cap u_{22}, \ldots, \cap u_{25} = \emptyset \Leftrightarrow [0,4) \cap [4,5,6), \ldots, \cap [8,10] = \emptyset$

La probabilidad de que se escoja un elemento dentro del intervalo u_{ij} con $i,j=1,2,3,4,5$ es $P(x \in u_{ij}) = \frac{1}{5}$ esto debido a que los intervalos u_1 y u_2 se dividen en 5 subintervalos de la misma probabilidad y a su vez cada uno de los elementos del intervalo tienen la misma probabilidad de ser escogidos dentro de cualquier intervalo u_{ji} .

Paso 2: Para el *j-ésimo* intervalo de u_{ji} de la variable x_i, la probabilidad acumulada se puede obtener como:

$$Prob_{11} = (1-1)/5 + 0{,}14/5 = 0{,}14/5 = 0{,}028$$

$$Prob_{12} = (1-1)/5 + 0{,}17/5 = 0{,}17/5 = 0{,}034$$

$$Prob_{21} = (2-1)/5 + 0{,}27/5 = 1/5 + 0{,}27/5 = 0{,}254$$

$$Prob_{22} = (2-1)/5 + 0{,}35/5 = 1/5 + 0{,}35/5 = 0{,}27$$

$$Prob_{31} = (3-1)/5 + 0{,}56/5 = 2/5 + 0{,}56/5 = 0{,}512$$

$$Prob_{32} = (3-1)/5 + 0{,}42/5 = 2/5 + 0{,}42/5 = 0{,}484$$

$$Prob_{41} = (4-1)/5 + 0{,}68/5 = 3/5 + 0{,}68/5 = 0{,}736$$

$$Prob_{42} = (4-1)/5 + 0{,}72/5 = 3/5 + 0{,}72/5 = 0{,}744$$

$$Prob_{51} = (5-1)/5 + 0{,}91/5 = 4/5 + 0{,}91/5 = 0{,}982$$

$$Prob_{52} = (5-1)/5 + 0{,}93/5 = 4/5 + 0{,}93/5 = 0{,}986$$

Paso 3: Transformar la probabilidad en el valor de la muestra x_{ji} con $i=1,2$ y $j=1,2,3,4,5$ por el inverso de la fórmula acumulativa $F(.)$ de distribución acumulativa:

$$x_{11} = F_1^{-1}(Prob_{11}) \qquad x_{12} = F_2^{-1}(Prob_{21})$$

$$x_{11} = F_1^{-1}(0{,}028) \qquad x_{12} = F_2^{-1}(0{,}034)$$

$$\vdots$$

$$x_{51} = F_1^{-1}(Prob_{51}) \qquad x_{52} = F_2^{-1}(Prob_{52})$$

$$x_{51} = F_1^{-1}(0{,}982) \qquad x_{52} = F_2^{-1}(0{,}986)$$

Entonces la matriz de muestra es:

$$X = \begin{pmatrix} F_1^{-1}(0{,}028) & F_2^{-1}(0{,}034) \\ F_1^{-1}(0{,}254) & F_2^{-1}(0{,}27) \\ F_1^{-1}(0{,}512) & F_2^{-1}(0{,}484) \\ F_1^{-1}(0{,}736) & F_2^{-1}(0{,}744) \\ F_1^{-1}(0{,}982) & F_2^{-1}(0{,}986) \end{pmatrix}$$

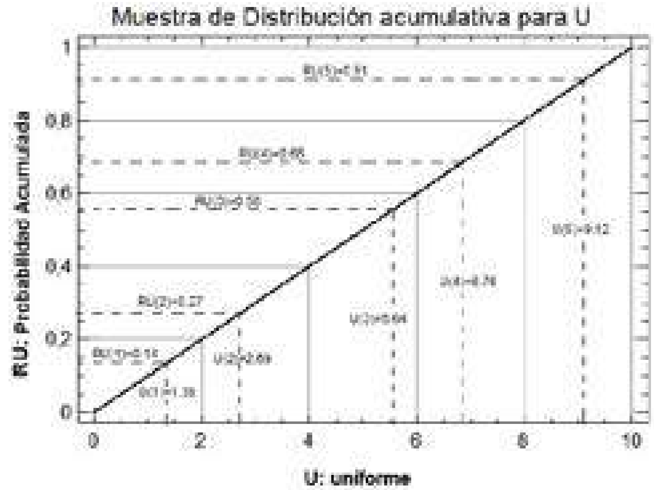
Paso 4: Los $n = 5$ valores de cada variable se emparejan aleatoriamente o en algún orden prescrito con $n = 5$ los valores de las otras variables. A continuación, la matriz de muestra de se puede escribir como:

