RECIBIDO EL 19 DE MARZO DE 2021 - ACEPTADO EL 19 DE JUNIO DE 2021

LA COMPRENSIÓN DE LA RECTA DESDE LA TEORÍA APOE

UNDERSTANDING OF THE STRAIGHT LINE FROM APOS THEORY

Diana Carolina Suárez Gil[1]

Zagalo Enrique Suárez Aguilar[2]

Omaida Sepúlveda Delgado[3]

Universidad Pedagógica y Tecnológica

RESUMEN

En este artículo se informa de la investigación que tiene por objetivo establecer los mecanismos y las estructuras mentales necesarias para la comprensión de la noción de recta por estudiantes de grado noveno de educación básica. Para esto, en la fase del análisis teórico del concepto se formuló una descomposición genética que orientó la enseñanza, el análisis y los resultados. Según el desempeño de los estudiantes en el ciclo de actividades, clases, ejercicios y en un cuestionario diseñado, se llega a caracterizar la comprensión como acción, cuando los estudiantes calculan la ecuación de la recta de manera algorítmica y no infieren información de esta; como proceso, cuando representan la recta en diferentes registros, modelan situaciones e infieren información y como objeto cuando establecen y aplican relaciones entre rectas en situaciones problema. Se concluye que el marco teórico y metodológico APOE permite describir y explicar la comprensión de la recta y proporciona herramientas para analizar, diseñar, implementar y evaluar estrategias didácticas.

1 Docente, Licenciada en Matemáticas, Especialista en Didáctica de la Matemática, estudiante de Maestría en Educación Matemática, Universidad Pedagógica y Tecnológica, Colombia.
Email: dianacarolina.suarez@uptc.edu.co
Phone: +573125440543 ORCID ID https://orcid.org/0000-0003-4389-9610

2 [2]Docente investigador, Licenciado en Matemáticas, Ingeniero de Sistemas, Especialista en Computación para la docencia, Magister en Ciencias Matemáticas y Doctor en Ciencias de la Educación, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Tunja, Colombia.
Email: zagalo.suarez@uptc.edu.co
Phone: +573108035853 ORCID ID: https://orcid.org/0000-0002-1692-2240

3 Docente Investigadora, Licenciada en Matemáticas, Ingeniera de Sistemas, Especialista en computación para la docencia, Magister en Ciencias Matemáticas y Doctora en Ciencias de la educación, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Tunja, Colombia.
Email: omaida.sepulveda@uptc.edu.co
Phone: +573118556222 ORCID ID: https://orcid.org/0000-0002-2950-8137

ABSTRACT

This article reports on the research that aims to establish the mechanisms and mental structures necessary for the understanding of the notion of straight lines by students in the ninth grade of basic education. For this, in the phase of the theoretical analysis of the concept, a genetic decomposition was formulated that guided the teaching, the analysis and the results. According to the performance of the students in the cycle of activities, classes, exercises and in a designed questionnaire, comprehension is characterized as action, when the students calculate the equation of the straight algorithmically and do not infer information from it; as a process, when they represent the line in different registers, they model situations and infer information, and as an object when they establish and apply relationships between straights lines in problem situations. It is concluded that the APOE theoretical and methodological framework allows describing and explaining the understanding of the straights lines and provides tools to analyze, design, implement and evaluate didactic strategies.

PALABRAS CLAVE

Comprensión; enseñanza; aprendizaje; teoría APOS; ecuación lineal.

KEYWORDS

Understanding; teaching; learning; APOS theory; Linear equation

INTRODUCCIÓN

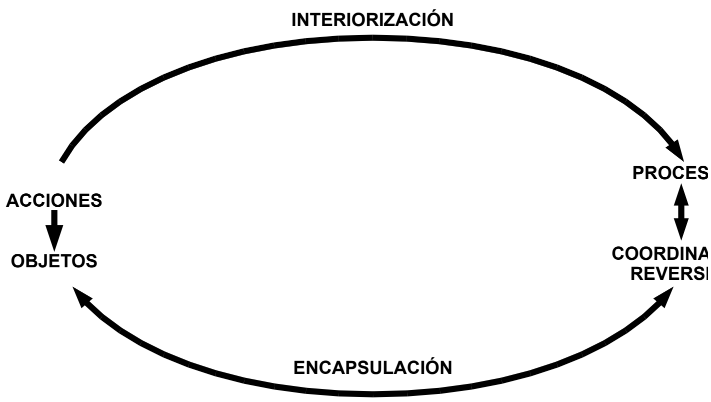
El estudio del fenómeno de la comprensión es complejo debido a la cantidad de factores que intervienen en el proceso, constituyéndose en un tema de interés para la didáctica de la matemática. Este fenómeno es resultado de la abstracción reflexiva que consiste en la construcción interminable de esquemas iterativos durante el desarrollo cognitivo, a través de la asimilación y organización de las acciones físicas o mentales en planos superiores de pensamiento (Dubinsky, 1991). La comprensión de la línea recta ha sido objeto de investigación, desde la teoría de los campos conceptuales, donde la consideran como la intersección de las representaciones, los invariantes y las situaciones; en este sentido, se encuentra que en esta concepción pueden existir procedimientos y propiedades, algunas de ellas erróneas que dan origen al estudio de errores y obstáculos cognitivos en la teoría de situaciones didácticas (Vanegas y Escalona, 2010); al respecto Villa, Bustamante y Osorio (2009) encuentran que esto se presenta en estudiantes en educación básica y media debido, entre otras razones, a que su enseñanza se limita a una práctica algorítmica, aplicada a un conjunto reducido de situaciones que poco o nada tienen que ver con la realidad. Ante esta problemática, se han hecho aportes como: los de Campeón, Aldana y Villa (2018), quienes diseñaron y desarrollaron tareas de modelación en situaciones en contexto; Gómez, Sánchez y Sepúlveda (2021) aplican modelos lineales para describir el movimiento rectilíneo, en particular la posición que depende del tiempo y su posterior extensión al concepto de velocidad y aceleración, en estos analizan el tratamiento y conversión entre los diferentes registros de representación; Rodríguez y Valdivé (2011) estudian algunos sistemas de prácticas en economía a través del análisis de los lenguajes, las acciones, los conceptos, las proposiciones y los argumentos de donde emergen y evolucionan significados de variables como salario, precio, oferta, demanda, punto de equilibrio y sus relaciones formuladas en modelos de la función lineal y afín; Torres y Angulo (2017) muestran cómo favorecer el desarrollo del pensamiento variacional para describir y predecir el cambio aplicando la función lineal en la resolución de problemas relacionados con proyectos productivos agroindustriales, en estos utilizan varias representaciones y reconocen dificultades en la didáctica del álgebra; Acevedo, Vergel y Nieto (2020) utilizan la mediación con tecnologías de la Información y comunicación (TICs) en la enseñanza de la función lineal y afín, donde encuentran evidencias de una mejor interpretación y articulación entre diversos registros de representación, sin embargo, los estudiantes presentan dificultades en procedimientos básicos en la solución de ecuaciones. Con el propósito de continuar aportando a la problemática mencionada, como resultado del ciclo de investigación que comprende las fases de análisis teórico, el diseño y la implementación de la instrucción, la recolección y análisis de la información en el presente artículo se describe y explica cómo los estudiantes de grado noveno de educación básica comprenden este objeto matemático.

