PERSPECTIVAS DEL APRENDIZAJE DE LAS MATEMATICAS EN LA ESCUELA PRIMARIA

A. Aizpún López
M. Casals Colldecarrera
J.J. Suarez Saldaña

INDICE

1) Las Matemáticas en la Educación Primaria.- Interpretaciones sobre la presencia de las Matemáticas en la escolaridad primaria.- Las Matemáticas en los Curri-culum de Primaria: El área de Matemáticas en la Reforma de 1970.- Los Programas Renovados de 1981 y 1982.- Las Matemáticas y la reforma en marcha.- Las Matemáticas en los textos escolares.

1) Las Matemáticas en la Educación Primaria.- Interpretaciones sobre la presencia de las Matemáticas en la escolaridad primaria.- Las Matemáticas en los Curri-culum de Primaria: El área de Matemáticas en la Reforma de 1970.- Los Programas Renovados de 1981 y 1982.- Las Matemáticas y la reforma en marcha.- Las Matemáticas en los textos escolares.

11) Nuestra investigación sobre la situación de los escolares al salir de 6° E.G.B.: diseño y resultados: Nuestro programa de diagnóstico: a) Procesos matemáticos, contribución de los colegios extremos; b) Recursos, representaciones gráficas; e) Problemas, contribución de los problemas extremos.

111) Algunas reflexiones sobre los resultados obtenidos.

1) TRADICION ESCOLAR DE LAS MATEMATICAS

1.1. Las Matemáticas en la Educación Primaria

Desde siempre, la educación a cualquier nivel y en cualquier campo, ha sido una preparación del alumno para que en su futuro pudiera desarrollar la tarea que eligiera o que pudiera. Su finalidad ah sido y es siempre que ese alumno domine unos conocimientos, desarrolle determinadas capacidades y adquiera ciertos hábitos; según sea el grado de destrezas manifiestas y según sea la perseverancia del alumno en adoptar unas u otras actitudes ante las situaciones educativas, así se consideran logrados el desarrollo de las capacidades y la adquisición de los hábitos; alcanzar ambas cosas se toma como síntoma cierto de que los conocimientos han sido aprehendidos con su significado íntegro.

En 10 que respecta a la Educación Primaria, lo que ha podido variar con el tiempo ha sido la lista de conocimientos necesarios, la designación de las capacidades útiles y la de los hábitos deseables. Además, siempre se ha pensado que los conocimientos se pueden adquirir observando el mundo en que se vive, que las capacidades se desarrollan con la práctica de métodos y procedimientos adecuados y que los hábitos se asientan con la repetición.

tiempo ha sido la lista de conocimientos necesarios, la designación de las capacidades útiles y la de los hábitos deseables. Además, siempre se ha pensado que los conocimientos se pueden adquirir observando el mundo en que se vive, que las capacidades se desarrollan con la práctica de métodos y procedimientos adecuados y que los hábitos se asientan con la repetición.

Todo ello ha sido aplicado también en la Educación Primaria a las Matemáticas, que nunca han faltado en la organización escolar porque se les ha asignado un valor educativo fundamentado en la utilidad de los conocimientos que dan, la conveniencia de poseer los hábitos mentales que supuestamente pueden proporcionar sus métodos y en la aceptación de que son necesarias para la educación integral de la inteligencia. Sin embargo, todo ello, tan coherente en una presentación teórica; no es fácilmente observable en la práctica. En realidad, si se toma por Matemática lo que se enseña de 6 a 12 años, los resultados parecen indicar que todo ese valor educativo es muy dudoso.

Hasta el momento toda reforma ha conservado el sentido de la educación señalado anteriormente, que consiste en conformar la mente del individuo según los cánones de la ortodoxia intelectual aceptados como mejores en cada época. Se cambien los procedimientos para conseguir los objetivos, lo que a veces conlleva el cambio de se reconozca a la enseñanza de la Matemática en la educación general y según sea la contribución que aporte a ello.

1.2. Interpretaciones sobre la presencia de las matemáticas en la escolaridad primaria

Como posiciones más señaladas de las que suelen aparecer citamos a continuación seis de ellas, sin ninguna pretensión crítica y sólamente a título descriptivo:

a) La enseñanza de la Matemática en la Educación Primaria tiene como finalidad proporcionar una colección de técnicas instrumentales que son indispensables para la vida de relación usual y para cumplir con las exigencias de la Sociedad.

Considerada la Matemática como materia instrumental, el objetivo último de su estudio es el dominio de ese instrumento; para conseguirlo es necesario observar su funcionamiento y esa observación se hace contemplando las aplicaciones a lo que se llama la vida usual. Como contenidos se subraya en esta versión el cálculo con números naturales y con decimales, suficientes para casi todas las aplicaciones, el conocimiento de algunas fracciones, una idea de la medida extendida a fórmulas de
estudio es el dominio de ese instrumento; para conseguirlo es necesario observar su funcionamiento y esa observación se hace contemplando las aplicaciones a lo que se llama la vida usual. Como contenidos se subraya en esta versión el cálculo con números naturales y con decimales, suficientes para casi todas las aplicaciones, el conocimiento de algunas fracciones, una idea de la medida extendida a fórmulas de
áreas y volúmenes y cuestiones de proporcioanlidad (tanto por ciento, interés, etc.)

En la actualidad, al menos tal como se orientan las cosas, a esta versión corresponde también el uso de ordenadores.

b) La Matemática en la Educación Básica es una selección de temas elementales, necesarios para seguir estudios posteriores. Con esta idea, lo que aportan los temas elegidos es el conocimiento de conceptos y estrategias indispensables para abordar cómodamente el siguiente nivel de estudios. Se trata de adquirir lo que se llama "base" indispensable para continuar y esa base no la forman sólamente los conceptos teóricos sino también algunos modos de expresión peculiares como gráficas, esquemas, tablas, etc. Se mecanizan cuestiones como la divisibilidad en sus aspectos elementales, las operaciones con racionales, el tratamiento de algunas otras de medida, la resolución de ecuaciones, … Pero todo ello como tecnicismos que se saben y que constituirán puntos de apoyo o de partida indispensables para los estudios posteriores.

e) La Matemática es un campo donde el Profesor encuentra fácilmente situaciones escolares que entrenen las capacidades y destrezas intelectuales deseables para toda persona.

Esta interpretación surge de pensar que la formación intelectual del alumno ha de atender a la aparición y desarrollo de ciertas destrezas que son fundamentales para la actividad del hombre en todos los campos: saber observar, experimentar, conjeturar, comporbar, sintetizar, expresar, ... En la Matemática es infinito el número de cuestiones que pueden presentarse de forma que se practiquen todas aquellas acciones <u>de modo objetivo y con validez universal.</u> Según ésto, la finalidad última del estudio de la Matemática no es la de aprender puntos particulares sino la de practicar aquellas destrezas. Los objetivos no se fijan atendiendo solamente a los conocimientos técnicos, sino en función de 10 que la Matemática prepresenta en el desarrollo intelectual de la persona. Además, obliga a un desarrollo de los contenidos muy diferente de 10 habitual, así como a un cambio de postura en el estudio por parte del Profesor. Realmente, en esta versión el objetivo más general podría enunciarse como "adquisición de métodos" y el desarrollo de los contenidos no consistirá en proporcionar un sentido de información sobre teoremas o hechos matemáticos (cuyo conocimiento se adquiere por añadidura), sino en que el niño incida en su ejercicio sobre la técnica de pensar primero, de conjeturar más tarde, de descubrir después, de analizar 10 descubierto, de sintetizar como comprensión y, finalmente, de expresarse para comunicar lo descu-

y el desarrollo de los contenidos no consistirá en proporcionar un sentido de información sobre teoremas o hechos matemáticos (cuyo conocimiento se adquiere por añadidura), sino en que el niño incida en su ejercicio sobre la técnica de pensar primero, de conjeturar más tarde, de descubrir después, de analizar lo descubierto, de sintetizar como comprensión y, finalmente, de expresarse para comunicar lo descu-
bierto.

A veces, los que piensan que esta versión es más cierta que las otras, aseguran, no sin cierto optimismo, que con ella el alumno aprende "por descubrimiento". Sin embargo, no se ha hecho ningún estudio sistemático que intente conocer el proceso intelectual que lleva al alumno al descubrimiento de hechos, conceptos o ideas que san desconocidos por el Profesor. Lo que se ha llamado Pedagogía del descubrimiento está formado por intentos particulares de conducir al alumno ante conceptos que el Profesor ha seleccionado previamente y que conoce muy bien. Nótese, también, que las cuestiones de Matemáticas son inmejorables para ejercitar todas las destrezas mencionadas, pero no lo son para ejercitar 10 que es característico de las Matemáticas, 10 que las distinguen de los demás campos del conocimiento, y que es la demostración, porque el alumno carece en la edad de la Educación Primaria del desarrollo intelectual necesario para la generalización (o al menos eso se acepta por todos). Exagerando un tanto, puede decirse que la Matemática sirve en la Escuela para todo menos para hacer

d) En la Escuela Primaria se toma de la Matemática un lenguaje peculiar que sirve para unificar y uniformizar la resolución de problemas de distintos campos del conocimiento.

Esta es la versión que adoptan los que sostienen la tésis de que la Educación Básica debe intentar enseñar a "matematizar" situaciones (sea eso lo que sea). Aquí, el objetivo más general del área puede enunciarse como "saber pensar en términos de estructuras matemáticas". Para conseguirlo, la elección de contenidos no exige la secuencia tradicional sino que hay que repensarla en esos mismos términos de estructuras. Como en e), aparecerían conceptos y hechos de campos de la Matemática no habituales en la Enseñanza Primaria (por ejemplo, de teoría de grafos, de teoría de juegos, de programación lineal, etc).

e) La Matemática es un campo autónomo del pensamiento y su traducción escolar debe insistir en las peculiaridades de ese pensamiento propio.

Según esto, la Matemática no es una ciencia como las demás. En ciencias como la Biología, la Geología, la Química, se puede describir el objeto que estudian, pero en la Matemática no ocurre otro tanto. Admitido ésto, puede pensarse que en la cultura actual la Matemática tiene características que forman parte de la interpretación del mundo. Sus métodos, su lenguaje, han de conocerse por sí mismos.

Según esto, la Matemática no es una ciencia como las demás. En ciencias como la Biología, la Geología, la Química, se puede describir el objeto que estudian, pero en la Matemática no ocurre otro tanto. Admitido ésto, puede pensarse que en la cultura actual la Matemática tiene características que forman parte de la interpretación del mundo. Sus métodos, su lenguaje, han de conocerse por sí mismos.

Coherentemente con lo anterior, esta versión cita como objetivo general de la enseñanza de la Matemática "entrenar la capacidad de razonamiento matemático del alumno" y para poder abordarlo es necesario debatir primero si existe un tipo de razonamiento que sea calificable de matemático por distinto, en algo, a los demás; si todos los alumnos poseen la capacidad de utilizarlo, y si todos entendemos 10 mismo con la palabra Matemática, con lo que se cierra una petición de principio, al menos en apariencia.

O La enseñanza de la Matemática puede contemplarse desde todos los puntos de vista anteriores y aun otros más, pero el nivel, necesidades o aspiraciones de los alumnos, el ambiente educativo particular, la realidad sociológica, el proceso de aprendizaje, la propia preparación científica o didáctica del Profesorado, etc., hace que prevalezcan unos sobre los demás.

En esta versión, los objetivos a cumplir en los distintos ciclos y las normas concretas para conseguirlos dejan de ser universales para constituir una característica de cada Centro.

Esa posición, no tan ecléctica como se presenta en primera lectura, parece eludir el problema de tener que pronunciarse por una organización completa pero, aunque así fuera, tal falta no es un defecto sino para los que necesitan o desean que exista un dirigismo educativo que, por desgracia, siempre está presente.

II) LAS MATEMATICAS EN LOS CURRICULUMS DE PRIMARIA

2.1. El área de Matemáticas en la Reforma de 1970

Como casi todas las reformas, la de 1970 se autocalificó de *"una renovación profunda del sistema Educativo Nacional".* El propio documento oficial señalaba diez notas como las innovaciones más importantes, siendo la primera la educación personalizada y la segunda la programación del curriculum en tomo a áreas de expresión y áreas de experiencia. Considerando las Matemáticas como uno de los lenguajes en que puede comunicarse la experiencia, quedaban constituidas como una de las áreas

profunda del sistema Educativo Nacional": El propio documento oficial señalaba diez notas como las innovaciones más importantes, siendo la primera la educación personalizada y la segunda la programación del curriculum en tomo a áreas de expresión y áreas de experiencia. Considerando las Matemáticas como uno de los lenguajes en que puede comunicarse la experiencia, quedaban constituidas como una de las áreas
de expresión. Pero en sí mismas se les reconoce también otras funciones, entre las que el documento destaca como fundamental *"la de ordenar conocimientos y crear estructuras formales que las resuman y expresen".* De ello se deduce que su enseñanza *"debe centrarse en el proceso de matemaüzacián de problemas, creación de sistemas formales, utilización de las leyes de éstos para obtener unos resultados e interpretación de los mismos".* Después se justifica la introducción, como método, de lo que el documento mismo, siguiendo la costumbre del momento, llama matemática moderna, *"cuyos procedimientos facilitan la creación de estructuras formales que permiten ser utilizadas en gran número de situaciones distintas".*

Los objetivos específicos del área de Matemáticas no se desviaban mucho de los que, aun no enunciados oficialmente, parecían haber existido siempre en las aspiraciones íntimas de los docentes. Eran éstos:

Adquisición del vocabulario básico para una adecuada expresión matemática.
Logro de los mecanismos del cálculo operatorio elemental, partiendo de situaciones cuantificables.
Adquisición de los automatismos de razonamiento lógico (demostraciones matemáticas).
Desarrollo de la agilidad mental en el cálculo.
Capacidad de crear estructuras formales.
Capacidad de plantear simbólicamente situaciones problemáticas.
Capacidad de interpretar funciones y tablas.
Capacidad de leer y de expresar datos cuantitativos.