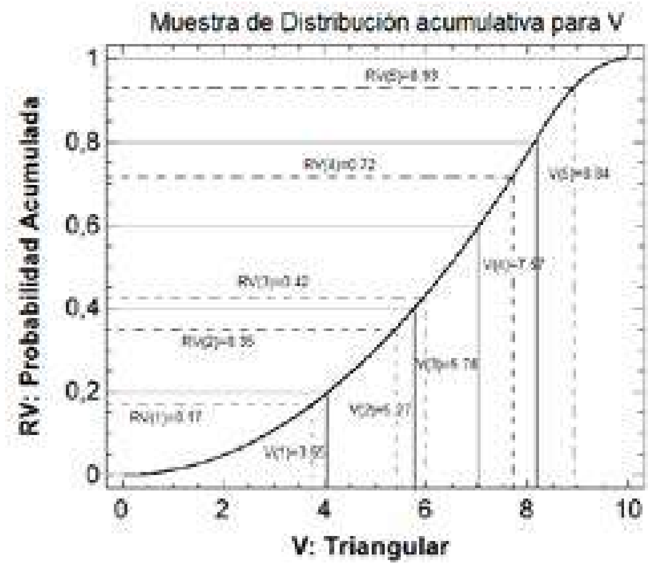
$$X' = \begin{pmatrix} 1{,}39 & 7{,}57 \\ 2{,}69 & 5{,}27 \\ 5{,}64 & 3{,}65 \\ 6{,}76 & 8{,}84 \\ 9{,}12 & 5{,}78 \end{pmatrix}$$

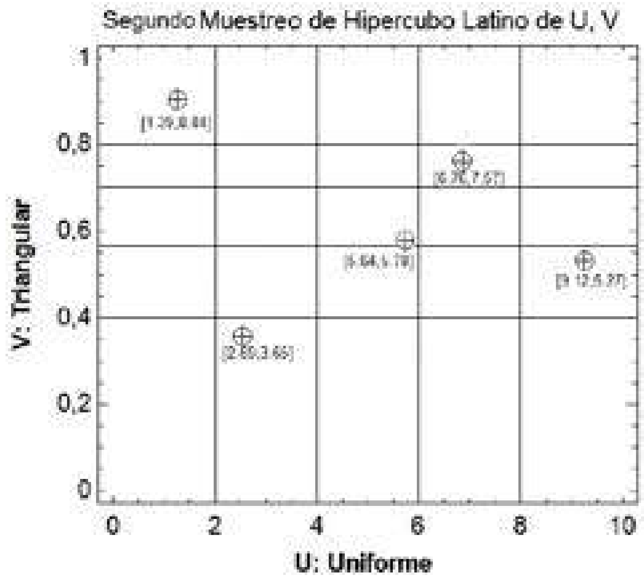
Donde cada fila es un punto de muestreo. La generación del se completa luego emparejando aleatoriamente (sin reemplazo) los valores resultantes para U y V. Como este emparejamiento no es único, pueden resultar muchos posibles, con el en la resultante de los emparejamientos:

$$\begin{array}{cc} [U(1), V(5)] & [U(1), V(3)] \\ [U(2), V(1)] & [U(2), V(2)] \\ [U(3), V(2)] & [U(3), V(3)] \\ [U(4), V(3)] & [U(4), V(5)] \\ [U(5), V(4)] & [U(5), V(1)] \end{array}$$

En la figura 4 se muestra un ejemplo de muestreo de hipercubo latino para generar una muestra de tamaño $n = 5$ a partir $X=(U,V)$, con U distribución uniforme en $[0,10]$ y V triangular en $[0,10]$.