MARCO TEÓRICO

La teoría APOE (denominada así por las siglas de acción, proceso, objeto y esquema) aplica y extiende la teoría de Piaget (Piaget, 1985), del pensamiento matemático elemental al avanzado, como una perspectiva cognitiva de la didáctica de la matemática, que tiene entre sus propósitos proponer un modelo cognitivo de las construcciones mentales, las estructuras lógicas y las matemáticas que se originan en la mente del individuo por abstracción reflexiva y que generan el conocimiento del sujeto sobre un concepto particular.

La teoría establece que la comprensión de un concepto resulta al construir las siguientes estructuras mentales: 1) Acción, corresponde a realizar acciones sobre objetos (físicos o mentales), las cuales están dirigidas y orientadas por un sujeto externo, que se realizan de manera mecánica o algorítmica, sin reflexionar sobre estas; 2) Proceso, es el resultado de la interiorización de las acciones que se realizan repetidamente y se reflexiona sobre estas. Esta estructura es dinámica y se evidencia cuando el sujeto es capaz de realizar las mismas acciones pero ahora en forma autónoma y dirigida por una estructura mental interna. Otra manera de generar procesos es por mecanismos de coordinación o inversión de uno o más procesos en la mente; 3) Objeto, se genera cuando el sujeto realiza acciones sobre un proceso, por tanto, cuando se logra la comprensión de un concepto como objeto, el sujeto pasa de concebir el proceso de una entidad dinámica a una estática, en términos de la teoría se afirma que el proceso por el mecanismo de encapsulación se ha transformado en un objeto; además, cuando el individuo requiere determinar cómo está configurado el objeto y establecer relaciones entre sus elementos constitutivos, en términos de la teoría se dice que el objeto se desencapsuló en el proceso que lo generó; 4) Esquema, corresponde al conjunto de acciones, procesos y objetos utilizados en la resolución de problemas (Arnon et al., 2014). En la Figura 1 se representan las estructuras y los mecanismos mentales como formas de comprender un concepto matemático.

Figura 1. *Relaciones entre estructuras y mecanismos mentales en la Teoría APOE*



Nota: La figura presenta relación entre las estructuras mentales y mecanismos para la construcción del conocimiento matemático. Fuente: APOS Theory (p.18), por Arnon, I., 2014, Springer.

La descripción de la activación de los mecanismos mentales de interiorización, coordinación, inversión, encapsulación, desencapsulación y tematización para la construcción de las estructuras mentales de acciones, procesos, objetos y esquemas que podría necesitar un sujeto para comprender un concepto matemático, se formula en un modelo hipotético denominado descomposición genética DG, esta no es única, y su propuesta es el resultado de un análisis teórico del concepto, de las experiencias de enseñanza y aprendizaje, del análisis de los libros de texto y de investigaciones previas, además es el referente para la enseñanza y el análisis de la información (Trigueros, 2005).

DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA PARA LA NOCIÓN DE RECTA

E.1 Esquema, plano cartesiano. Conocimientos previos con los conceptos de plano cartesiano, pareja ordenada y función, comprendidos como procesos.

E.2 Esquema de pendiente de la recta.

1.a. Acción **A_1**, ubicar parejas ordenadas (x,y) en el plano cartesiano.

1.b Acción **A_2**,, establecer la condición de colinealidad de puntos en una gráfica.

1.c. Acción **A_3**, calcular la pendiente m, utilizando la representación gráfica de una recta, tomar dos puntos particulares y establecer la razón entre el desplazamiento vertical y el desplazamiento horizontal; o utilizando la representación algebraica y numérica: dados puntos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$, entonces

.

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

2.a. Interiorizar las acciones **A_1**, **A_2** y **A_3** en el proceso **P_1**: calcular la pendiente de la recta, dados dos puntos arbitrarios representados gráfica, numérica o algebraicamente.

E.3. Esquema de la recta.

1.d. Acción **A_4**, determinar la ecuación de la recta conociendo explícitamente un punto $P(x_1,y_1)$ y la pendiente m o inferidos de la representación gráfica. (1.e)

2.b. Interiorizar la acción **A_4** en el proceso P_2, ecuación punto pendiente: conocidos la pendiente m y un punto $P(x_1,y_1)$, la ecuación de la recta es: $y-y_1=m(x-x_1)$.

1.e. Acción **A_5**, hallar la ecuación de la recta y graficarla, conociendo la ordenada al origen (0,b) y la pendiente m.

2.c. Interiorizar las acciones **A_5**, en el proceso **P_3**, ecuación pendiente coordenada al origen: dada la ordenada al origen y la pendiente de una recta, determinar la ecuación canónica de la recta como: y=mx+b.

1.f. Acción **A_6**, hallar la ecuación de la recta dados dos puntos: $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$, por medio de la ecuación

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

2.d. Interiorizar la acción **A_6**, en el proceso **P_4**, ecuación con dos puntos: Dados dos puntos arbitrarios (x_1,y_1) y (x_2,y_2) de una recta, determinar su ecuación.

3.a. Coordinar los procesos **P_1** y **P_4** en el proceso **P_2,** ecuación punto pendiente: dado un punto (x_1,y_1) y la pendiente m de una recta determinar su ecuación mediante la expresión $y-y_1=m(x-x_1)$.

3.b. Coordinar los procesos **P_2** y **P_3** en el proceso **P_5**, paralelismo: Dos rectas son paralelas, si y solo si, las pendientes coinciden, $m_1=m_2$.

3.c. Coordinar los procesos **P_2** y **P_3** en el proceso **P_6**, perpendicularidad: Dos rectas con pendientes m_1 y m_2, son perpendiculares, si y solo si, $m_1 \cdot m_2= -1$.

3.d. Coordinar los procesos **P_2** y **P_3** en el proceso **P_7,** rectas secantes: dadas dos rectas con ecuaciones $y=m_1x+b$ y $y=m_2x+c$, son secantes no perpendiculares y no paralelas, si se cumple que: $m_1 \neq m_2$ y que $m_1 \cdot m_2 \neq -1$.

4.a. Encapsular el proceso $\mathbf{P_2}$ en el objeto $\mathbf{O_1}$, ecuación general de la recta: Ax+By+C=0. A, B, C, son números reales.

5.a. Desencapsular el objeto $\mathbf{O_1}$, en el proceso $\mathbf{P_2}$, ecuación punto pendiente.

5.b. Desencapsular el objeto $\mathbf{O_1}$ en el proceso $\mathbf{P_3}$, ecuación pendiente coordenada al origen.