Esos objetivos específicos serían logrados gracias a actividades adecuadas, muchas de las cuales estaban sugeridas en el propio documento bajo denominaciones generales que posteriormente se completaban con ejemplos. Así, <u>observación y manipulación</u> (observar y manipular objetos, observar correspondencias, comparar objetos, …); <u>reconocimiento y resolución de situaciones problemáticas</u> (formular problemas tomados de la vida real, identificar problemas), <u>intuición espacial</u> (experimentar movimientos del plano, estimar distancias …), <u>traducción del pensamiento cuantitativo en frases matemáticas, mecanismos y automatismos</u> (propiedades de las operaciones, confección de tablas, dibujar líneas, medir longitudes, …); <u>vocabulario</u> (hacer inventarios de palabras, …), etc.

Finalmente, la enseñanza se desarrollaba en ocho niveles, cada uno de los cuales constaba de distintos objetivos operacionales fiios. Estas denominaciones. sustituían a
<u>pensamiento cuantitativo en frases matemáticas, mecanismos y automatismos</u> (propiedades de las operaciones, confección de tablas, dibujar líneas, medir longitudes, …); <u>vocabulario</u> (hacer inventarios de palabras, …), etc.

Finalmente, la enseñanza se desarrollaba en ocho niveles, cada uno de los cuales constaba de distintos objetivos operacionales fijos. Estas denominaciones, sustituían a las más clásicas de "cursos" y "conceptos", lo que, segun se mire, no era mucha reforma. En cambio, la gramática conjuntista era, claramente, una innovación cierta, pero no fue interpretada como tal en la práctica escolar, sino como un tema añadido independiente de los demás, que eran los mismos que figuraban en los Planes de Estudio anteriores. El cálculo, la medida y la Geometría eran los campos de estudio de 1º a 6º cursos. Representación de conjuntos, numeración decimal hasta 100, automatización de la adición y la sustracción de números de dos cifras, líneas poligonales, composición y descomposición de polígonos, eran los "objetivos operacionales" en el primer nivel. En el segundo figuraban en cálculo la numeración a partir de la centena, la multiplicación como suma, la escritura de potencias y la iniciación a la división; se citaban ejercicios de medida con unidades naturales y el uso del dm. y el metro; en la Geometría se destacaba la descripción y reconocimiento de cubos, pirámides y prismas.

Del mismo modo y tan detalladamente, se establecían los "objetivos operacionales" para cada uno de los restantes cursos. El núcleo del sexto era el estudio de la estructura de grupo multiplicativo de los números racionales positivos, y los números decimales en particular. En la Geometría se citaba el estudio de las áreas de figuras planas y el meramente descriptivo de poliedros y cuerpos redondos. Además figuraban las ideas de segmento general y ángulos generales, que en la práctica se desarrollaron mediante un formalismo excesivo y poco convincente.

Sin duda, en la planificación sucintamente recordada existía la coherencia lógica obligada entre las partes de su exposición teórica, pero su pesta en práctica no tuvo mucho éxito, como es bien sabido. Para empezar, en el trabajo escolar se confundió "creación de sistemas formales" con "creación formal de sistemas", con 10 que el formalismo, propio de los sistemas pero no de su introducción didáctica, pasó a ser formalismo de la enseñanza. La gramática conjuntista, que aspiraba a ser un vocabulario unificador, se tomó como teoría de conjuntos, cosa que en EGB no tenía razón de ser. Además, la misma idea de "conjunto" era mal conocida y fue mal expuesta, confundiendo las referencias intuitivas con representaciones particulares. No hubo una preparación previa del Profesorado, ni en el conocimiento matemático ni; por tanto, en el significado de los conceptos y en su buena utilización didáctica. Todo ello y otras razones que no son del caso, llevó a la promulgación de los Programas renovados de 1981 y a la reformulación de éstos en 1982.

razón de ser. Además, la misma idea de "conjunto" era mal conocida y fue mal expuesta, confundiendo las referencias intuitivas con representaciones particulares. No hubo una preparación previa del Profesorado, ni en el conocimiento matemático ni, por tanto, en el significado de los conceptos y en su buena utilización didáctica. Todo ello y otras razones que no son del caso, llevó a la promulgación de los Programas renovados de 1981 y a la reformulación de éstos en 1982.

2.2. Los Programas Renovados de 1.981 y de 1.982

Los que se llamaron Niveles Básicos, de 1981, confirmaron, una vez más, la observación hecha al principio. Al menos en lo que se refiere a las Matemáticas, no supusieron cambio sustancial respecto a la organización anterior. Tomando la introducción al ciclo medio (3° a 5° cursos), declaran que *"la enseñanza de las Matemáticas se dirigirá a la organización de las estructuras mentales, a la construcción de conceptos básicos y a la adquisición de unos mecanismos operativos. Para conseguir esto, las actividades ... se apoyarán en experiencias variadas y en hechos de la vida real".*

Prescindiendo de lo que pueda significar "organizar las estructuras mentales", necesidad). Los contenidos de obligado tratamiento se organizaron en cuatro bloques temáticos:

Conjuntos y relaciones
Conjuntos numéricos
Magnitudes y medida
Topología y Geometría

Además de ese tipo de reorganización de contenidos se dictaban limitaciones en el "nivel de profundización", presentando los objetivos de cada curso como de nivel mínimo. Se eliminaba todo cuanto en la práctica anterior se había desarrollado en niveles inapropiados para los estados evolutivos de los alumnos, especialmente las construcciones formalizadas y las demostraciones.

En el sexto Curso, que pertenecía al Ciclo Superior, y como asignación de contenidos, aceptable, aunque no obligatoria, se daba el conjunto de los números racionales positivos, la divisibilidad en el de naturales, el estudio de figuras planas, la construcción de gráficas y una introducción a los estadísticos de tendencia central.

Todo ese detalle en la lista de conceptos iba acompañado con ejemplos de actividades consideradas adecuadas en cada caso y que en casi todos eran ejercicios
aceptable, aunque no obligatoria, se daba el conjunto de los números
racionales positivos, la divisibilidad en el de naturales, el estudio de figuras planas, la construcción de gráficas y una introducción a los estadísticos de tendencia central.

Todo ese detalle en la lista de conceptos iba acompañado con ejemplos de actividades consideradas adecuadas en cada caso y que en casi todos eran ejercicios
mecánicos.

Pero esos Programas renovados tuvieron a su vez una reformulación, consistente en la eliminación de algunos temas particulares y en la colocación de otros en niveles más elevados que anteriormente. Por ejemplo, desapareció el anterior bloque temático sobre conjuntos y correspondencias, así como la identificación de cubos, prismas y pirámides en los primeros cursos. Allí donde en 1981 se leía *"leer y escribir del 1 al 100"*, aparecía en 1982 *"dominar y manejar correctamente el sistema de numeración decimal hasta el* 999". Desaparecía el sistema de numeración de base 2. asegurándose que exige un nivel de desarrollo más propio del ciclo siguiente (el medio), etc. A cambio, se hacían afirmaciones arriesgadas, como "el reparto es la operación inversa de la multiplicación" y otras.

En verdad, todas aquellas modificaciones se presentaron como una fijación de generalmente se siguen en la actualidad, hasta la próxima puesta en práctica de la reforma que supone la LOGSE

2.3. <u>Las matemáticas y la reforma en marcha</u>

No hay legislación definitiva, y lo que sigue puede tener variaciones de detalle. La interpretación que se hace de las Matemáticas escolares es un buen ejemplo de 10 que hemos llamado anteriormente versión t). En la introducción al documento base se hace referencia a que *"existen diferentes alternativas sobre el enfoque que se les debe dar y sobre el papel que se juegan en el desarrollo global de los alumnos"*, entre las que se ha elegido una. Se afirma que *"mediante el aprendizaje de las Matemáticas los alumnos desarrollan su capacidad de pensamiento y de reflexión lógica..."* (versión e). Como verdad no discutible se asegura, como tantas veces, que *"el proceso de construcción del conocimiento matemático debe utilizar como punto de partida la propia experiencia práctica de los alumnos"*. También se reconoce un sentido preparatorio para niveles posteriores, aunque se matiza diciendo que *"sería un error interpretar ... que la enseñanza de las Matemáticas tiene en la Educación Primaria un valor <u>exclusivamente</u> preparatorio"*. Como final de la introducción se asegura que *"es absolutamente imprescindible que, al término de la misma (Educación Primaria), los alumnos hayan adquirido una actitud positiva hacia las Matemáticas ..."*

propia experiencia práctica de los alumnos". También se reconoce un sentido preparatorio para niveles posteriores, aunque se matiza diciendo que *"sería un error interpretar ... que la enseñanza de las Matemáticas tiene en la Educación Primaria un valor <u>exclusivamente</u> preparatorio"*. Como final de la introducción se asegura que *"es absolutamente imprescindible que, al término de la misma (Educación Primaria), los alumnos hayan adquirido una actitud positiva hacia las Matemáticas ..."*

El documento general expositivo señala diez objetivos generales, todos en términos de capacidades. Dice *"los alumnos habrán desarrollado la capacidad de ... y los verbos utilizados en modo infinitivo en esos diez objetivos son identificar, lograr, encontrar, interpretar, valorar, producir, efectuar, transmitir, elaborar, obtener, comprender, definir, representar, formarse (un juicio), utilizar, etc"*.

Los contenidos están organizados en bloques que "no constituyen un temario". Aparentemente, cada Centro tiene capacidad de elección, pero una libertad restringida a la distribución de esos bloques a lo largo de los ciclos.

Esa nota que reseñamos como libertad vigilada de las iniciativas del Profesorado no la podemos subrayar en la cuenta de los defectos, aparte de que no estamos haciendo un análisis sino una descripción. Con todo lo deseable que es la libertad a ultranza, que ha existido y sigue existiendo en nuestra organización educativa, hace que esa relativa libertad dada ahora sea sentida por muchos Centros como una dificultdad, un trabajo que se podía haber evitado, en lugar de como una oportunidad de señalar, aunque sobre pie muy forzado, las características educativas de cada uno.

Los contenidos se exponen y organizan en cuatro bloques y para cada uno de los cuatro se especifican conceptos, procedimientos y actitudes. Los títulos correspondientes son 1) Números y operaciones; II) La medida; III) Formas geométricas y situación en el espacio; IV) Organización de la información.

En el documento, todavía Proyecto, se dan normas para alcanzar los objetivos y en ellas se observa un dirigismo dificilmente superable. Con el nombre de orientaciones didácticas están redactadas casi todas en términos de obligación. Así, tomando las referidas a orientaciones generales y a secuenciación de los contenidos, se dice: - las actividades <u>deberán</u> relacionar ...; las actividades <u>deben</u> diseñarse ...; otro criterio que <u>se</u> <u>debe</u> tener en cuenta ...; la presentación de los contenidos <u>se</u> <u>hará</u> ...; el maestro <u>deberá</u> buscar ...; <u>hay</u> <u>que</u> <u>tener</u> siempre presente ; el maestro <u>es</u> ...; el maestro <u>recurrirá</u> a ...; los contenidos <u>deberán</u> <u>presentarse</u> ; el planteamiento <u>será</u> de forma ...; los números fraccionarios se <u>abordarán</u> <u>como</u> ; el inicio de la medida <u>se</u> <u>hará</u> <u>utilizando</u> ...; los contenidos de orientación <u>habrá</u> <u>que</u> <u>introducirlos</u> <u>partiendo</u> <u>de</u> ..., etc. Menos veces, las orientaciones son consejos: para las operaciones <u>se</u>
el maestro <u>deberá</u> buscar ...; <u>hay</u> <u>que</u> <u>tener</u> siempre presente ; el maestro <u>es</u> ...; el maestro <u>recurrirá</u> a ...; los contenidos <u>deberán</u> <u>presentarse</u> ; el planteamiento <u>será</u> de forma ...; los números fraccionarios se <u>abordarán</u> <u>como</u> ; el inicio de la medida <u>se</u> <u>hará</u> <u>utilizando</u> ...; los contenidos de orientación <u>habrá</u> <u>que</u> <u>introducirlos</u> <u>partiendo</u> <u>de</u> ..., etc. Menos veces, las orientaciones son consejos: para las operaciones <u>se</u>
<u>aconsjea</u> ...; el trabajo con formas planas <u>se</u> <u>aconsjea</u> iniciarlo con ...; en los primeros años de la Etapa <u>se</u> <u>pueden</u> realizar dibujos de ...