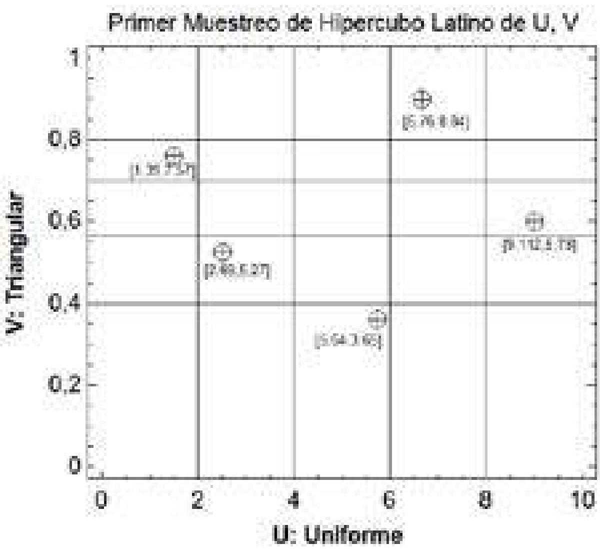


Figura 4. Muestras del LHS para las distribuciones: Uniforme y Triangular.

En la siguiente sección presentaremos los resultados obtenidos por los autores Samsuzzoha et al. (2012), donde se presenta un modelo matemático de la Influenza. En el modelo se presenta un análisis de sensibilidad cuya metodología de realización consiste en la generación de LHS para la estimación de parámetros. El aporte consiste en especificar y detallar el proceso para la generación de LHS, a través de los 4 pasos presentados anteriormente.

APLICACIÓN DEL MÉTODO DE LHS PARA LA ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS DE LA INFLUENZA.

En el trabajo de Samsuzzoha et al. (2012) presenta un modelo matemático en EDO, cuyo propósito es encontrar el número reproductivo básico y el punto de equilibrio endémico, debido a que representa la naturaleza de la trasmisión y la prevalencia de la enfermedad, respectivamente. En el artículo se ha realizado el análisis de sensibilidad basado en técnicas matemáticas y estadísticas para determinar la importancia de los parámetros en el modelo epidémico.

MODELO

El modelo consiste en un sistema de EDO no lineales, donde la población se encuentra dividida en 5 subgrupos: susceptibles *(S)*, vacunados *(V)*, expuestos *(E)* , infecciosos *(I)* y recuperados *(R)* . El tamaño total de la población se denota por $N = S + V + E + I + R$

El modelo está representado por el siguiente sistema de EDO:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta\beta_E \frac{ES}{N} - \beta\beta_1 \frac{IS}{N} - \phi S - \mu S + \delta R + \theta V + rN$$

$$\frac{dV}{dt} = -\beta\beta_E\beta_V \frac{EV}{N} - \beta\beta_1\beta_V \frac{IV}{N} - \mu V + \theta V + \phi S$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta\beta_E \frac{ES}{N} - \beta\beta_1 \frac{IS}{N} + \beta\beta_E\beta_V \frac{EV}{N} + \beta\beta_1\beta_V \frac{IV}{N} - (\mu + k + \sigma)E$$

$$\frac{dI}{dt} = \sigma E - (\mu + \alpha + \gamma)I$$

$$\frac{dI}{dt} = kE + \gamma I - \mu R - \delta R$$

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

El objetivo principal es realizar el análisis de sensibilidad para determinar los parámetros más influyentes que afectan la prevalencia y la trasmisión de la enfermedad. Para dar cumplimiento a este propósito, se utiliza la siguiente metodología:

- Evaluación de índices de sensibilidad del punto de equilibrio endémico utilizando valores de parámetros de entrada estimados específicos.
- Evaluación de índices de sensibilidad del número de reproducción básico utilizando valores de parámetros de entrada estimados específicos, así como considerando las incertidumbres involucradas en la estimación de valores de parámetros del modelo.

$\Re_{vac}$ **Para la influenza**

El número reproductivo básico R_{vac}, representa el número medio de los casos de infección secundaria producidos por un individuo infeccioso durante todo su periodo infeccioso. El número de reproducción básico del modelo viene dado por la fórmula:

$$\Re_{vac} = \frac{\beta(r\beta_E + \alpha\beta_E + \gamma\beta_E + \sigma\beta_I)(r + \theta + \beta_V\phi)}{(r + \alpha + \gamma)(r + k + \sigma)(r + \theta + \phi)}$$

Hay 11 parámetros involucrados en la ecuación del número reproductivo básico, de los cuales ellos han seleccionado $\beta, \beta_E, \beta_V, \sigma, \gamma$ y ϕ para examinar la incertidumbre en los valores de estos parámetros, se supone además que cada uno de estos parámetros es una variable con una función de densidad de probabilidad correspondiente. Para el muestreo de hipercubo latino han seleccionado seis parámetros que se consideraron para el análisis de incertidumbre. Los otros cinco parámetros: β_I, r, k, α y θ no se consideraron para el análisis de sensibilidad.