METODOLOGIA

Corresponde a un enfoque mixto, de tipo cualitativo, orientada a la comprensión que tiene por objeto la descripción e interpretación de la realidad educativa desde adentro (Bisguerra et al., 2009) y cuantitativo como complemento para caracterizar la comprensión según el análisis de las valoraciones en el desempeño de los estudiantes utilizando la lógica fuzzy (Chang, 1968; George y Veeramani, 1994).

PARTICIPANTES Y CONTEXTO

La muestra es de cinco Estudiantes de grado noveno de Educación Básica en Colombia, que se identifican con el seudónimo E_i para i=1…5, que participaron en secuencias de enseñanza y luego respondieron a un cuestionario de donde se infiere la comprensión del concepto de ecuación lineal, según el análisis del esquema de este concepto en el marco de la teoría APOE.

FASES DE LA INVESTIGACIÓN

La investigación comprendió el siguiente ciclo: 1) Análisis teórico, corresponde a un estudio histórico y epistemológico del concepto y el análisis de libros de texto, para identificar los elementos matemáticos, las relaciones lógicas y sistemas de representación que configuran el concepto, con el propósito de proponer una DG de la ecuación lineal; 2) El diseño de la instrucción, fase relacionada con la planeación de actividades orientadas por la DG y su implementación a través del ciclo de enseñanza ACE (Actividades, Clases y Ejercicios), con la finalidad de posibilitar las construcciones mentales para la comprensión de la línea recta; 3) Recolección y análisis de información, comprende describir y explicar la compresión del concepto por los estudiantes, tanto en su construcción en el ciclo ACE, como posterior a este ciclo al desarrollar un cuestionario para evidenciar y validar la DG. (Arnon et al., 2014).

DISEÑO DEL CUESTIONARIO

Tarea 1. El propósito corresponde a realizar lo descrito en 1.a. y 1.b. de la DG: acciones $\mathbf{A_1}$ *ubicar puntos en el plano cartesiano* y $\mathbf{A_2}$ *representar puntos colineales*.

T.1. Los datos representados en la Tabla 1 corresponden a los resultados después de realizar una prueba de laboratorio.

Tabla 1. *Datos del experimento*

x	*-4*	*-2*	*0*	*1*	*3*	*7*	*12*
y	*12*	*6*	*0*	*-3*	*-9*	*-21*	*-36*

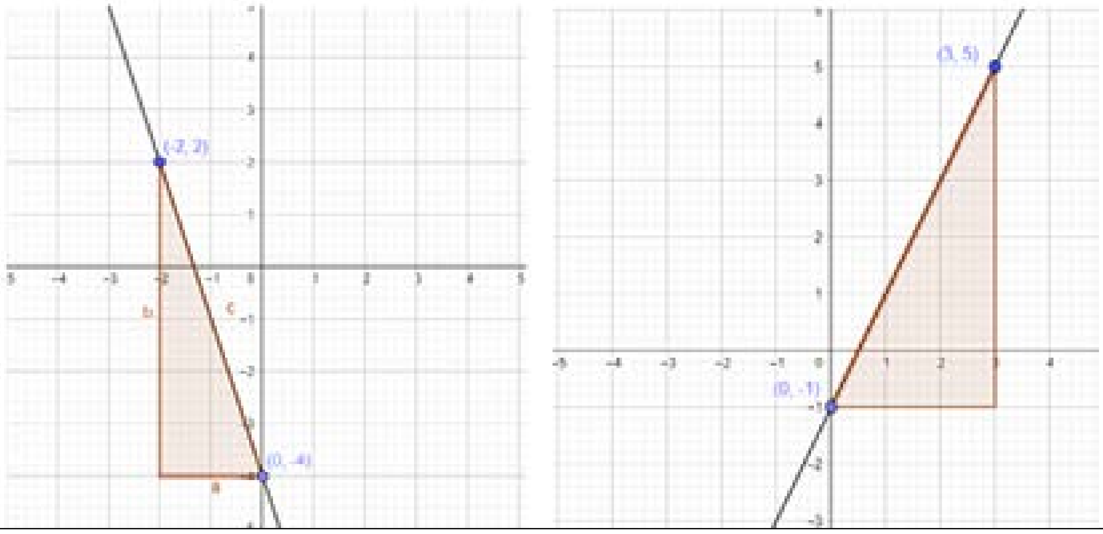
a) Identificar las diferentes parejas ordenadas.

b) Graficar en un plano cartesiano la información contenida en la tabla.

Tarea 2. El propósito es promover la construcción 1.c. de la DG: *acción **A_3** calcular la pendiente de la recta a partir de la representación gráfica*.

T.2. *En la Figura 2 se representan dos rectas, determinar el valor de la pendiente de cada una.*

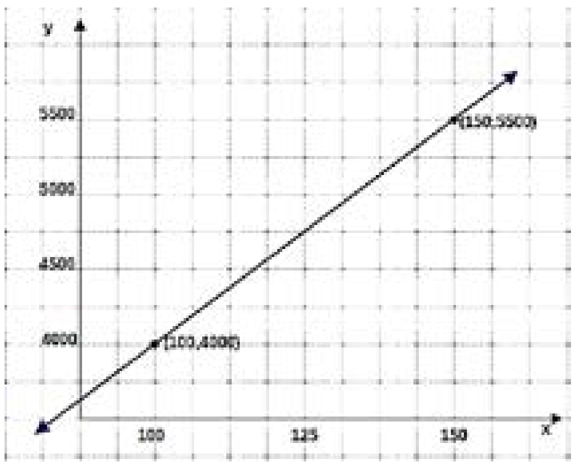
Figura 2. *Grafica de dos rectas en diferentes planos cartesianos*



Tarea 3. La siguiente situación promueve lo descrito en los numerales 1.c., 1.d., 2.a. y 2.b. de la DG: acción **A_3** - calcular la pendiente de la recta y la acción **A_4** - hallar la ecuación de la recta dado un punto y la pendiente, esta última acción se interioriza en el proceso **P_2**, punto pendiente.

T.3. Roberto tiene un negocio de fabricación y venta de dulces. En la Figura 3 se muestra la relación entre la cantidad x *de dulces producidos, y la ganancia obtenida* y.

Figura 3. *Relación entre cantidad de dulces producidos y ganancia*



¿Qué expresión matemática ayuda a Roberto a determinar la ganancia al producir y vender cualquier cantidad de dulces?