2.4. <u>Las matemáticas en los textos escolares</u>

Aún antes de que el texto escolar fuera una enciclopedia única y también después, durante muchos años, los libros escolares necesitaban la aprobación ministerial para ser utilizados como textos, lo que implicaba su obligado ajuste tanto a los Cuestionarios como a las orientaciones didácticas oficiales. Ello supuso una uniformidad poco beneficiosa, porque los textos no podían ofrecer posibilidades de programación, recursos, orientación, etc., distintas de las ordenadas como oficiales. Aparte de ésto, un texto de Matemáticas tenía el mismo formato fuera cualquiera el nivel de estudios: cada capítulo comenzaba por la explicación de un tema y acababa proponiendo una colección de ejercicios sobre el mismo.

A partir de la reforma de 1970 la situación ha sido más favorable. La exigencia efectiva para la aprobación ministerial era que los textos abordaran todos los puntos del cuestionario oficial, pero no impedía presentar <u>además</u> otros, 10 que ofrecía posibilidad para la utilización de recursos didácticos dependientes de las tesis y la experiencia pedagógicas de sus autores.

Esa misma reforma de 1970 permitía cambiar la presentación tradicional de los libros de estudio, que pasaron a ofrecerse en dos tomos. Uno era un cuaderno de ejercicios y el otro un manual de consulta; a veces, el cambio consistió en que los ejercicios tradicionales de final de capítulo se presentaron en un cuaderno aparte. Pero en otras ocasiones el cambio fue tal, verdaderamente, y de importancia: en el libro de trabajo encontraba el alumno una situación introductoria que le obligaba a observar, experimentar, ... (recuérdese la versión e) del principio, hasta llegar a expresar un resultado como final de la pequeña investigación propuesta. Posteriormente, el libro de consulta le ofrecía ampliaciones sobre lo encontrado, generalizaciones, el vocabulario adecuado y el comienzo de nuevas actividades. No fueron muchos los textos con esas características pero los hubo y en ellos aparecieron por primera vez en la Educación Primaria, además de las técnicas instrumentales, recursos como tablas, gráficos, esquemas conmutativos, ordinogramas, juegos, cuestiones de probabilidad, de Estadística, de teoría de grafos, etc., hay recomendamos como necesarios casi veinte años más tarde.

adecuado y el comienzo de nuevas actividades. No fueron muchos los textos con esas características pero los hubo y en ellos aparecieron por primera vez en la Educación Primaria, además de las técnicas instrumentales, recursos como tablas, gráficos, esquemas conmutativos, ordinogramas, juegos, cuestiones de probabilidad, de Estadística, de teoría de grafos, etc., hay recomendamos como necesarios casi veinte años más tarde.

m <u>NUESTRA INVESTIGACION SOBRE SITUACION DE LOS ESCOLARES AL SALIR DE 6° E.G.B.: DISEÑO Y RESULTADOS</u>

<u>Nuestro programa de diagnóstico</u>

Partiendo de los trabajos que venimos realizando con el Dr. García Yagüe para otros niveles educativos, diseñamos una prueba nueva que abarca 3 grandes planos del aprendizaje de las Matemáticas:

El dominio de procesos elementales.
Recursos matemáticos que utiliza el alumno.
Su familiaridad con la resolución de problemas que exigen planteamientos matemáticos.

En la primera de ellas fijamos la atención especialmente en el dominio que tienen los alumnos de las técnicas que se utilizan en los puntos siguientes:

- Escritura de números dados por su nombre y de fracciones dadas en una representación gráfica (n" 1 del documento)

- Reconocimiento y utilización de distintas escrituras para un mismo número (N°s. 3, 6 y 7 del documento)

- Cálculo elemental con dos números (N°s 4 y 5).

Ese documento que recibe el alumno se reproduce a continuación.

Para que sean escritos en las casillas de 1 se dictan seis números, que son veinte mil cuatrocientos nueve, cien mil cincuenta y tres, el decimal tres enteros cuarenta y siete milésimas, el decimal veinticinco centésimas; por último, las fracciones trece quinceavos y nueve séptimos. Además ha de escribir en forma de fracción la parte que cada región negra de las figuras es del correspondiente rectángulo total.

En el n? 4 han de ralizarse las operaciones que se dicen con los datos que también se dan de viva voz. Son: sumar novecientos catorce más ochenta y cinco;

quinceavos y nueve séptimos. Además ha de escribir en forma de fracción la parte que cada región negra de las figuras es del correspondiente rectángulo total.

En el n? 4 han de ralizarse las operaciones que se dicen con los datos que también se dan de viva voz. Son: sumar novecientos catorce más ochenta y cinco;
restar cuatrocientos seis menos ochenta y uno; sumar setenta y cinco, más seis enteros dos décimas, más novecientos; multiplicar veinte enteros setenta y cinco centésimas por un entero dos décimas; dividir mil trescientos dos por doce y por último dividir sesenta y cuatro enteros cincuenta y seis centésimas por un entero cinco décimas.

Lo que se pide en los restantes apartados del documento no necesita explicación aquí.

Habida cuenta de que anteriormente ya ha sido explirada en los cursos primero, tercero y quinto la seguridad mecánica del conocimiento de las tablas de adición, sustración y multiplicación, ahora se trata de observar hasta dónde llega el dominio de los procesos; por ello, una errata accidental y no repetida en otros cálculos no es tornada como error de conocimiento pero sí lo es, por ejempli, la mala colocación de la coma en la adición de dos decimales o no saber escribir una fracción equivalente a otra dada.

PROCESOS MATEMÁTICOS (Mercedes Casal•. -Alberto Aizpún)

Nombre y apellidos

11 11

La parte negra es ____ del total.

La banda negra es ______ del total.

9,91; 9,09; 9,909			
0,19 ; 0,2 ; 0.010			
10,43 ; 10,043 ; 10,431			
4,21 ; 3,95 ; 4,035			

$\frac{3}{5}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{9}$		
$\frac{1}{2}$; $\frac{1}{7}$; $\frac{1}{4}$		
$\frac{4}{3}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{6}{5}$		
$\frac{5}{r}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$		

3. Bajo cada decimal escribe la fracci6n correspondiente. 3, 11 7, 123 0,047 O, 101

4

5 $\frac{3}{7}+\frac{2}{7}=$ — ; $\frac{2}{5}+\frac{3}{4}=$ —— ; $\frac{7}{4}+\frac{5}{12}=$ — —

$\frac{2}{3}-\frac{1}{5}=$ ——; $\frac{3}{4}-\frac{7}{12}$ — — ; $\frac{3}{2}+\frac{5}{4}-\frac{7}{8}=$ ——

$\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=$ —— ; $\frac{2}{3}\times\frac{5}{6}=$ — ; $\frac{5}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{7}{2}=$ ——

$\frac{2}{5}:\frac{3}{5}=$ —— ; $\frac{4}{3}:\frac{4}{5}=$ —— ; $\frac{8}{9}\times\frac{3}{2}:\frac{2}{3}=$ ——

Espacio para algunas operaciones.

6 Simplifica cuanto puedas

$\frac{66}{42}$

$\frac{150}{60}$

$\frac{48}{36}$

Escribe fracciones equivalentes a las dadas

$\frac{2}{3}=$ —— = —— = —— = —— = —

$\frac{7}{5}=$ —— = —— = —— = ——

$\frac{5}{7}=$ —— = —— = —— = ——

7 Las fracciones que escribas han de tener el mismo denominador.

$\frac{5}{8}=$ —— ; $\frac{3}{4}=$ —— ; $\frac{11}{12}=$ —— ; $\frac{1}{6}=$ —— ;

erto Aizp6n)

1

r la mayor

4 O, 101

re

va

y

reracíonea.

6 s a las dadas

1 Representando así ⊢—⊣ cada metro, dibuja una habitaci6n de 6 m. de larga y 4 m. de ancha.

• Dibuja una puerta de 1,5 m. en el centro de un lado largo y una ventana de 0.5 m. en el centro de un lado corto.

2 Tengo 26 botas. Lo que quiero hacer ea:
• Quedarme con 11-
Dar 7 a Antonio y repartir la. que queda entre Luis y Juan, a partes iguales.
¿Cuántas bolas le tocan a Luis?.

A LUIS LE TOCAN BOLAS

3 Entre Fernando y Carlos suman 25 años Fernando tiene 7 aftos más que Carlos. Se pregunta: ¿Cuántos años tiene uno y cu4ntos el otro?.

FERNANDO TIENE AÑOS.

CARLOS TIENE AÑOS.

4 Una habitaci6n está embaldosada con 90 baldosas. De ellas, 108 $\frac{2}{3}$ son de color rojo y $\frac{1}{6}$ de color blanco. Las demás 80n variadas. ¿Cuántas baldosas hay blancas y cuántas rojas?.

HAY BALDOSAS DE COLOR BLANCO

Y DE CaLaR ROJO.

5 En un bloque de pisos hay 10 pisos alquilados, que son los $\frac{5}{7}$ del total.

¿Cuántos pisos tiene el bloque?.

EL BLOQUE TIENE PISOS.

6 El autobús tiene 16 filas de asientos. La mitad de las filas son de 3 asientos y la otra mitad de 2. Se pregunta: ¿Cuántos viajeros sentados caben en el autobús?.

En un viaje, el autobús sal.. con 6 asientos vacíos y nadie de pié. En la primera parada bajaron 12 viajeros y subieron 8; en la segunda parada subieron 10 y bajaron 7. Se pregunta: ¿Cuántos viajeros llegaron a la tercera parada?.

A LA TERCERA PARADA LLEGARON VIAJEROS.

RECURSOS MATEMÁTICOS (Mercedes Casals. -Alberto Aizpún)

Nombre y apellidos Edad CurIo

4 ( ) 2 ( ) 1 · 5 5 ( ) 2 ( ) 1 ( ) 4 • 10
2 ( ) 4 ( ) 5 • 1 1 ( ) 5 ( ) 4 ( ) 2 • 8
S ( ) 4 ( ) 3 = 4 4()2()5()2*9
3 ( ) 2 ( ) 4 • 5 5 ( ) 1 ( ) 4 ( ) 2 • 12
5 ( ) 1 ( ) 2 • 2 16 ( ) 8 ( ) 14 ( ) 18 • 4

1 ( ) 4
X 2
2 8 ( )
2 ( ) ., 1
X ()
( ) 4 ( ) 4

( ) 3 1 2
X 5
2 1 S( ) O
3 () () 4
X ( )
( )( ) O 7 8

2 En estas divi ríonea S(11 CA CIII ⁽R E

Espacio para operaciones.

& & | 5
1 7
El dividendo es

& & & | 6 1
321
4
El dividendo es

& & & | 10
& & 35
9
El dividendo es

& & & & | 63
& & & 25
4 1
El .dividendo es

& & & & & & | 1001
& & & &
& & & &
1 O 1
7 5 2
El dividendo es

& & & & | 3 & 1
5 2 & 2 1
2 2 O
El dividendo es

3 Haz los cálculos mentalmente y escribe los resultados.

7 + " X 2 • 18 - 2 X 9 = 3X(6-2 X3) •
4X5 +6X2 - 3 X4-6X2- 3 + 6 X (10 - 2 X 4) =
(26 + 8 X 2) : 7 - 2 X 3 = 6 + 18 : (10 - 4 X 2) • (6X4 - 12:2) : (4)<2 - 4:2) •

4 $\frac{1}{2} < \frac{}{4}$; $\frac{}{2} < \frac{}{4}$; $\frac{}{2} < \frac{}{4}$; $\frac{}{} > \frac{}{3}$; $\frac{}{} > \frac{5}{3}$; $\frac{}{} > \frac{5}{3}$

$\frac{5}{3} < 7 < 4$; $\frac{5}{3} < 10 < \frac{1}{4}$; $\frac{5}{3} < 11 < 4$

$\frac{1}{2} < \frac{3}{} < \frac{2}{3}$; $\frac{1}{2} < \frac{4}{} < \frac{2}{3}$; $\frac{1}{2} < \frac{5}{} < \frac{2}{3}$

RECUERDA , El signo < significa "es menor que "
El signo > significa "es mayor que"

Le -Alberto Aizpún)
ad Curso
4 ( ) 3 1 2
2 X 5
2 1 S( ) O
3 ( ) ( ) 4
X ( )
4 ()()078
Espacio para operaciones.
(6 - 2 X 3) •
6 X (10 - 2 X 4) •
12:2) : (4)<2 - 4:2) "
$\frac{5}{3}$; $\frac{7}{} > \frac{5}{3}$
RDA : El signo <
"es menor que "
> significa
yor que"

5 El cociente entero de 351729 : 21 tiene cifras
El cociente entero de 60912 : 72 tiene cifras
El cociente entero de 1324689 : 98642 tiene cifras
El cociente entero de 80012 : 90 tiene cifras

6

Preguntas	TODOS	ALGUNO	NINGUNO
Los números pares, ¿son múltiplos de 4 ?			
Los múltiplos de 2 • ¿ son impares ?			
Los múltiplos de 4 • ¿ son múltiplos de 2 ?			
Los múltiplos de 3 , ¿son impares ?			
Los múltiplos de 10 , ¿ son múltiplos de 5 ?			
Los múltiplos de 6 • ¿ son múltiplos de 3 ?			
Los múltiplos de 6 • ¿ son impares?			
Los múltiplos de 3 • ¿ son múltiplos de 6 ?			
Los múltiplos de 10 • ¿ terminan en 5 ?			
Los múltiplos de 5 , ¿ terminan en O ?			