La generación de una muestra por hipercubo latino (LHS) se ilustra para las variables y su respectiva distribución de probabilidad son las siguientes:

- La tasa de contacto por día (β) sigue una distribución normal
- La capacidad de causar infección por individuos expuestos (β_E) sigue una distribución triangular.
- La eficacia de la vacuna $(1 - \beta_V)$ sigue una distribución triangular.
- Periodo de incubación por día (σ^{-1}) sigue una distribución gamma
- Duración del periodo de infección (γ^{-1}) sigue una distribución gamma
- La tasa de vacunación por día (ϕ) sigue una distribución triangular.

Sean las variables de entrada:

$$\beta \in \mu_1 = [0, 1]$$

$$\beta_E \in \mu_2 = [0, 0.35]$$

$$1 - \beta_V \in \mu_3 = [0, 0.35]$$

$$\sigma^{-1} \in \mu_4 = [0, 0.003]$$

$$\gamma^{-1} \in \mu_5 = [0, 1]$$

$$\phi \in \mu_6 = [0, 0.45]$$

Dividimos los rangos μ_i con $n = 1000$ donde $i = 1,2,3,....6$ intervalos equiprobables, para las variables $\beta, \beta_E, 1 - \beta_V, \sigma^{-1}, \gamma^{-1}$ y ϕ.
Los intervalos equiprobables para la variable β son:

$$\mu_{11} = [0, 0.001]$$

$$\mu_{12} = [0.001\,, 0.002]$$

$$\vdots$$

$$\mu_{11000} = [0.999\,, 1]$$

De manera similar se encuentran los intervalos equiprobables para las demás variables. Luego verificamos las siguientes condiciones para el intervalo μ_1, , para los demas intervalos el procedimiento es similar.

- $u_{11} \cup u_{12}, \ldots, \cup u_{11000} = u_1 \Leftrightarrow [0,0.001) \cup [0.001\,, 0.002) \cup, \ldots, \cup [0.999, 1] = [0,1]$
- $u_{11} \cap u_{12} \cap, \ldots, \cap u_{11000} = \emptyset \Leftrightarrow [0,0.001) \cap [0.001\,, 0.002) \cap, \ldots, \cap [0.999, 1] = \emptyset$

La probabilidad de que se escoja un elemento dentro del intervalo u_{ij} con $i=1,2,...,6$ y $j =1,2,3,....1000$ es $P(x \in u_{ij}) = \frac{1}{1000}$, esto debido a que los intervalos u_i con $i=1,2,....,6$ se dividen en *1000* subintervalos de la misma probabilidad y a su vez cada uno de los elementos del intervalo tienen la misma probabilidad de ser escogidos dentro de cualquier intervalo u_{ij} .

Para el *j-ésimo* intervalo u_{ij} de variable x_i, la probabilidad acumulada se presenta en la siguiente tabla:

$Prob_{ji}$	$x_{ji} = F_i^{-1}(Prob_{ji})$
$1{,}41 * 10^{-7}$	0,005
$1{,}48 * 10^{-7}$	0,0015
$1{,}56 * 10^{-7}$	0,0025
$1{,}65 * 10^{-7}$	0,0035
$1{,}74 * 10^{-7}$	0,0045
$1{,}83 * 10^{-7}$	0,0055
$1{,}93 * 10^{-7}$	0,0065
.	.
.	.