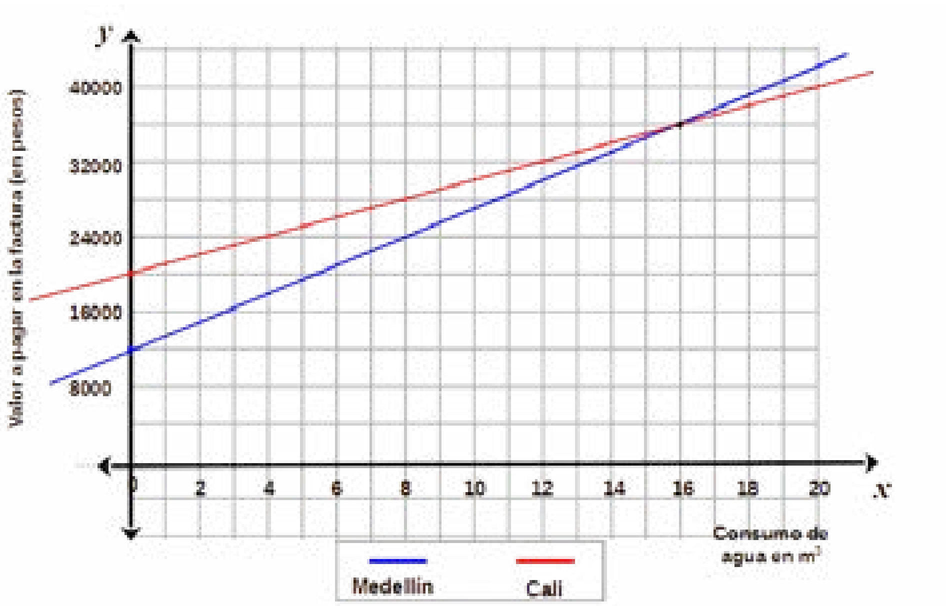
Tarea 4. Tiene como objetivo suscitar la construcción de lo descrito en 1.d., 2.b. o 1.e., 2.c. de la DG: Las acciones **A_4** - Hallar la ecuación de la recta dado un punto y la pendiente e interiorizarla en el proceso **P_2**, ecuación punto pendiente; o **A_5** - Hallar la ecuación de la recta, dada la ordenada al origen (0,b) y la pendiente e interiorizarla en el proceso **P_3**, ecuación pendiente coordenada al origen, determinar la ecuación canónica de la recta de la forma y=mx+b. Además, la construcción 3.d. de la DG: Coordinar los procesos **P_2** y **P_3** para generar el proceso **P_7** - establecer si las rectas dadas son secantes, verificando que $m_1 \neq m_2$ y no perpendiculares, si $m_1 \cdot m_2 \neq -1$.

T.4. Con la información presentada en la Figura 4, realizar lo siguiente.

a) Determinar la pendiente de cada recta.

b) Determinar las ecuaciones de las rectas que representan el valor del consumo de agua en cada ciudad.

Figura 4*. Relación consumo y costo del servicio de agua en Cali y Medellín.*



c) Calcular los costos de los consumos que aparecen en Tabla 2.

d) ¿Qué representa el punto de corte con el eje y en cada una de las gráficas?

e) ¿Qué significa el punto de corte entre las gráficas?

Tabla 2*. Costo de los consumos de agua en Cali y Medellín.*

x (Consumo en m³)	*0*	*4*	*10*	*16*	*20*	*25*	*30*
M							
C							

Nota: M. indica el costo del servicio de agua en Medellín y C. el costo del servicio de agua en Cali.

Tarea 5. La siguiente situación está relacionada con 2.a., 2.d. y 3.a. de la DG: construir el proceso **P₁** - calcular la pendiente de la recta por medio de la expresión: $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ a partir de dos puntos dados; **P_4** - Encontrar la ecuación de la recta por medio de la expresión algebraica

$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ procesos que por el mecanismo de coordinación se genera

el proceso **P_2 -** Dado un punto $P_1(x_1,y_1)$ y la pendiente m, calcular la ecuación de la recta, $y-y_1=m(x-x_1)$.

T.5. Una compañía de telefonía celular cobra mensualmente a sus afiliados una cuota fija, más $ 250 por cada minuto de tiempo al aire. Patricia utiliza en un mes 170 minutos y paga una cuenta de $ 51000.

a) Completar la Tabla 3, que establece la relación entre la cantidad de minutos usados y el costo a pagar

b) Representar gráficamente esta relación.

c) Escribir la ecuación de la recta que modela el valor a pagar por cualquier cantidad de minutos empleados.

Tabla 3. Tabla de costos y y cantidad de minutos usados x.

x	*1*	*5*	*10*	*20*	*50*
y					

Tarea 6. El objetivo de esta situación es fomentar las construcciones 2.a., 2.d. y 3.b. de la DG: Coordinar los procesos **P_1** - dados dos puntos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_1(x_2,y_2)$, calcular la pendiente $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

con **P_4** - calcular la ecuación de la recta por medio de la expresión algebraica

$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ para generar el proceso **P_5** - dos rectas son paralelas si cumplen que $m_1=m_2$.

T.6. Justifique: a) Por qué los puntos de coordenadas A(-1,-1); B(2,3);C(8,-1) y D(5,-5) determinan un paralelogramo, analizando las pendientes de las rectas que contienen los lados. ¿El paralelogramo es un rectángulo?

b) Determine las ecuaciones de las rectas que contienen los lados que definen el paralelogramo.

Tarea 7. El propósito de esta tarea es promover las construcciones descritas en 2.a. y 3.c., de la DG:

el proceso **P_1** - dados dos puntos calcular la pendiente de la recta $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, y el proceso **$P_6$** - Dos rectas con pendientes m_1 y m_2 son perpendiculares, si verifican que $m_1 \cdot m_2= -1$, encapsular los proceso **P_6** en el objeto **O_1 -** ecuación general de la recta en la forma: Ax+By+C=0, *T.7. Dados los siguientes puntos A(-3,-1); B(-3,2) y C(2,-1), vértices de un polígono. a) Justifique que porqué el polígono es un triángulo rectángulo, analizando las pendientes de los segmentos que define sus lados.*

b) Encuentre la ecuación de las rectas que contiene cada lado, en la forma general Ax+By+C=0 y represente gráficamente.

Tarea 8. El objetivo de esta tarea es fomentar los descrito en 3.b., 4.a., 5.a. y 5.b. de la DG: desencapsular el objeto $\mathbf{O_1}$ - ecuación general de la recta Ax+By+C=0, en el proceso $\mathbf{P_2}$ - definir ecuación de la recta como: $y-y_1=m(x-x_1)$, además el objeto $\mathbf{O_1}$, por el mecanismo de desencapsulación se regresa al proceso $\mathbf{P_3}$ **-** Dada la pendiente m y la ordenada al origen (0,b), determinar la ecuación de la recta y=mx+b. Por coordinación del proceso $\mathbf{P_2}$ con el proceso $\mathbf{P_3}$ se genera el proceso $\mathbf{P_5}$ - dadas dos rectas determinar si son paralelas si solo si se cumple que $m_1=m_2$ y $\mathbf{P_6}$ **-** Dos rectas con pendientes m_1 y m_2 son perpendiculares, si verifican que $m_1 \cdot m_2= -1$.