7

Busco dos números	UN EJEMPLO	OTRO EJEMPLO
El producto es mayor que ambos factores.		
El producto es mayor que un factor pero menor que el otro.		
El producto es menor que ambos factores.		
El producto es igual a uno de los factores.		
El producto es O.		
El producto es 1.		

En la sección de RECURSOS se atiende a los que posean los alumnos referentes a los mismos puntos que se han estudiado en PROCESOS y además al grado de conocimiento de las principales relaciones entre los términos de las operaciones. También se explora el posible uso de los cuantificadores TODOS, ALGUNO, NINGUNO, en situaciones elementales de la multiplicación.

El protocolo que ha de completar el alumno se presenta a continuación y necesita pocas explicaciones. En su n? 1 se han de colocar en los paréntesis del recuadro izquierdo los signos + (de sumar) y - (de restar) de modo que las igualdades que se lean sean ciertas; en los paréntesis del recuadro de la derecha hay que escribir las cifras adecuadas para que las multiplicaciones estén bien hechas. En el n? 4 hay que escribir en los numeradores y en los denominadores que están en blanco números que hagan verdaderas las ordenaciones escritas. En el n? 6 basta poner la señal X en las casillas correspondientes. En cuanto al n? 7 se advierte que en todos los seis casos que se presentan, en los dos ejemplos que se piden hay que escribir al menos una fracción o un decimal (10 que, de todos modos, está obligado en las casillas segunda, tercera y sexta).

La sección de PROBLEMAS se compone de seis enunciados breves que han sido seleccionados para que la respuesta se obtenga a partir de:

sexta).

La sección de PROBLEMAS se compone de seis enunciados breves que han sido seleccionados para que la respuesta se obtenga a partir de:

Una representación gráfica a escala (en el primero de ellos)
La diferencia de números, o la suma, la diferencia, y el concepto de mitad (en el segundo)
La suma y diferencia de dos números (en el tercero) y la mitad.
El uso de fracciones como operadores (en el cuarto)
Eluso de la fracción inversa de otra, ya sea de modo consciente o mediante algún procedimiento equivalente (en el número cinco)
El cálculo combinado de sumas, diferencia y producto de enteros (N° 6).

Tales enunciados son los siguientes:

1.- Representando así cada metro, dibuja una habitación de 6 metros de larga y 4 metros de ancha. Dibuja una puerta de 1.5 metros en el centro de un lado largo y

2.- Tengo 26 bolas. Lo que quiero hacer es:

quedarme con 11.

Dar 7 a Antonio y repartir las que quedan entre Luis y Juan, a partes iguales. ¿Cuantas bolas le tocan a Luis?

3.- Entre Fernando y Carlos suman 25 años. Fernando tiene 7 años más que Carlos. Se pregunta: ¿Cuántos años tiene uno y cuántos el otro?

4.- Una habitación está embaldosada con 90 baldosas. De ellas, los 2/3 son de color rojo y 1/6 son de color blanco. ¿Cuántas baldosas hay blancas y cuántas rojas?

5.- En un bloque de pisos hay 10 pisos alquilados, que son los 5/7 del total. ¿Cuántos pisos tiene el bloque?

6.- El autobús tiene 16 filas de asientos. La mitad de las filas son de 3 asientos y la otra mitad de 2. Se pregunta: ¿cuántos viajeros sentados caben en el autobús?

En un viaje, el autobús salió con seis asientos vacíos y nadie de pie. En la primera parada bajaron 12 viajeros y subieron 8; en la segunda parada subieron 10 y bajaron 7. Se pregunta: ¿cuántos viajeros llegaron a la tercera parada?

En un viaje, el autobús salió con seis asientos vacíos y nadie de pie. En la primera parada bajaron 12 viajeros y subieron 8; en la segunda parada subieron 10 y bajaron 7. Se pregunta: ¿cuántos viajeros llegaron a la tercera parada?

Resultados

A) Procesos matemáticos

Las respuestas obtenidas al protocolo de PROCESOS descrito anteriormente están representadas en los gráficos (P; Gl) Y (P ; G2). En este segundo, las cuatro primeras barras corresponden a las cuatro subsecciones de la primera cuestion (PI) y las seis últimas a las de la cuarta (P4).

En esta sección de PROCESOS, como en las otras dos, cada cuestión se ha calificado numéricamente en el intervalo (0 ; 4), según la técnica que en cada caso se detallará. Como consecuencia de esta puntuación se ha hecho la clasificación de MALO (ignora), INSUFICIENTE y DOMINA, tal Y como se ve en el gráfico (P ; Gl)

Cuestión 1 (P.I). En este apartado el alumno ha de escribir dos números naturales, dos decimales y dos fracciones dadas por su nombre, así como ha de reconocer y saber escribir dos fracciones de cantidad dadas en una representación muy habitual.

Para cada alumno se ha anotado el número de respuestas buenas a cada subcuestión y se ha considerado dominada la técnica si las dos respuestas han sido acertadas. Para reducir el intervalo de puntuación (0 ; 4) se ha tomado la mitad del número total de respuestas acertadas. Los resultados se observan en las cuatro primeras barras del gráfico (P ; G2), así como en la tabla (PI ; TI), que detalla numéricamente aquellas

PI ; TI

	ENTEROS			DECIMALES			FRACCIONES			RP.FRACCIONES		
	0		2	0		2	0		2	0		2
N° ALUM.	29	69	471	160	117	292	16	47	506	212	72	285
%	5	12	83	28	21	51	3	8	89	37	13	50

Se observa en ella que de 569 alumnos participantes ha habido 29 (5%) que escriben mallas dos cifras propuestas y 471 (83%) que parecen dominar la escritura de números enteros. Es de notar que hay tres Colegios en que todos los alumnos (salvo

N° ALUM.	29	69	471	160	117	292	16	47	506	212	72	285
%	5	12	83	28	21	51	3	8	89	37	13	50

Se observa en ella que de 569 alumnos participantes ha habido 29 (5%) que escriben mallas dos cifras propuestas y 471 (83%) que parecen dominar la escritura de números enteros. Es de notar que hay tres Colegios en que todos los alumnos (salvo

1) escriben bien los dos números propuestos. En realidad, parece razonable esperar que eso ocurra con todos a la terminación del sexto curso.

La escritura de decimales ofrece peor resultado, aunque aisladamente considerada ocurre que el 51 % atina a escribir bien los dos decimales propuestos, mientras que el 28 % no escribe ninguno. Existe un Colegio en que ninguno de sus alumnos ha sabido escribir los dos decimales y diez en que son tantos o más los que no escriben ninguno que los que escriben los dos. Sólamente hay en la prueba un Colegio en que más del 80 % escribe los dos decimales (y lo hace el 94%)

La escritura de las fracciones dictadas ha sido la subcuestión que ha resultado más sencilla: sólamente el 3% no sabe escribir ninguna, mientras que el 89 % escribe las dos. En el conjunto de la prueba, estos resultados son mejorados sólo por los obtenidos en la adición de enteros, que está dominada por el 93 % de los alumnos. Este y el reconocimiento de una fracción de cantidad ha presentado la misma dificultad (o facilidad) que la escritura de decimales: el 50% lo sabe hacer, aunque es de notar que el 37% (212 alumnos de 569) no responde.

Se deduce de todo ello que la escritura de fracciones está mejor dominada que la de enteros y que la de decimales, si bien hay 7 Colegios en que más del 95% escriben los dos enteros y sólamente uno en que TODOS los alumnos escriben bien las fracciones.

Ese resultado global es digno de compararse con el obtenido en el PROBLEMA N° 4, que trata también de identificar una fracción de cantidad. A primera vista puede parecer sorprendente que la fracción se reconozca en la representación dada y sin embargo no sepa aplicarse en el enunciado escrito más elemental, como ocurre en ese problema.

Las tablas (PI ; T2), (PI ; T3), (PI ; T4) Y (PI ; T5) proporciona la información sobre el número de respuestas que han dado a cada cuestión los alumnos del Colegio que en cada caso sea el de mejor resultado (que se designa siempre por CI) y el de peor (que se designa por C2). Los datos están dados en %

(pI ; TI)

ENTEROS " BIEN

información sobre el número de respuestas que han dado a cada cuestión los alumnos del Colegio que en cada caso sea el de mejor resultado (que se designa siempre por CI) y el de peor (que se designa por C2). Los datos están dados en %

(pI ; TI)

ENTEROS			BIEN		N° ALUMNOS
		O		2	
% ALUMNOS	CI	O	3	97	35
	C2	13	28	59	32

(PI; T3)

ENTEROS			BIEN		N° ALUMNOS
		O		2	
% ALUMNOS	Cl	O	6	94	35
	C2	65	35	O	29

(PI ; T4)

ENTEROS			BIEN		N° ALUMNOS
		O		2	
% ALUMNOS	CI			100	26

(pI ; T5)

ENTEROS		BIEN			N° ALUMNOS
		O		2	
% ALUMNOS	C1	11	3	86	35
	C2	71	11	18	28

C1.- Mejor Colegio
C2.- Peor Colegio

Hay que decir que el Colegio de 35 alumnos que aparece tres veces como C1 es en las tres ocasiones el mismo y que el de 29 que está dos veces en C2 es, también, el mismo.

Cuestión 2 (p.2.) En este apartado se trata de controlar el grado de conocimiento de las relaciones "es menor que" y su opuesta, con números decimales y con fracciones.

Se dan seis ternas de decimales y cuatro de fracciones. Para cada una, el alumno debe señalar cual es el número menor y cual el mayor. Para resumir las respuestas en un número del intervalo (0 ; 4), se ha empleado la fórmula:

$P_2 = \frac{2 \times (D) \pm 3 \times (F)}{12}$, donde P_2 es la puntuación en este

Se dan seis ternas de decimales y cuatro de fracciones. Para cada una, el alumno debe señalar cual es el número menor y cual el mayor. Para resumir las respuestas en un número del intervalo (0 ; 4), se ha empleado la fórmula:

$P_2 = \frac{2 \times (D) \pm 3 \times (F)}{12}$, donde P_2 es la puntuación en este

ejercicio, D es el número de decimales colocados en la casilla correspondiente y F el número de fracciones colocadas también en las casillas adecuadas.

La tabla obtenida es la (P2 ; TI), que se encuentra representada en el gráfico (P ; Gl) en su barra P2, y con más detalle en el (P2 ; G1).

(P2; TI)

	PUNTUACION					MEDIA
	O		2	3	4	1,6
N° ALUMNOS	45	250	160	80	34	
%	8	44	28	14	6	

PORCENTAJES (P2 ; GI)

En ellas se indica que el 6% de los alumnos dominan la cuestión de ordenar fracciones o decimales, mientras que su conocimiento por parte del 52 % es muy malo y el del 42 % se considera insuficiente.

La tabla (P2 ; TI) puede escindirse en otras dos que separen la parte correspondiente a la ordenación de decimales de la correspondiente a las fracciones. Entonces los resultados están dados en (P2 ; TI), donde M significa MALO, I INSUFICIENTE Y D nOMINA, como ocurrirá en lo sucesivo.

(P2 ; TI)

	N° ALUMNOS	
	%	%
M	32	60
	47	36
D	21*	4

(P2; T3)

MEDIAS	N° COLEGIO	%
O a 1	2	9
> 1 a 2	16	73
> 2 a 3	4	18
> 3	O	

* Un quinto son del mismo Colegio

Para examinar la contribución de los Colegios como grupos, puede estudiarse la tabla (P2 ; T3), así como la (p2 ; T4). La primera da las medias obtenidas v la
> 3 O

* Un quinto son del mismo Colegio

Para examinar la contribución de los Colegios como grupos, puede estudiarse la tabla (P2 ; T3), así como la (p2 ; T4). La primera da las medias obtenidas y la segunda informa sobre el colegio de más alta puntuación (el) y el de más baja (C2) respecto al grado de dominio de las subcuestiones.

(P2 ; T4)

	Decimales			Fracciones			En Conjunto		
	D	1	M	D	1	M	D	1	M
C1	74	20	6	11	60	29	28	66	6
C2	--	32	68	--	16	84		9	91

Resultados en porcentajes:

Domina (D); Insuficiente (1); Malo-ignora (M)
C1 es el Colegio de mejor resultado; C2 el de más bajo

las tres partes. El Colegio más bajo en ordenación de decimales no es el más bajo en la de fracciones ni ninguno de los dos es el más bajo en conjunto.

<u>Cuestión</u> <u>3</u> <u>(P.3.)</u> Es una cuestión muy simple que trata de saber si los alumnos identifican los números decimales con las fracciones correspondientes. Numéricamente, se establece el intervalo (O ; 4) dando 1 punto por cada respuesta buena.