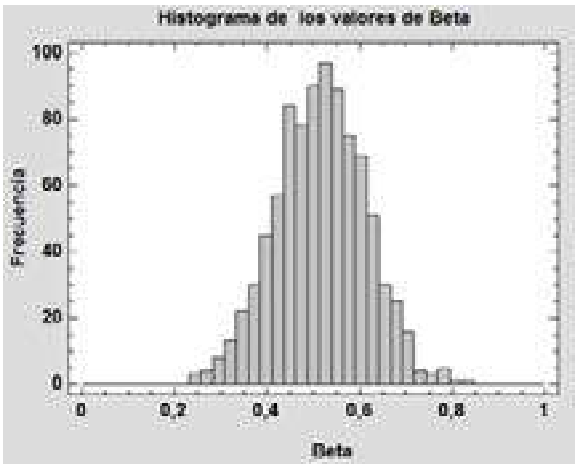
Tabla 1: Muestra de LHS para el parámetro

Para el parámetro β en la tabla se muestra en la primera columna los valores aleatorios de las estratificaciones, de cada uno de ellas se toma una, para un total 1000 muestras. De manera similar se obtiene una muestra LHS para los parámetros $\beta_E, 1-\beta_V, \sigma^{-1}, \gamma^{-1}$ y ϕ.

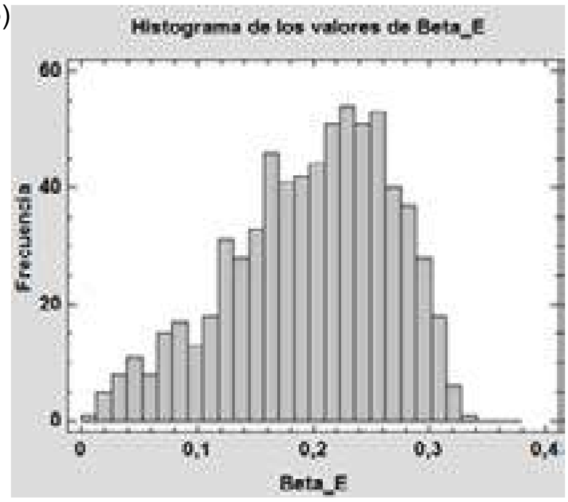
HISTOGRAMAS DE FRECUENCIAS

En esta sección se presentan algunos de los histogramas de frecuencia asociados a las variables $\beta, \beta_E, 1-\beta_V$ y ϕ, las cuales se consideraron para el análisis de sensibilidad.

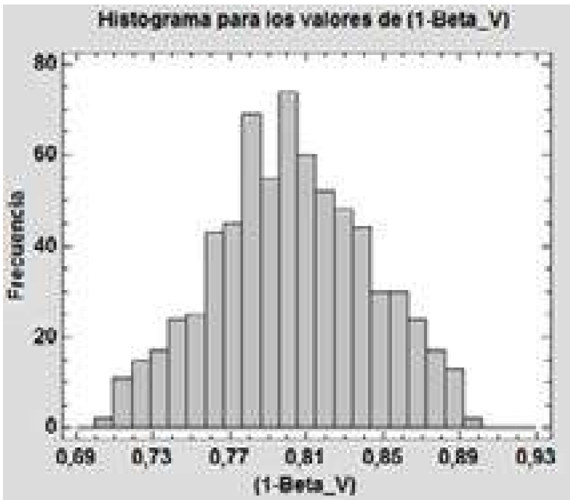
a)



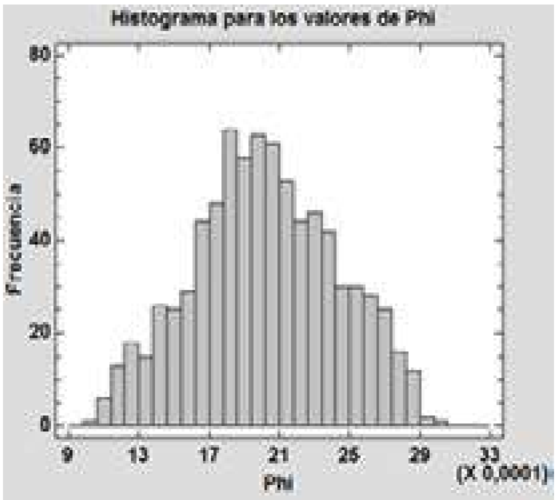
b)



c)



d)



El análisis de sensibilidad permite identificar que parámetros son importantes para contribuir a la variabilidad en el resultado del número reproductivo básico en función de su incertidumbre de la estimación, es así que se obtiene los siguientes resultados:

- Con el muestreo de Hipercubo latino considerando, la tasa de trasmisión β y la tasa de recuperación de enfermos clínicos y . Se puede concluir que estos dos parámetros están altamente correlacionados con $\Re_{vac}$ y los valores correspondientes son: $+0{,}957$ y $-0{,}910$ respectivamente.
- Existe una correlación entre las tasa de vacunación ϕ y $\Re_{vac}$ y el valor correspondiente es $-0{,}706$
- Se observa una correlación débil entre β_E, β_V y phi y sus correspondientes valores son: $+0{,}354$, $+0{,}381$ y $-0{,}176$ respectivamente

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

A partir de la literatura se observa que el método de muestreo de hipercubo latino se ha vuelto muy popular, debido a que esta técnica permite reducir en uno o más ordenes las magnitudes de cantidades corridas necesarias para obtener una determinada representatividad, en comparación con un método de Montecarlo.

Debido a que el muestreo de hipercubo latino es un método de muestreo estratificado proporciona una forma eficiente de muestrear variables, la aplicabilidad del método se utiliza a menudo para la construcción de experimentos por computadora, sin embargo las aplicaciones del método son amplias y variadas.

La metodología utilizada en este documento han sido utilizados con éxito en diversas aplicaciones, sin embargo, el muestreo de hipercubo latino tiene algunas modificaciones como: LHS escalable y extensión generalizada del LHS, estas modificaciones permiten al método ser eficiente. A pesar de estas modificaciones el método presenta una dificultad en la representatividad, ya que los resultados solamente se pueden evaluar, luego de efectuar las corridas del modelo numérico, y en el caso de que no sea satisfactoria, se debería repetir todos los pasos, con un número mayor de muestras (intervalos), no pudiendo utilizar los resultados anteriores. En cuanto a las aplicaciones en modelos matemáticos construidos a partir de ecuaciones diferenciales ordinarias, nos permite realizar análisis de sensibilidad, análisis de incertidumbre y estimación de parámetros.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barón, N. (1999). Técnicas estadísticas avanzadas en el análisis de Grandes Modelos Computacionales. In Congreso latinoamericano de métodos computacionales para Ingeniería. Argentina.

Blé, M., Torres-Zuniga, I., Donoso-Bravo, A., & Schiappacasse, M. C. Optimización en linea de la producción de metano en un reactor UASB.

Esteva, L., & Ibargüen-Mondragón, E. (2018). Modeling basic aspects of bacterial resistance of Mycobacterium tuberculosis to antibiotics. Ricerche di Matemática, 67(1), 69-88.

García-Moreno, A. I., González-Barbosa, J. J., Hurtado-Ramos, J. B., Ornelas-Rodríguez, F. J., & Ramírez-Pedraza, A. (2016). Análisis de la sensibilidad en un modelo de calibración cámara-LiDAR. Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, 32(4), 193-203.

Helton, J. C., & Davis, F. J. (2003). Latin hypercube sampling and the propagation of uncertainty in analyses of complex systems. Reliability Engineering & System Safety, 81(1), 23-69.

Liu, Z. Z., Li, W., & Yang, M. (2015). Two general extension algorithms of Latin hypercube sampling. Mathematical Problems in Engineering, 2015.

Michael Stein (1987) Large Sample Properties of Simulations Using Latin Hypercube Sampling, Technometrics, 29:2, 143-151, DOI: 10.1080/00401706.1987.10488205

Minasny, B., & McBratney, A. B. (2006). A conditioned Latin hypercube method for sampling in the presence of ancillary information. Computers & geosciences, 32(9), 1378-1388.

Menčík, J. (2016). Latin hypercube sampling. Concise Reliability for Engineers, 1, 118-119.

Martins, J. L., Ferreira, M. L., Pardal, J. M., & Morano, C. A. (2012). Comparación de la estimación de la productividad del proceso de soldadura eléctrica por los métodos de simulación de Monte Carlo e Hipercubo Latino. Información tecnológica, 23(4), 21-32.

Ronald, L. I. (2014). Latin hypercube sampling.

Samsuzzoha, M. D., Singh, M., & Lucy, D. (2013). Uncertainty and sensitivity analysis of the basic reproduction number of a vaccinated epidemic model of influenza. Applied Mathematical Modelling, 37(3), 903-915.

Shields, M. D., & Zhang, J. (2016). The generalization of Latin hypercube sampling. Reliability Engineering & System Safety, 148, 96-108.