T.8 Hallar la ecuación de la recta, en forma pendiente intercepto con el eje y, graficarla, según las siguientes características
a) El punto (-3,2) pertenece a la recta y es paralela a la recta cuya ecuación es x+3y=1.
b) El punto (2,4) pertenece a la recta y es perpendicular a x-5y+10=0.

ANÁLISIS

Con base en el desempeño de los estudiantes en cada uno de los ítems de las tareas del cuestionario, se asignaron las escalas de 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1; con 0 cuando no contesta nada en la tarea y 1 cuando responde correctamente el ítem de la tarea. Estas escalas permitieron caracterizar la comprensión de la recta en términos de las estructuras mentales al utilizar la lógica fuzzy o borrosa que se describe a continuación.

Un conjunto fuzzy se define matemáticamente mediante la asignación a cada elemento de un universo de referencia de un valor real en el intervalo [0,1] que representa su grado de pertenencia a dicho conjunto. Esta idea introduce la noción de “borrosidad” a la pertenencia a un conjunto y permite modelizar muchos fenómenos reales en los que los objetos no tienen un criterio totalmente definido de pertenencia (Chang, 1968; Zadeh, 1965).

Para el caso de estudio sobre la comprensión de línea recta, la función de pertenencia puede indicarnos en qué medida un estudiante comprendió este concepto según la forma cómo resolvió las tareas del cuestionario.

Kramosil y Michalek (1975) asumen desde la perspectiva fuzzy la distancia entre objetos, en esta investigación se utilizó la noción de espacio métrico fuzzy de George y Veeramani (1994), al considerar la métrica fuzzy estándar inducida por la métrica euclídea d sobre el conjunto X, que viene dada por la ecuación (1).

$$F_d(x,y,t) = \frac{t}{t+d(x,y)} \tag{1}$$

La métrica o distancia fuzzy, $F_{d.}$ puede interpretarse como una valoración de la distancia euclídea, d(x,y), en términos cualitativos. Si d(x,y)=0, entonces se tiene que F_d=1 lo que se puede interpretar como "cercanía extrema". Por otra parte, a medida que d(x,y) crece indefinidamente (d(x,y)→∞), F_d tiende a cero, es decir se aproxima a un valor "lejano extremo", independiente del valor de t>0.

En este sentido, al desempeño de cada estudiante se le asoció un vector de en R^{17} que indica el grado de comprensión del esquema de recta según las 17 estructuras mentales descritas de la DG. Además, se realizaron experimentos numéricos con el propósito de refinar y fijar el valor de t que permite establecer el grado de pertenencia del desempeño de un estudiante al conjunto fuzzy, definido como "grado de comprensión del esquema de recta".

Para estimar el valor de t, se asume que un estudiante con los conceptos previos está en capacidad para comprender lo que pide la primera tarea e iniciar su resolución, este hecho se representó asociando al estudiante el vector y en X, X subconjunto de R^{17} con las tres primeras componentes 1 y el resto 0, que corresponde a la comprensión como acciones de las tareas relacionadas con las estructuras $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{A_3}$ de la DG. Por otra parte, si un estudiante en su desempeño tiene todas las respuestas del cuestionario correctas, se le asocia el vector x_0 que perenece a R^{17} con todas las componentes con valor de 1, el cual será un valor fijo referente para calcular las medidas fuzzy. Por tanto, y debería tener un grado de pertenencia inferior o igual a μ(y)=0.25, que se obtiene con un valor de t≤1.2, situación que se representa para F_d en la ecuación (2).

$$\mu(y) = F_d(x_0, y, 1.2) = \frac{1.2}{1.2 + d(y, x_0)} \qquad (2)$$

Con este análisis queda definida el espacio métrico X subconjunto de R_{17} con la métrica μ dada por la función en (3) para todo vector X de X, X subconjunto de R_{17}

$$\mu(x_A) = F_d(x_0, x_{A,1.2}) = \frac{1.2}{1.2 + d(x_A, x} \qquad (3)$$

RESULTADOS

Caracterización de la comprensión del esquema de recta.

El desempeño de los estudiantes con relación a cada una de las tareas se sintetizan en la **Tabla 4**, en dónde: la columna 1, corresponde a las construcciones enumeradas de la DG; la columna 2, a las estructuras mentales de acción **A**, proceso **P** (en algunos casos resultan de interiorización de acciones o en otros por coordinación de otros procesos, como por ejemplo la notación $P_2 \leftrightarrow P_1$ C P_4 significa la coordinación del proceso $\mathbf{P_1}$ con el proceso $\mathbf{P_4}$ para generar el proceso P_2) y de objeto **O**, la desencapsulación de un objeto en proceso se nota por ejemplo $O_1 \rightarrow P_2$, que significa que el objeto $\mathbf{O_1}$ se desencapsuló en el proceso $\mathbf{P_2}$; en la columna 3, los ítems de tareas del cuestionario que al resolverlas se espera que susciten la construcciones mentales de la columna 2; en las columnas 4 a 8, se presentan las valoraciones del desempeño de los estudiantes al resolver las tareas en las escalas previamente definidas.

Tabla 4. *Desempeño de los estudiantes*

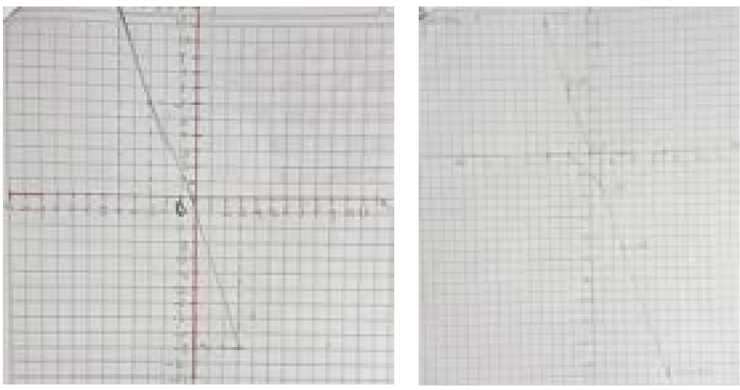
			Valoración del desempeño de los Estudiantes				
DG	Estructuras	Tareas	E-1	E-2	E-3	E-4	E-5
1.a.	A_1	T1.a	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
1.b.	A_2	T1.b	1.00	1.00	1.00	0.75	0.50
1.c.	A_3	T2	1.00	1.00	1.00	0.50	0.25
2.a.	P_1	T3	1.00	1.00	0.75	0.25	0.25
1.d.	A_4	T3	1.00	1.00	0.75	0.25	0.25
2.b.	P_2	T3	1.00	0.75	0.50	0.50	0.25
1.e.	A_5	T4.a.b	1.00	0.75	0.50	0.25	0.25
2.c.	P_3	T4.c	1.00	0.75	0.50	0.75	0.25
1.f.	A_6	T5.a.	1.00	1.00	0.50	0.50	0.50
2.d.	P_4	T5.a. b.	1.00	0.75	0.50	0.25	0.25
3.a.	$P_2 \leftrightarrow P_1 \text{ C } P_4$	T5.c.	1.00	0.75	0.50	0.25	0.25
3.b.	$P_5 \leftrightarrow P_2 \text{ C } P_3$	T6	0.75	0.75	0.50	0.25	0.25
3.c.	$P_6 \leftrightarrow P_2 \text{ C } P_3$	T7	0.75	0.75	0.50	0.25	0.00
3.d.	$P_7 \leftrightarrow P_2 \text{ C } P_3$	T4.d.e	0.75	0.75	0.50	0.25	0.00
4.a.	O_1	T8	0.75	0.75	0.50	0.25	0.00
5.a.	$O_1 \rightarrow P_2$	T8.a	0.75	0.75	0.25	0.25	0.00
5.b.	$O_1 \rightarrow P_3$	T8.b	0.75	0.50	0.25	0.00	0.00
	μ(E-i)		0.66	0.56	0.38	0.30	0.27