Los resultados obtenidos se ofrecen en la tabla (P3 ; TI), cuya traducción está en el gráfico (P ; g1) en su apartado P3

(P3 ; TI)

	PUNTUACION					media
N° de	O	1	2	3	4	1,22
alums	374	3	31	15	148	
%	66	5	5	2.5	26	

(P3 ; TI)

Medias	N° de Clgs	%
Oa 1	9	41
>la2	9	41
>2a3	3	14
>3	1	4

Se observa que en cuanto al reconocimiento de números, esta cuestión es la que da mayor cantidad de alumnos que la ignoran y al mismo tiempo da también mayor cantidad de alumnos que la dominan. No es cuestión que pueda conocerse "a medias" y la tabla (p3 ; TI) 10 deja bien claro.

>j 4

Se observa que en cuanto al reconocimiento de números, esta cuestión es la que da mayor cantidad de alumnos que la ignoran y al mismo tiempo da también mayor cantidad de alumnos que la dominan. No es cuestión que pueda conocerse "a medias" y la tabla (p3 ; TI) 10 deja bien claro.

Atendiendo a las medias de los Colegios la tabla explicativa es la (P3 ; TI). La comparación de los Colegios CI y C2, así como la de éstos con la generalidad de los alumnos se encuentra, como para las demás cuestiones, al final del análisis de las site cuestiones de PROCESOS

<u>Cuestión</u> <u>4</u> <u>(P.4.)</u> Se presentan adición y sustracción de enteros, adición y multiplicación de decimales, división de enteros y división de decimales. Para cada operación se ha anotado el número de alumnos que la realizan y el de los que no la hacen. Se ha considerado la buena disposición de los cálculos y la buena técnica, sin penalizar lo que puede considerarse erratas.

La tabla (P4 ; TI) da la cuantificación de alumnos para cada operación y la (P4 ; TI) indica las puntuaciones en el intervalo (0;4). De ésta se obtiene la representación

(p4 ; TI)

	ad.ents		sus.ets		ad.decs		mul.dcs		div.ents		div.decs	
	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI
N° de alms.	37	532	74	495	286	283	316	253	267	302	387	182
%	7	93	13	87	50	50	55	44	47	53	68	32

(P4 ; TI)

	PUNTUACION					MEDIA
	0		2	3	4	2,58
%	2	23	26	29	19	
N° ALUMNOS	10	132	150	167	109	

(p4 ; T3)

MEDIAS	N° COLEGIO	%
0 a 1	0	0
> 1 a 2	5	23
> 2 a 3	16	73
> 3		4

Las medias obtenidas por los veintidós Colegios que han intervenido se consignan en la tabla (P4 ; T3) Y la diferenciación entre los dos extremos está indicada al final de PROCESOS.

Las medias obtenidas por los veintidós Colegios que han intervenido se consignan en la tabla (P4 ; T3) Y la diferenciación entre los dos extremos está indicada al final de PROCESOS.

Cuestión S (P.S.) En este apartado se quiere valorar el conocimiento más elemental sobre las operaciones con fracciones. De las doce propuestas, nueve 10 son con dos números y las restantes con tres. La calificación en el intervalo (0 ; 4) se ha hecho mediante la fórmula:

$$P_5 = \frac{a+s+m+d}{3}$$

donde las letras del numerados indican el número de respuestas buenas en las líneas de adición, sustracción, multiplicación y división; P, se ha ajustado al cuarto más próximo.

El resultado global muestra en el gráfico (P ; G1), en el apartado P5. Es el segundo peor de todos y según él sólamente 1% de los alumnos dominan la cuestión los 569 participantes), mientras que el 81% no pasa de 1 punto en la escala (0;4). Dada la fórmula empleada para puntuar las respuestas, lo anterior significa que el 81 % de los alumnos no da más de tres respuestas buenas de las doce propuestas.

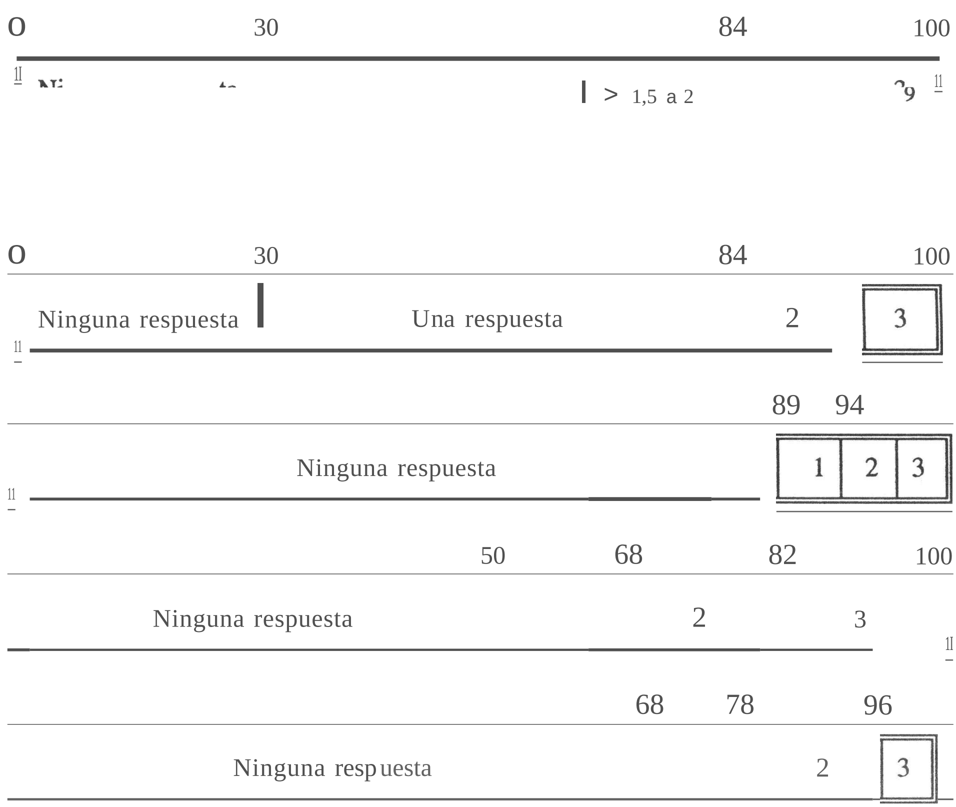
La puntuación de los alumnos está en la tabla (P5 ; TI) Y el detalle porcentual para cada operación aparece en el gráfico (P5; Gl).

(P5 ; TI)

	PUNTUACION					MEDIA
	O		2	3	4	0,82
%	43	37	16	3		
N° ALUMNOS	248	210	91	17	3	

(P5 ; TI)

MEDIAS	N° COLEGIO	%
O a 0,5	5	23
> 0,5 a 1	12	55
> 1 a 1,5	3	13
> 1,5 a 2	2	9



La distribución de las medias obtenidas por los Colegios se puede estudiar en la tabla (p5 ; TI) que la da con intervalos de 0,5 puntos. En esa tabla se observa que ningún Colegio pasa de 2 puntos (el más alto da de media 1,58) y solamente dos Colegios pasan de 1,5 en el intervalo (O ; 4).

En la tabla (p5 ; T3) se da la distribución de los alumnos de los Colegios Cl y C2 (de más altos y más bajos resultados) detallada por número de respuestas a cada una de las operaciones. La comparación global, igual que en los demás apartados, se encuentra al final del análisis de PROCESOS.

(p5 ; T3)

Clgs	N° alms	adición				sustracción				multiplicac				división				conocimien.		
		O	1	2	3	O	1	2	3	O	1	2	3	O	1	2	3	D		M
CI	24	2	8	7	7	14	5	1	4	9	7	4	4	12	2	8	2	4	8	12
C2	25	13	12	O	O	23	2	O	O	19	3	O	3	22	2	O	1	O	2	23

Cuestión 6 (P.6.) La simplificación y la amplificación de fracciones exigen técnicas muy simples y resultan imprescindibles en casi todos los casos en que se opera con fracciones; además, expresan la idea de que hay distintos modos de aludir a un mismo número racional. Los resultados obtenidos en ese aoartado de la prueha "u son de los

<u>Cuestión</u> <u>6</u> <u>(P.6.)</u> La simplificación y la amplificación de fracciones exigen técnicas muy simples y resultan imprescindibles en casi todos los casos en que se opera con fracciones; además, expresan la idea de que hay distintos modos de aludir a un mismo número racional. Los resultados obtenidos en ese apartado de la prueba no son de los peores, aunque la mitad de los alumnos (289 de 569), no responde. Para puntuar las respuestas en el intervalo (O ; 4) se ha procedido así: por cada simplificación, aunque no sea la total pedida, se toma 0,5 puntos y por cada simplificación total se toma 1 punto; sea S esa puntuación. Por cada amplificación escrita se toma 0,25 puntos; sea A esa puntuación. Finalmente, se toma:

$$P_6 = \frac{2 \times (A + S)}{3}$$

Esos resultados numéricos se expresan en la tabla (P6 ; TI), que traducida a estimación cualitativa en términos de M, 1, D, se representa en el gráfico (P ; Gl), apartado P6

(P6 ; TI)

	PUNTUACION					media
	O	1	2	3	4	1,6
N° de alumn	168	121	118	98	62	
%	29	21	21	17	11	

Para discernir entre simplificación y amplificación puede examinarse la tabla (p6 ; TI), en la que se observa que el número de alumnos que saben amplificar es prácticamente el triple de los que saben simplificar; el de los que no saben ni una cosa ni otra es más de la mitad del total.

(P6 ; TI)

	simplificaciones				amplificaciones			
	O	1	2	3	O	1	2	3
% de alums	57	23	11	9	56	12	7	25

(P6 ; T3)

medias	N° clgs	%
O a 1	5	23
> l a2	12	55
>2a3	4	18
> 3	1	4

Tomando cada Colegio como un individuo representado por la media de las puntuaciones de sus alumnos, los resultados aparecen en la tabla (P6 ; T3), en la que se ve que el 78 % de los Colegios no llega a la media de 2 puntos en el intervalo (O ; 4). y en cuanto a la comparación detallada de los dos Colegios extremos, CI y C2 es aleccionadora la tabla (P6 ; T4), que resume la situación. Se advierte que CI es el

Tomando cada Colegio como un individuo representado por la media de las puntuaciones de sus alumnos, los resultados aparecen en la tabla (P6 ; T3), en la que se ve que el 78 % de los Colegios no llega a la media de 2 puntos en el intervalo (O ; 4). y en cuanto a la comparación detallada de los dos Colegios extremos, CI y C2 es aleccionadora la tabla (P6 ; T4), que resume la situación. Se advierte que CI es el mismo tanto en simplificación como en amplificación y por tanto en el conjunto, así como C2 es también el mismo de las tres consideraciones.

(p6 ; T4)

Colg	N° de alms	Simplificación O	1	2	3	Amplificación O	1	2	3	Conocimiento D	1	M
e l	24	1	11	7	5	6	3	2	13	13	11	O
C2	29	26	2	1	O	25	1	1	2	2	3	24
Cl%		4	46	29	21	25	13	8	54	54	46	O
C2%		90	7	3	O	87	3	3	7	7	10	83

<u>Cuestión</u> <u>7</u> <u>(P.7)</u> Como se observa en el gráfico (P ; 01), apartado P7, este punto de representar distintos números racionales por fracciones del mismo denominador es prácticamente desconocido, a pesar de que el núcleo de los cuestionarios Oficiales de 6° Curso de E.G.B. es el maneio de fracciones. Sólamente un Colegio (que tiene 24

típica de 1,9. En él hay 8 alumnos (33%) que responden a las cuatro fracciones, pero hay 13 (54%) que no responden a ninguna. La distribución de medias de los Colegios está en la tabla (P6 ; TI) Y el detalle de las puntuaciones de los alumnos en la (P6 ; TI). Es muy de notar que 485 alumnos de 569 no puedan responder a ninguna de las opciones dadas.

(P7 ; TI)

	PUNTUACIONES					media	Medias	N° colgs	%
	o	1	2	3	4	0,41	o		
							a 0,5	15	68
N° alms	485	17	21	12	34		>0,5 a 1	6	27
%	85	3	4	2	6		1,67	1	5

CONTRIBUCION DE LOS COLEGIOS EXTREMOS. Es interesante conocer los resultados que ofrecen los dos Colegios extremos y la contribución que aportan a la totalidad de la muestra. En la tabla (P ; TI) pueden analizarse esa aportación y compararla en cada cuestión con los resultados del grupo. Hay que decir que el CI de 5, 6 Y 7 es el mismo Colegio, como también es el mismo el C2 de 3, 4 Y 6 y el C2 de 2 y 7.

(PI; TI)

	Colgs	N° de alums	PUNTUACION O	1	2	3	4	media	media gral

2 Y 7.

(PI; TI)

	Colgs	N° de alums	PUNTUACION O	1	2	3	4	media	media gral
2	C1	35			37	29	34	2,97	1,65
	C2	32	22	69	9			0,87	
3	CI	27	5		3		19	3,0	1,22
	C2	29	100					0.0	
4	CI	31		6	16	32	46	3,18	2,58
	C2	29	10	45	28	14	3	1,55	
5	C1	24	8	46	34	4	8	1,58	0,82
	C2	25	80	16	4			0,24	
6	C1	24			25	37	38	3,13	1,6
	C2	29	72	14	7	O	7	0,56	
	el	24	54		4	9	33	1.67	

B) RECURSOS

Explorado ya el mayor o menor dominio que los alumnos tiene de las técnicas operativas, en esta secci6n se desea hacerlo con el de las relaciones numéricas entre los términos de las operaciones. Ese conocimiento 10 reseñamos como RECURSOS.

En esta sección ha dejado de intervenir uno de los Colegios participantes en el resto de la prueba, por lo que ahora son 21 Colegios con un total de 545 alumnos los que aparecen en los resúmenes.

En la calificaci6n numérica se ha conservado el intervalo (0;4), pero la índole de las cuestiones se presta más a una clasificación cualitativa (Domina, Bien, Insuficiente, Malo, Ignora), que a una puntuación numérica y así se describen los resultados preferentemente.

Cuestión 1 (Rll Este enunciado no se dirige a la observación del conocimiento de las técnicas (por ejemplo, disposición de los números para el cálculo) sino a valorar el dominio y la familiaridad del alumno con sumas, restas y productos, yeso con números de una sóla cifra; únicamente en la primera parte se ofrecen números de dos cifras, todos menores que 20, con objeto de discriminar los resultados buenos de los óptimos. El resumen de los resultados obtenidos en esta primera parte, en que intervienen técnicas (por ejemplo, disposición de los números para el cálculo) sino a valorar el dominio y la familiaridad del alumno con sumas, restas y productos, yeso con números de una sóla cifra; únicamente en la primera parte se ofrecen números de dos cifras, todos menores que 20, con objeto de discriminar los resultados buenos de los óptimos. El resumen de los resultados obtenidos en esta primera parte, en que intervienen s61amente los signos + y -, lo ofrece la tabla (Rl ; TI)

(Rl ; TI)

No respuestas	O	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N° alumnos que la dan	20	6	15	15	27	50	45	52	82	114	119
% del total de alumnos	4	1	3	3	5	9	8	10	15	21	22

En ella llama la atención que exista un 4% de alumnos que no son capaces de completar ni una sóla respuesta, si bien, el 22% lo hace con todas. A partir de esos resultados, se ha calificado con MALO todo resultado que aporte menos de 4 respuestas buenas, con INSUFICIENTE los que dan buenas 4, 5 ó 6 respuestas, con BUENO los que tienen buenas 7 u 8 respuestas y con DOMINA los que tienen 9 o las 10. El gráfico (R1 ; G1) representa esos resultados y deja ver que el 33% de los

En cuanto a los Colegios considerados como unidades estadísticas representados por sus medias, merece examinarse la tabla (Rl ; TI)

(Rl ; TI)

Intervalo de media	Mal	Insuficiente	Bueno	Domina
N° de Colgs		10	8	2

Se ve que hay dos Colegios en los que la cuestión se domina. Aclaremos que en uno de ellos el 89 % de los alumnos obtiene 9 ó 10 puntos y en el otro el 80 % esá en las mismas condiciones. En cambio, hay otro Colegio en el *que* sólamente un alumno ha llegado a 9 puntos (y ninguno a 10); tan sólo 2, del total de 28, están en 7 u 8 respuestas, el 32 % ofrecen menos de 4 respuestas y el 21 % no pueden dar ninguna. La tabla (Rl ; T3) ofrece la comparación de resultados habidos en los Colegios extremos (el el más alto en puntuación y C2 el más bajo)

(Rl ; T3)

Respuestas buenas	O	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
En Cl								3		14	17
En C2	6	1	1	1	6	5	5	1		1	O

(Rl ; T3)

Respuestas buenas	O	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
En Cl								3		14	17
En C2	6	1	1	1	6	5	5	1		1	O

En la segunda parte de la cuestión, referida al conocimiento de productos, el gráfico (Rl ; G2) es muy distinto del anterior. Ahora el % de resultados muy malos es menor que antes pero en cambio el61 % son insuficientes o malos. Sólamente el 8% de los alumnos domina ese cálculo y el 31% puede darse por bueno incluyendo en ellos los que han respondido 8 veces de las 13; éstos últimos son el 18% del total. La tabla (Rl ; T4) detalla el número de respuestas

(Rl ; T4)

N° de respuestas	O	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
N° de alums que las dan	11	4	6	14	43	59	119	81	96	44	28	11	9	20

Las medias obtenidas por los Colegios se resumen en (Rl ; T5), en la que hay que hacer notar que el único Colegio que aparece en el intervalo "BIEN" es el CI de la tabla (RI ; TI) y que en él resuelven los 13 ejercicios el 20 % de los alumnos. Ese y otros detalles pueden observarse en (Rl ; T6), que compara los Colegios Cl y C2 de este apartado

(R1 ; T5)

N° de Colegios	O	20	1	O
InterO medo	M	1	B	D

(R1 ; T6)

Resp. buenas	O	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	N° alms
En CI						1	6	6	8	O	6	O		7	35
En C2	4	O	1	2	5	3	1	4	1	O	O	1		1	24

<u>Cuestión</u> <u>2</u> <u>(R.2.).</u> La relación fundamental de la división, D=dxc+r, ha resultado ser muy mal conocida, a pesar de que se ha tomado como dominada si el alumno ha realizado el cálculo bien al menos tres veces. Se ha escrito X si no ha sido empleada esa relación fundamental. Sólamente uno de los 545 alumnos participantes ha respondido bien en los seis casos planteados y pertenece a un Colegio en el que el 63 % de sus alumnos IGNORA la relación.

<u>Cuestión</u> <u>2</u> <u>(R.Z.).</u> La relación tundarnentaí de la dIVISIón, U=dxc+r, ha resuitaco ser muy mal conocida, a pesar de que se ha tomado como dominada si el alumno ha realizado el cálculo bien al menos tres veces. Se ha escrito X si no ha sido empleada esa relación fundamental. Sólamente uno de los 545 alumnos participantes ha respondido bien en los seis casos planteados y pertenece a un Colegio en el que el 63 % de sus alumnos IGNORA la relación.

Como se puede observar en la tabla (R2 ; TI), el 58 % del total de alumnos la ignora también y el 42 % la utilizan al menos tres veces, aunque de ellos el 73 % (que es, por tanto, el 30 % del total) no pasa de cuatro.

(R2 ; TI)

	RESPUESTAS BUENAS							RESPUESTAS MALAS					
	0	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
N° alums	146	122	50	74	91	61		147	85	27	23	52	22
%	27	22	9	14	17	11		27	16	5	4	10	4

Aunque parezca innecesario, subrayamos que en el epígrafe "RESPUESTAS MALAS" sólamente figuran las que son incorrectas y por ello no se computan en ese

Observando los Colegios y la media de cada uno, la situación se resume en la tabla (R2 ; 1'2), que sintetiza el detalle de la (R2;T3). Recordamos que se trata de las medias del número de respuestas, que puede ser de O a 6.

(R2 ; 1'2)

medias	N° de Colgs
Oal	2
>la2	11
>2a3	5
>3	3

(R2 ; T3)

Intervalo	N° de Colgs	%
Domina	3	14
Ignora	18	86

Cuestión 3 (R.3.) En esta cuestión el dominio consiste en saber el orden en que hay que tomar los cálculos, es decir, en entender 10 que significa cada expresión numérica. Se ha tomado D si hay más de cinco respuestas y todas son buenas; para tres, cuatro o cinco respuestas y todas buenas, se ha escrito 1 (conoce la cuestión con poca seguridad); menos de tres respuestas se anota X. Si en más de dos respuestas ha tomado los datos en el orden en que se presentan y no adecuadamente, se ha anotado XX (la idea que tiene no le ofrece duda, pero es equivocada).

Los resultados habidos están sintetizados en el apartado R2 del gráfico (R ; G1) que aparece al final del análisis de RECURSOS. El detalle lo da la tabla (R3 ; TI)

seguridad); menos de tres respuestas se anota X. Si en más de dos respuestas ha tomado los datos en el orden en que se presentan y no adecuadamente, se ha anotado XX (la idea que tiene no le ofrece duda, pero es equivocada).

Los resultados habidos están sintetizados en el apartado R2 del gráfico (R ; G1) que aparece al final del análisis de RECURSOS. El detalle lo da la tabla (R3 ; TI)

(R3 ; TI)

	D		X	XX
N° de alums	15	52	188	290
%	3	10	34	53

(R3 ; T2)

Medias	N° Colgs
O a 1	2
> l a 2	11
>2a3	5
>3	3

En ella se pone de manifiesto el nivel, indeseablemente bajo, del conocimiento de lo que se puede llamar "sintásis numérica". Aún dando por aceptable lo que se ha calificado de insuficiente, sólo el 13% de los alumnos sabría manejarse con esas expresiones y aún no en todos los casos, mientras que el 87% o ignora el significado o la interpretación que se le ha inculcado es falsa.

En cuanto al examen de los Colegios como bloques, la tabla (R3;T3) compara no conoce, o conoce equivocadamente, el significado de una expresión numérica en la que s61amente intervienen la adición, la sustracción y la multiplicación,

(R3 ; TI)

Colegios	N° de alumnos	En porcentajes			
		XX	X	1	D
Cl	35	34	37	17	12
C2		100	O	O	O

<u>Cuestión</u> <u>4</u> <u>(R.4.)</u> Aquí se controla si el alumno conoce algún criterio para escribir fracciones menores que otra dada, o mayores que otra, o comprendidas entre otras dos dadas. Se ha pedido uno sólo de los términos (numerados o denominador) con 10 que el criterio a utilizar aparece ya inducido y hay varias soluciones para cada caso.

La puntuación en el intervalo (O ; 4) se obtiene mediante la fórmula:

$$p_4 = \frac{2x(p+s+2xt)}{9},$$

donde p es el número de respuestas al primer apartado (menor que), s el de respuestas al segundo (mayor que) y t el de respuestas al tercero (entre). Para la calificación en términos de dominio, se toma D

La puntuación en el intervalo (O ; 4) se obtiene mediante la fórmula:

$$P_4 = \frac{2 x (p + s + 2 x t)}{9},$$

donde p es el número de respuestas al primer apartado (menor que), s el de respuestas al segundo (mayor que) y t el de respuestas al tercero (entre). Para la calificación en términos de dominio, se toma D
(domina) si P4 es 2 o más, 10 que exige que no se deje en blanco la tercera parte; se toma X (ignora) si tanto p como <u>s</u> son menores que 2. No se ha dado el caso de que en esa situación sea $t > O$. En los restantes casos se ha clasificado al alumno en I (conoce pero con poca seguridad).

El gráfico general (R ; G1), en su apartado P4, muestra que la cuestión ha resultado ser la segunda más dificil de las propuestas. Sólamente 2,4 % de los alumnos la domina (13 alumnos de los 545) y de ellos, 7 (54 %) proviene de dos Colegios. El 74 % ignora cómo escribir una fracción menor que otra dada y el 24 % da entre dos y cinco respuestas buenas.

Interesa contabilizar con más detalle estos resultados, lo que se hace en la tabla (R4 ; TI)

(R4 ; TI)

N° de resps	de "menor que" O	1	2	3	de "mayor que" O	1	2	3	de "entre" O		2	3	>3
N° de alms	146	116	131	152	219	176	48	102	488	46	10		O
%	27	21	24	28	40	32	9	19	90	8	2		

Los números de esa tabla no son encajables, es decir, los 102 alumnos que dan tres respuestas en "mayor que" no están todos entre los 152 que dan otras tres en "menor que". El gráfico (R ; G1), ya citado, en el apartado (R4), es el que informa sobre el grado de dominio. La tabla (R4 ; TI) da el número de alumnos para cada número de respuestas, pero no la clasificación de ellos.

Es interesante estudiar cómo varía la valoración de los resultados al introducirse el concepto "entre". Véase para ello la tabla (R4 ; T2), que da las medias de los Colegios extremos referidas a la puntuación en el intervalo (o ; 4) según se considere o no la relación "entre". Para sólamente las dos primeras ("menor que" y "menor que"), la fórmula que daría la puntuación en el intervalo (0;4) sería:

$$P'_4 = \frac{2 \times (p + s)}{3}$$

o no la relación "entre", Para sólamente las dos primeras ("menor que" y "menor que"), la fórmula que daría la puntuación en el intervalo (0;4) sería:

$$P'_4 = \frac{2 \times (p + s)}{3}$$

(R4 ; TI)

MEDIAS EN EL INTERVALü (O ; 4)

Colegio	Con < y > sólamente	Con las tres relaciones
Cl	2,53	0,94
C2	0,83	0,28

Se pasa de lo que podría tomarse como un conocimiento en media aceptable a otro menos que insuficiente. Esa carencia de recursos para encontrar una fracción comprendida entre otras dos dadas se pone de manifiesto examinando la tabla (R4 ; T3) Y viendo las respuestas que se ofrecen en el Colegio que ha obtenido los mejores resultados de los 21 participantes.