En la última fila de la Tabla 4, se calcula la medida fuzzy de cada estudiante según la ecuación (3).

Algunas características de la comprensión en cada tarea se describen a continuación de manera cualitativa: respecto a la Tarea 1, la mayoría de los estudiantes la resuelven correctamente como evidencia el desempeño de E-1 en la Figura 5 a la izquierda; sin embargo, algunos presentan dificultades para representar gráficamente algunas parejas ordenadas, como es el caso del estudiante E-5, en la Figura 5 de la derecha. Los resultados de la muestra se presentan en la Tabla 4, filas 1 y 2.

Figura 5.

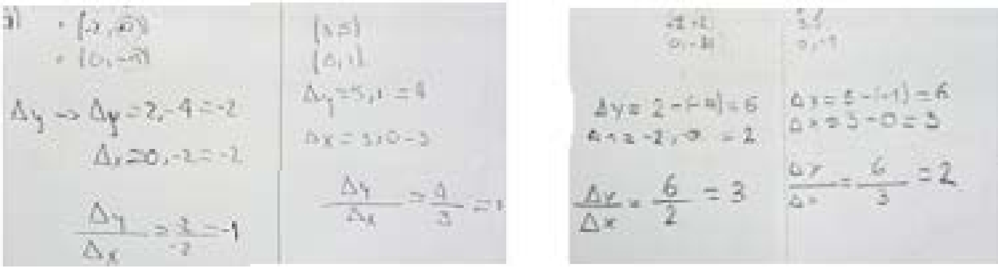
Solución de la Tarea 1, estudiantes E-1 izquierda y E-5 derecha.



Fuente: *Cuestionario resuelto por los estudiantes E-1 y E-5.*

En la solución de la tarea 2, la mayoría de los estudiantes realizan correctamente estas acciones como se evidencia en la Figura 6 de la izquierda por E-2, sin embargo, algunos cometen errores en las operaciones con las parejas ordenadas y con enteros, como el caso de E-4 que se presenta en la Figura 6 de la derecha.

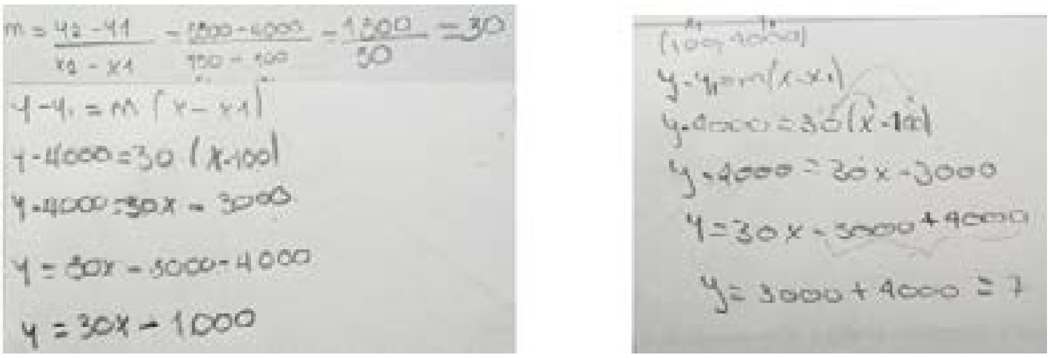
Figura 6. Solución de la Tarea 2 por E-2, izquierda y E-4 derecha



Fuente: *Cuestionario resuelto por los estudiantes E-2 y E-4.*

Con respecto a la Tarea 3, la mayoría de los estudiantes construyen el proceso punto pendiente, como se evidencia por E-1 a la izquierda de la Figura 7, algunos calculan la pendiente, pero cometen errores de tratamiento en la representación algebraica al determinar la ecuación de la recta, como lo manifiesta E-4, en la Figura 7 derecha.

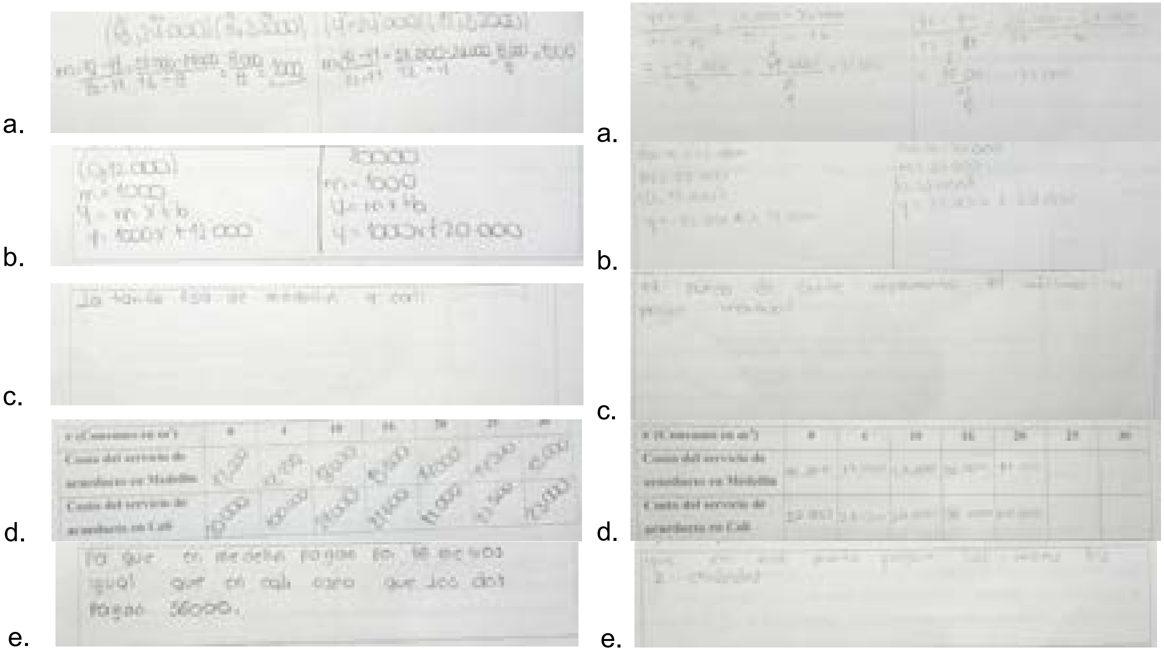
Figura 7. Solución de la tarea 3 por E-1 izquierda y E-4 derecha.