(R4 ; TI)

RESPUESTAS BUENAS (%)

	de "menor que"				de "mayor que"				de "entre"				
	O	1	2	3	O	1	2	3	O		2	3	>3
CI (35)	20	3	20	57	34	14	3	49	86	9	*	*	O
C2 (24)	63	12	17	8	58	34	4	4	100	O	O	O	O

* en esa casilla UN alumno. Los (35) y (24) son el total de alumnos de CI y C2, respectivamente.

Cuestión 5 (R.5.) La previsión del número de cifras del cociente entero de una división está menos dominada que la 2 (R.2), que se refiere a la relación fundamental.

En términos de dominio, se ha tomado D (domina) si las cuatro respuestas son buenas, 1 (conoce, pero sin mucha seguridad) si tiene tres respuestas buenas y X (ignora) en los casos restantes.

El cómputo del total se detalla en la tabla (R5 ; TI) para el número de respuestas y en el gráfico (R ; Gl), en su columna (R.S), en términos de dominio

(RS ; TI)

	BIEN					MAL			
No de resptas	O	1	2	3	4	1	2	3	4

respuestas y en el gráfico (R ; Gl), en su columna (R.S), en términos de dominio

(RS ; TI)

	BIEN					MAL			
No de resptas	O	1	2	3	4	1	2	3	4
N° de alumnos	268	60	46	52	119	73	54	53	93
%	49	11	8	10	22	13	10	10	17

Hay que tener en cuenta que de los 119 alumnos que dan las cuatro respuestas buenas, 20 proceden de un mismo Colegio (que tiene 29) y otros 20 de un segundo Colegio (que tiene 35). Esos dos Colegios son los primeros entre los de mejores resultados y aportan entre ambos la tercera parte de los alumnos que dominan la cuestion. También es de notar que el 27 % de los alumnos dan tres o cuatro respuestas pero todas malas (o, a lo más, dan además una sóla buena) sin que se pueda saber el criterio que aplican.

Para la observación global de las medias de los Colegios se da la tabla (R5 ; TI), en la que se observa que hay un sólo Colegio en que la media de respuestas buenas es mayor que 3 (3 , 2 en particular). Tal Colegio es el CI de la tabla (RS ; T3) Yen él dominan la cuestión 69 % de sus alumnos, si bien hay cuatro que no dan ni una

(R5 ; TI)

Medias de O a 4	<1	>1a2	>2a3	> 3
N° de Colgs	8	9	3	1
%	38	43	14	5

(R5 ; T3)

CoIgO	N° de alums	Respuestas buenas O	1	2	3	4	malas 1	2	3	4
C1	29	14	*	*	10	69	10	*	*	10
C2	18	67	11	17	*	O	17	33	17	17

Los datos sobre respuestas en porcentaje.
* en esa casilla un aluno sólamente.

<u>Cuestión</u> <u>6</u> <u>(R.6.)</u> Puede pensarse que esta cuestión de los cuantificadores es más de comprensión del vocabulario que de otra cosa pero entendemos que precisamente el vocabulario es el recurso por excelencia, tanto para seguir un pensamiento ajeno como para expresar el propio. La cuestión está referida a la idea de múltiplo como soporte de conocimiento generalizado.

Se ha clasificado en D (domina) a quien ha dado más de site respuestas buenas, en X (ignora) a Quien da menos de 4 v en 1 (insuficiente) a los demás.
vocabulario es el recurso por excelencia, tanto para seguir un pensamiento ajeno como para expresar el propio. La cuestión está referida a la idea de múltiplo como soporte de conocimiento generalizado.

Se ha clasificado en D (domina) a quien ha dado más de site respuestas buenas, en X (ignora) a quien da menos de 4 y en 1 (insuficiente) a los demás.

El resultado lo expresa el gráfico (R ; Gl) en su apartado R6: el 66 % (dos tercios) de los alumnos sabe hacer la distinción de cuantificadores en estos ejemplos pero sin mucha seguridad; 22 % puede darse por buen conocedor y 12 % acierta menos de cuatro veces. La tabla más detallada, resumida por el gráfico anterior, es la (R6 ; TI), en la que los % están aproximados al entero.

(R6; TI)

	NUMERO DE RESPUESTAS BUENAS O	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	total
N° alums	13	5	12	34	85	103	98	76	52	38	29	545
%	2	1	2	6	16	19	18	14	10	7	5	100

Hay 29 alumnos que responden a TODOS los diez casos planteados, tantos

Si se examinan los resultados que ofrecen los Colegios como bloques, la tabla explicativa es la (R6 ; 1'2) en la que se ve que 85 % de ellos suministran un conocimiento insuficiente.

(R6 ; TI)

Intervalo	Ignora	Insuficiente	Domina
N° de Colgs		18	2

A su vez, la diferencia entre Colegios extremos se puede estudiar en la tabla (R6 ; T3); a partir de ella se puede calcular que la media de CI es mayor que 7 y la de C2 menor que 4.

(R6 ; T3)

	NUMERO DE RESPUESTAS BUENAS											
ColgO	O	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	total
Cl				l	2	2	1	l	9	2	8	26
C2	5	2	4	4	1	4	2	O	2	O	O	24

CI ofrece el 73 % de los alumnos en D; C2 el 63 % en X

Cuestión 7 (R.7.) Es una cuestión sobre multiplicación y, a nuestro juicio, los resultados encontrados son reveladores de un tipo de enseñanza particular que

CI				l	2	2	1	1	9	2	8	26
C2	5	2	4	4	1	4	2	O	2	O	O	24

CI ofrece el 73 % de los alumnos en D; C2 el 63 % en X

<u>Cuestión</u> <u>7</u> <u>(R.7.)</u> Es una cuestión sobre multiplicación y, a nuestro JUICIO, los resultados encontrados son reveladores de un tipo de enseñanza particular que podremos comentar más tarde.

A efectos de la clasificación de los alumnos se ha procedido de la siguiente manera: Por cada línea completada en sus dos ejemplos se ha concedido 1 punto; si en una línea hay un sólo ejemplo pero adecuado, se anota 0,5 puntos; si en una misma línea un ejemplo es adecuado y el otro no lo es, se anota 0,25. A partir de ello se clasifica D (domina) si el total de puntos es 4 o más, se clasifica en X si la sima de puntos es menor que 2 y se clasifican en 1 los casos restantes.

El gráfico global (R ; G1, en su apartado R7) muestra que el 98 % da menos de 2 puntos, a pesar de que las cuestiones primera, cuarta y quinta parecen de respuesta inmediata. En realidad, sólamente uno de los 545 alumnos ha conseguido 8 puntos con buen dominio de la cuestión.

que tan sólo el 1 % del total llega a superar los 4 puntos y el 2 % supera los 3. También se da el detalle del Colegio CI de mejores resultados. Siendo el mejor, el 77 % de sus alumnos ignora la cuestión pero el 14 % alcanza D. Hay que advertir que existen dos Colegios de media 0, es decir que ninguno de sus alumnos responden a ningun ejemplo. Ese Colegio mejor tiene de media 1 en el intervalo (O ; 12) de respuestas, por lo que los restantes 20 tienen media menor.

(R7 ; TI)

Nº de respuestas	O		2	3	4	5	6	7	8	>8	total
N° de alumnos	431	57	28	17	7	4	O	O	1	O	545
%	79	10	5	3	1	7	O	O	2		100
el	24	3	2	1	3	1	O	O	1	O	35

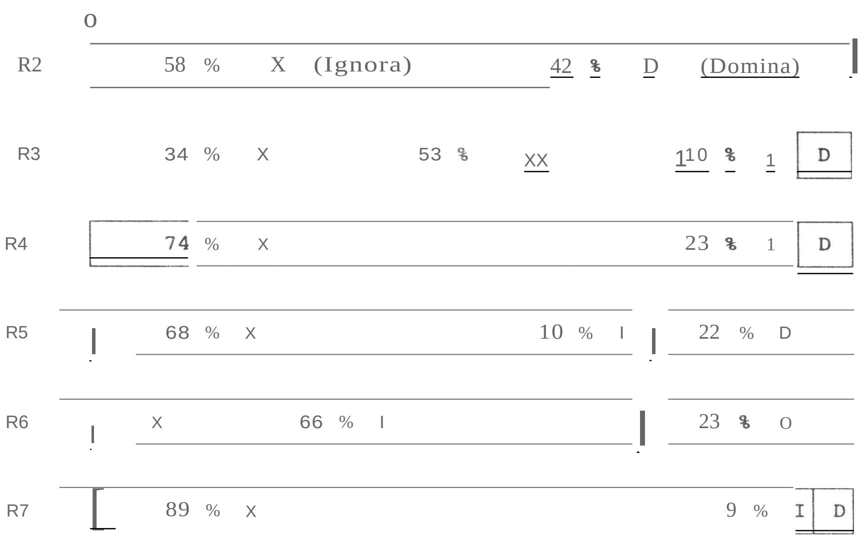
REPRESENTACIONES GRAFICAS

Se presentan en (R ; G1) representaciones de los resultados de R.2 a R.7 a que se ha aludido en el desarrollo de las descripciones anteriores y que no necesitan explicación.

(Rl ; Gl)

Se-presentan en (R ; G1) representaciones de los resultados de R.2 a R.7 a que se ha aludido en el desarrollo de las descripciones anteriores y que no necesitan explicación.

(Rl ; Gl)



XX significa qu- el alumno tie

e) PROBLEMAS

A efectos de su estudio, los enunciados se han clasificado en dos partes. En la primera están los números uno, dos, tres y seis, es decir, el referente a la representación en escala y los que se refieren exclusivamente a números naturales. En la segunda parte hemos tomado los enunciados números cuatro y cinco, en los que intervienen fracciones.

Los resultados alcanzados en una y otra de ambas partes se encuentran condensados en los gráficos (PB ; G1) Y (PB ; G2)

PROBLEMA PRIMERO. Se han valorado las respuestas adjudicando de O a un puntos por cada una de las cuatro cuestiones examinadas (escala de los lados del rectángulo, escala de la puerta y la ventana, colocación centrada de éstas y perspectiva de las mismas. A partir del intervalo (O ; 4) se han dado las calificaciones de BIEN, INSUFICIENTE o MAOLO, según el criterio ya señalado en los capítulos precedentes. Los resultados se muestran en la tabla (Pb 1 ; TI)

(PBI ; TI)

INSUFICIENTE o MAOLO, según el criterio ya señalado en los capítulos precedentes. Los resultados se muestran en la tabla (Pb 1 ; TI)

(PBI ; TI)

	escala del rectángulo			puerta-ventana			centrado			perspecta.		
	O	0,5		O	0,5	1	O	0,5		O	0,5	
N° de alums	309	74	186	414	65	90	501	45	23	478	31	60
%	54	13	33	73	11	16	88	8	4	84	5	11

En ella destaca como especialmente bajo el resultado de colocar puerta-ventana centradas en los lados correspondientes; el 88 % de los alumnos no despegan de O puntos y resultado parecido (84 % de O puntos) se obtiene en la apreciación de la perspectiva. La escala tomada para puerta-ventana es buena en el 16 % de los casos y de O puntos en el 73 % . Para la longitud de los lados, el 33 % la representa aceptablemente pero el 54 % lo hace francamente mal (O puntos).

las puntuaciones es 0,97 , que resulta muy alejada de la mínima deseable.

(PBl ; TI)

	PUNTUACIONES					media
	O	1	2	3	4	0,97
N° de alumnos	273	145	65	57	29	
%	48	25	11	10	5	

PROBLEMA 2. En este segundo problema, como en todos los que siguen, se ha podido observar la mala costumbre, tan extendida como indeseable, de no citar razonamiento alguno, por breve que sea, que justifique los cálculos que se escriben en la resolución. Debido a ello se ha dado por buena toda solución consistente en haber escrito una operación u operaciones para las que exista algún razonamiento que las justifique, pero sin poder saber si el alumno lo ha hecho o no. La verdad es que esta situación resulta demasiado frecuente en la realidad escolar a cualquier edad, no sólo en la E.G.B.

En el razonamiento que puede hacerse para resolver este problema aparece la sustracción (o adición y sustracción) y la idea de mitad, Para valorar las respuestas se ha atendido a los cálculos hechos y a la solución presentada. En cualto al primero, se

en la E.G.B.

En el razonamiento que puede hacerse para resolver este problema aparece la sustracción (o adición y sustracción) y la idea de mitad, Para valorar las respuestas se ha atendido a los cálculos hechos y a la solución presentada. En cualto al primero, se ha puesto 1 si están escritos todos los cálculos para llegar a la solución; se ha puesto 0,5 si sólamente están escritos algunos pero la solución que se da es la buena; se pone O si no hay cálculos escritos. Atendiendo a la solución dada, se ha puesto 0,5 ó 1 si aparece la solución buena; X, si la solución que se da es mala; O si no se da solución alguna.

Para pasar a la puntuación en el intervalo (O ; 4) tenemos en cuenta que se llega a la solución mediante tres operaciones. Por cada una que esté consignada se da hasta 1 punto y por dejar constancia de la solución se da 1 punto.