Fuente: *Cuestionario resuelto por los estudiantes E-1 y E-4.*

En la Tarea 4, estudiantes como E-3, Figura 8 izquierda, demuestran construir la ecuación de la recta como el proceso $\mathbf{P_3}$; Estudiantes como E-5, Figura 8 derecha, presentan errores en las acciones para calcular la pendiente, razón por la cual se les dificulta interiorizarlas y comprenderla como proceso, es decir, establecer la ecuación de la recta en la forma punto pendiente o pendiente coordenada al origen y de esta no infieren información relacionada con el contexto de la situación propuesta, al traducir el concepto entre la representación gráfica, algebraica y numérica.

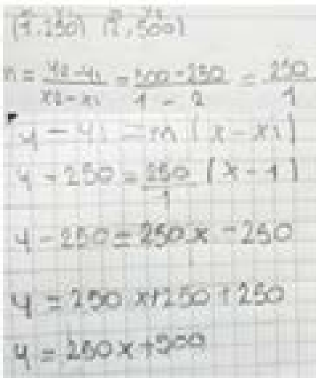
Figura 8. Solución de la Tarea 4 por E-3 Izquierda y E-5 derecha.

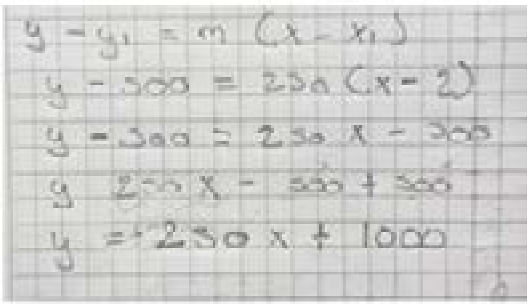


Fuente: *Cuestionario resuelto por los estudiantes E-3 y E-5.*

En la Tarea 5, estudiantes como E-1, Figura 9 izquierda, hallan la ecuación de la recta como un modelo que representa la situación. Otros estudiantes como E4, Figura 9 derecha, manifiestan errores en el tratamiento algebraico para hallar la ecuación y por tanto no infieren información.

Figura 9. Solución de la Tarea 5. Estudiante E-1, izquierda y E-4 derecha

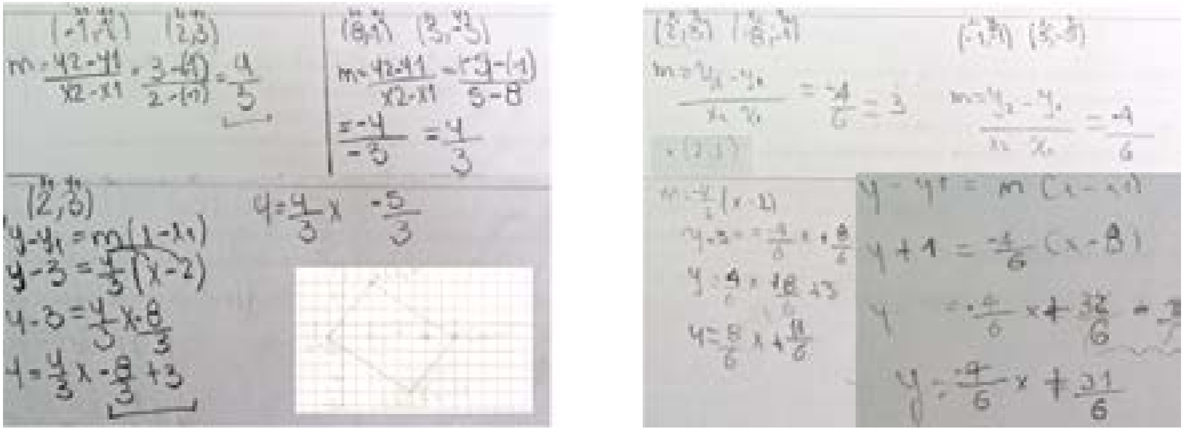




Fuente: *Cuestionario resuelto por los estudiantes E-1 y E-4 respectivamente.*

En la Tarea 6, algunos estudiantes resuelven correctamente las tareas como E-1 y E-3 en la Figura 10 izquierda; otros estudiantes como E-4, representa gráficamente el problema, determinan algunas pendientes, sin embargo, comete errores en los procedimientos algebraicos y no establece las relaciones de paralelismo, intersección y perpendicularidad, Figura 10 derecha.

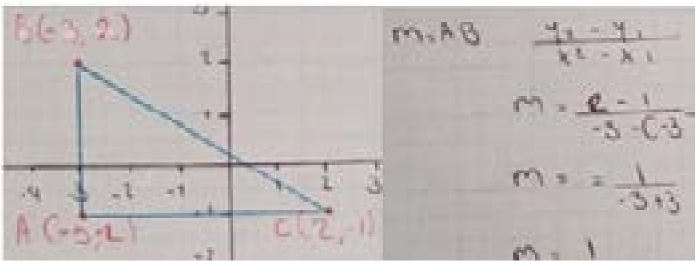
Figura 10. Solución de la tarea 6. Estudiante E-3 izquierda y E-4 derecha



Fuente: *Cuestionario resuelto por los estudiantes E-3 y E-4 respectivamente.*

En la Tarea 7, E-4 sólo representa el triángulo rectángulo y no comprende como proceso el concepto de pendiente (Figura 11); otros estudiantes presentan dificultades para interpretar la pendiente de una recta cuando esta es vertical (división por cero) o cuando la recta es horizontal (pendiente cero) como se presenta en la Tabla 4.

Figura 11. Solución de la tarea 7 por el estudiante E-4



Fuente: *Cuestionario estudiante E-7.*

Para la Tarea 8, el estudiante E-2 resuelve correctamente la tarea; el estudiante E-1 encuentra la ecuación en la forma propuesta, sin embargo, presenta dificultades para representar gráficamente; el estudiante E-3 encuentra sólo una ecuación de la recta, y se evidencian dificultades para relacionar e interpretar la información. Los estudiantes E-4 y E-5 no respondieron, ver Tabla 4.

Con respecto al desempeño general de los estudiantes, se calculó la medida fuzzy al vector asociado a cada estudiante y se presentan en la última fila de la Tabla 4. Se asume que un estudiante comprende la recta como acción si las valoraciones en el desempeño de las acciones y la compresión de la pendiente como proceso P_1 se le asignan valores mayores o iguales a 0.5; a las demás estructuras de procesos se le asigna un valor de 0.25 que significa que está en capacidad de comprender la recta como proceso, y a las de objeto como 0; esta situación se representa en el vector x_A en la Tabla 5, el valor de la métrica fuzzy para este vector es $\mu(x_A)=0.3$, ecuación (4).

Tabla 5. Vectores asociados a acciones, procesos y objetos

	A1	A2	A3	P1	A4	P2	A5	P3	A6	P4	P2	P5	P6	P7	O1	O1 P2	O1 P3
X_A=	[0.75	0.75	0.75	0.75	0.5	0.25	0.5	0.25	0.5	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0	0	0]
X_P	[0.75	0.75	0.75	0.75	0.5	0.25	0.5	0.25	0.5	0.75	0.5	0.5	0.5	0.5	0.25	0.25	0.25]
X_{Ob}=	[0.75	0.75	0.75	0.75	0.5	0.25	0.5	0.25	0.5	0.75	0.5	0.5	0.5	0.5	0.75	0.5	0.5]

$$\mu(x) = F_d(x_0, x, 1.2) = \frac{1.2}{1.2 + d(x, x_0)} \quad (4)$$

De manera similar un estudiante prototipo con vector asociado x_p en la Tabla 5 y $\mu(x_P)=0.38$ se considera que tiene las concepciones mínimas de los elementos que forman el esquema para comprender la recta como proceso.

Finalmente, un estudiante prototipo con vector asociado x_{ob} en la Tabla 5 y $\mu(x_{ob})=0.42$ se considera que tiene las concepciones mínimas de los elementos que forman el esquema para comprender la recta como objeto.

Con estos valores umbrales se establece para un estudiante con vector asociado en su desempeño x vector de X, X subconjunto de R^{17} y medida fuzzy $\mu(x)$ que: 1) Si $0.25\leq\mu(x)\leq0.38$, entonces demuestra comprender la recta como una estructura de acción, para el caso de estudio E-4 y E-5, algunas manifestaciones de esta concepción es que cuando la pendiente de la recta es positiva y los puntos que la definen están en el primer cuadrante no presentan dificultades en su cálculo e interpretación; sin embargo, en otras situaciones presentan errores en las operaciones con números reales, no relacionan el significado cuando las rectas son horizontales o verticales y no la interpretan en situaciones de razones de cambio entre dos variables. Por tanto, se sugiere diseñar y hacer énfasis en actividades que promuevan la comprensión de la pendiente como proceso u objeto; 2) Sí $0.38<\mu(x)\leq0.42$, entonces demuestra comprender la recta como proceso, como E-3 en el caso de estudio, que se evidencia al utilizar y aplicar el concepto de pendiente para determinar la ecuación de la recta en sus diferentes formas (con dos puntos, pendiente coordenada al origen y punto pendiente) y la representan en forma gráfica, numérica y algebraica; además la aplican para resolver algunas situaciones problema; 3) Finalmente, si $0.42<\mu(x)\leq1$ demuestra la comprensión de la recta como objeto, caso E-4 y E-5, que se caracteriza por establecer las relaciones entre los elementos del esquema para resolver ejercicios y situaciones relacionadas con la recta, como paralelismo, perpendicularidad e intersección, además están en capacidad para aplicar el esquema de la recta para resolver problemas de mayor complejidad que incluyan relaciones con otros esquemas como por ejemplo sistemas de ecuaciones lineales, secciones cónicas, funciones trascendentes, derivadas e integrales.

CONCLUSIONES

De acuerdo a los resultados del estudio, de su discusión y análisis, se extraen las siguientes conclusiones: 1) La formulación y validación de la DG que orientó el ciclo ACE y el análisis del desempeño de los estudiantes, es un aporte como referencia para la enseñanza y aprendizaje de la línea recta y para el caso particular de la función lineal y afín; 2) El diseño de las situaciones problema contextualizadas que requieren del modelo de la recta, despierta la motivación, el aprendizaje colaborativo, promueve la comprensión del objeto matemático a través del tratamiento y conversión entre las diferentes representaciones; 3) Es indispensable diseñar actividades y ejercicios sobre la recta, incrementando de forma adecuada la complejidad, con el propósito de activar los mecanismos en la mente del estudiante para construir, asimilar y organizar las estructuras de manera progresiva, no secuencial, en planos superiores de pensamiento, que servirán de soporte para la construcción otros esquemas fundamentales como función, limite, derivada e integral.

REFERENCIAS

Acevedo Rodríguez, G., Vergel Ortega, M., & Nieto Sánchez, Z. (2020). *Transposición didáctica para apoyar la enseñanza de la función lineal y afín para estudiantes de cálculo usando las NTIC. Aglada, 11*(2), 200-221.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktac, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory, A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education.* New York: Springer Science.

Bisguerra, R., Dorio, I., Massot, I., & Sabariego, M. (2009). Características Generales de la Metodología Cualitativa. En *Metodología de la investigación educativa.* Madrid: La Muralla. S.A.

Campeón, M., Aldana, E., & Villa, J. (2018). *Ingeniería didáctica para el aprendizaje de la función lineal mediante la modelación de situaciones. Sophia*, 116-126.

Chang, C. (1968). Fuzzy topological spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 24*(1), 182-190.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall, *Advanced mathematical thinking* (págs. 95-123). Dordrecht: Kluwer.

George, A., & Veeramani, P. (1994). O*n some results in fuzzy metric spaces.* Fuzzy Sets and Systems*, 64*, 395-399.

Gómez, N., Sánchez, D., & Sepúlveda, O. (2021). *La comprensión del movimiento rectilinea através de las representaciones semióticas. Revista Boletín Redipe, 10*(1), 195-204.

Kramosil, J., & Michalek, J. (1975). F*uzzy metric and statistical metric spaces. Kybernetika, 11*, 621-633.

Piaget, J. (1985). *The Equilibration of Cognitive Structures. (T. T. Brown, Trad.) Cambridge MA (original published 1975).* Cambridge: Harvard University Press.

Rodríguez, E. L., & Valdivé, C. (2011). *Análisis histórico de la función afín y la ecuación lineal en la economía desde el enfoque ontosemiótico. TEACS, 4*(8), 17-29.

Torres, L., & Angulo , O. (2017). *La articulación entre situaciones problema de proyectos productivos*. Iberoamericana de educación Matemática, *UNIÓN*(50), 92-110.

Trigueros, M. (2005). *La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior*. Educación matemática, *17*, 5-31.

Vanegas, D., & Escalona, M. (2010). R*epresentaciones de funciones matemáticas de una variable*. Omnia, *16*(3), 101-122.

Villa, J. A., Bustamante, C., & Osorio, A. (2009). *El proceso de modelación matemática. Una mirada a la práctica del docente*. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa-Colegio Mexicano de Matemática Educativa, 1443-1451.

Zadeh, L. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 338-353.