La tabla (Pb2 ; TI) ofrece los resultados obtenidos para el cálculo y para la solución, así como la reducción al intervalo citado está detallada en la (Pb 2 ; T2). La información de la primera visualiza en los gráficos (Pb2 ; G1) Y (Pb2 ; G2), mientras que la de la segunda está resumida en el (PB ; Gl), apartado "Bolas"

(pb 2 ; TI)

	CALCULO			SOLUCION			
	O	0,5	1	X	O	0,5	
n? de alums	178	96	295	172	45	O	352
%	31	17	52	30	8		62

(Pb 2 ; TI)

	PUNTUACIONES					media
	O	1	2	3	4	2,54
N° de alumnos	91	87	76	60	255	
%	16	15	13	11	45	

Problema 2. PORCENTJAES

(Pb2 ; G2)

O 62 92 100

SOLUCION BUENA 62 %	SOLUCION MALA	SIN SOLUCION

(Pb 2 G1)

52 69

Tonos LOS CALCULOS 52 %	SIN CALCULOS 31 %

I SOLUCION I

(Pb 2 Gl)

52 69

Tonos LOS CALCULOS 52 %		SIN CALCULOS 31 %

El gráfico global de la primera parte, (PB ; Gl), muestra que este enunciado es el que ha resultado más asequible y el 45 % de los alumnos dominan la respuesta, aunque hay que insistir en que ninguno redacta el más pequeño razonamiento, limitándose en el mejor de los casos a escribir cálculos; el 31 % se califica de muy malo, lo que quiere decir que no dan respuesta alguna o la que dan es inadecuada; y el 24 % escribe alguna operación que es adecuada al problema, o dan la solución sin escribir cálculos. en particular, 62 % han dado la solución buena, con cálculos escritos o no y el 30 % da una solución pero es mala; sólamente el 8 % no da solución alguna.

En lo referente a los cálculos escritos, 52 % dejan constancia de todos los necesarios y el 30 % no lo hacen con ninguno. Además, el 17 % escriben cálculos parciales, aunque la solución que dan es buena.

PROBLEMA 3. Este enunciado no exige operaciones distintas del anterior, pero el razonamiento es menos sencillo y así se ha manifestado en los resultados, como puede verse en el gráfico general (PB ; G1), sección" Años". S6lamente 14 % de los alumnos resuelven el problema bien, siempre con el defecto de no indicar razonamiento alguno, mientras que 78 % queda calificado de muy malo. El 8 % restante es la suma del 7 %, que tiene dos puntos y por tanto está más cerca de "malo" que de "bien", más el 1 %, que tiene 3 puntos, aproximándose más a "bien" que a "malo". La tabla (Pb3 ; TI) detalla todo ello.

En lo que se refiere a las soluciones presentadas y a los cálculos realizados, la tabla (Pb 3 ; TI) Yel gráfico (Pb 3 ; G1) resumen de los resultados. En la primera, X significa que el cálculo es inadecuado.

(Pb 3 ; TI)

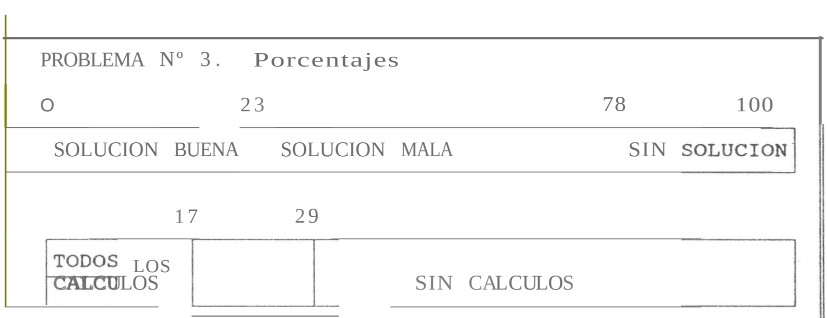
	PUNTUACION					media
	O	1	2	3	4	0,95
N° de alums	316	126	40	8	79	
%	56	22	7	1	14	

(Pb 3 ; T2)

	CALCULO				SOLUCION
N° de alums	316	126	40	8	79
%	56	22	7	1	14

(Pb 3 ; T2)

	CALCULO				SOLUCION			
	X	O	0,5		X	O	0,5	I
N° de alums	63	341	68	97	312	126	4	127
%	11	60	12	17	55	22	0,7	22



Se ve que el 55 % da una solución al problema pero es mala y casi el 23 % la escribe todos pero el 71 % no presenta cálculos o los que hace son improcedentes.

PROBLEMA 6. Lo citamos en este lugar porque pertenece también a la primera parte, en que se piden cálculos con números naturales. La primera cuestión que plantea se dirige hacia la multiplicación de enteros, que en los problemas anteriores no aparecía. La segunda cuestión es una combinación simple de sumas y restas. Dado el orden de redacción del enunciado, los alumnos atienden antes a la primera cuestión y resuelven la segunda a partir del conocimiemto de ella. Pero de los que no han hallado la cabida del autobús ninguno ha atacado la segunda cuestión, que tiene como solución una frase del tipo "llegó con un viajero menos".

La valoración se ha hecho como para los problemas 2 y 3; también aquí la señal X en el cálculo significa que los presentados no corresponden al problema. Para la puntuación total se han concedido dos puntos por hallar el número de viajeros que caben y se ha graduado de O a dos puntos la resolución de la segunda parte.

Esa puntuación total se detalla en la tabla Pb6 ; TI), que a su vez está traducida en el gráfico general (PB ; Gl), sección "autobús". Se ve que permanece el número de alumnos que resuelven bien el problema (15 %) y disminuye el de los que no 10 hacen o lo hacen mal (64 %); esta disminución engrosa, por tanto, el número de

caben y se ha graduado de 0 a dos puntos la resolución de la segunda parte.

Esa puntuación total se detalla en la tabla Pb6 ; TI), que a su vez está traducida en el gráfico general (PB ; Gl), sección "autobús". Se ve que permanece el número de alumnos que resuelven bien el problema (15 %) y disminuye el de los que no lo hacen o lo hacen mal (64 %); esta disminución engrosa, por tanto, el número de
"insuficientes", que aquí es del 22 % frente al 8 % en el problema número 3.

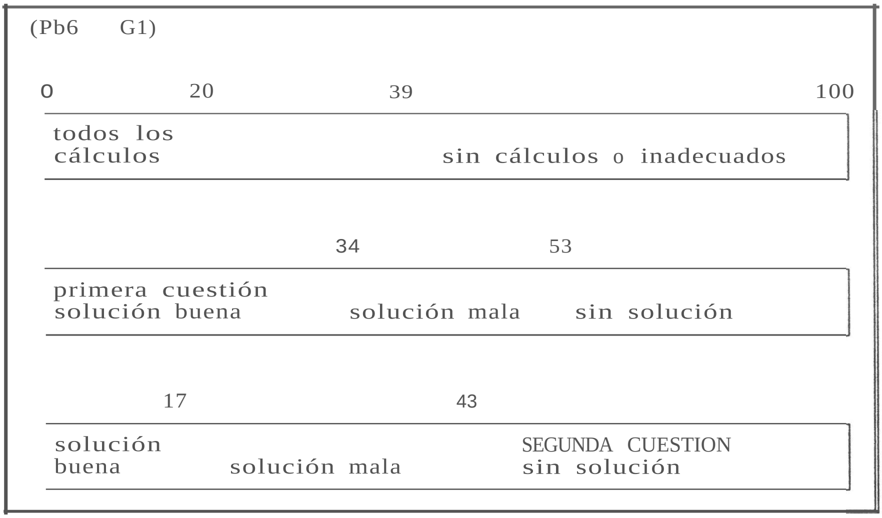
(Pb6; TI)

	PUNTUAeION					media
	O	1	2	3	4	1,14
N° de alumnos	343	18	79	43	86	
%	60	3	14	8	15	

El detalle de los cálculos efectuados y de las soluciones dadas está en la tabla (Pb6 ; T2) Y en el gráfico (Pb6 ; G1).

(Pb6 ; T2)

X O 0,5 X O X O



En ellos se ve que el 34 % resuelve la primera cuestión pero sólamente el 17 % (la mitad del anterior) resuelve la segunda. Ya se ha hecho constar que todos los que resuelven esa segunda han resuelto previamente la primera. Nótese que en la calificación en el intervalo (0 ; 4) han llegado a 4 puntos el 15 % de los alumnos; eso no presenta contradicción con que sea el 17 % los que han dado las soluciones a las dos cuestiones planteadas, porque la puntuación se adquiere por las soluciones dadas y los cálculos realizados y presentados.

% (la mitad del anterior) resuelve la segunda. Ya se ha hecho constar que todos los que resuelven esa segunda han resuelto previamente la primera. Nótese que en la calificación en el intervalo (0 ; 4) han llegado a 4 puntos el 15 % de los alumnos; eso no presenta contradicción con que sea el 17 % los que han dado las soluciones a las dos cuestiones planteadas, porque la puntuación se adquiere por las soluciones dadas y los cálculos realizados y presentados.

Véase que hay un 14 % de alumnos que dan la solución primera sin escribir todos los cálculos (en particular son 38 los alumnos que dan la solución buena sin escribir cálculo alguno, lo que supone casi la quinta parte de las soluciones correctas). Por la razón ya señalada dos veces, el gráfico de la segunda cuestión está comprimido respecto al de la primera en la zona de la solución buena y está ampliado en el de la mala y en el de la no existencia de solución.

PROBLEMAS. SEGUNDA PARTE. Esta parte está constituida por los dos enunciados en los que aparecen fracciones. Plantean la utilización de éstas como operadores o, dicho de otro modo, la utilización del concepto que responde a la interpretación presentada en la cuestión 1 de PROCESOS. Allí el 50 % de los alumnos ha dominado la idea, como se muestra en la tabla (PC 1 ; T1) y en el gráfico (PC rectángulo "RF"; en cambio, en esta segunda parte es muy precaria la utilización de aquella idea reconocida antes.

PROBLEMA 4. El enunciado pide que se haga actuar sobre un mismo número a dos fracciones, por lo que es presumible que las respuestas a ambas preguntas difieran poco, como así ha ocurrido.

En la tabla (Pb4 ; TI), que resume las respuestas, se ha anotado 1 ó O en FI y en F2 según haya o no constancia de los cálculos realizados para llegar a los números pedidos. Para el intervalo de puntuación (O ; 4) se toman 2 puntos por cada respuesta buena con los cálculos escritos; se da 1 punto si está la solución buena pero no los cálculos.

(Pb4 ; TI)

	EN Fl		EN F2		PUNTUACION					media
	O	1	O	1	O	1	2	3	4	1,29
N° de alums	381	188	355	214	341	6	74	11	137	
%	67	33	62	38	60	1	13	2	24	

Tanto en este nroblema como en el siguiente se ha matizado la denominación

	EN Fl		EN F2		PUNTUACION					media
	O	1	O	1	O	1	2	3	4	1,29
N° de alums	381	188	355	214	341	6	74	11	137	
%	67	33	62	38	60	1	13	2	24	

Tanto en este problema como en el siguiente se ha matizado la denominación para las puntuaciones de ese intervalo tomando las que se observan en el gráfico (PB ; G2) que es una visualización de las puntuaciones ofrecidas en la tabla (Pb4 ; TI). En ésta consta también el resumen para el conjunto de presentación de los cálculos y solución buena.

PROBLEMA 5. El enunciado del bloque de pisos da un operados y el número de llegada; lo que se pide es el número de salida. Para hallarlo basta hacer actuar sobre el número dado a la fracción inversa.

Como en los casos anteriores, para la valoración de la respuesta se ha tenido en cuenta tanto los cálculos realizados como la solución dada. Otra vez, la falta de justificación escrita impide comprender si los cálculos realizados están hechos al azar o resnonden a alsún razonamiento.

Tanto la tabla (Pb 5 ; TI) como el gráfico (PB ; G2) en el apartado "cinco-séptimos", que es la traducción de la puntuación expresad en aquella, permiten ver que este problema ha resultado mucho más difícil que el anterior, respondiendo al hecho de que la idea de inversa suele tratarse bastante menos que la de las demás referidas a las fracciones.

(Pb 5 ; TI)

	SOLUCION			PUNTUACION					media
	X	O	1	O	1	2	3	4	0,77
N° de alums	240	233	96	446	-	14	28	81	
%	42	41	17	78		2	5	14	

Pb 5 ; Gl)

0 17 59 100

constan los cálculos | cálculos no adecuados | sin cálculos

Hasta el 78 % de los alumnos dejan el problema sin respuesta o hacen cálculos inadecuados. Han sido 81 alumnos (14 % del total) los que lo resuelven D r debe

cálculos | cálculos no adecuados | Sl.n calculas

Hasta el 78 % de los alumnos dejan el problema sin respuesta o hacen cálculos inadecuados. Han sido 81 alumnos (14 % del total) los que lo resuelven pero debe hacerse notar que 35 de ellos (su 43%) son aportados por dos Colegios.

El gráfico (Pb 5 ; G1) muestra que el 42 % escribe cálculos que no son adecuados al problema y 41 % no escribe ningún cálculo. Sólamente el 17 % escribe algún cálculo adecuado, sean todos los necesarios o no.

D) CONTRIBUCION DE LOS COLEGIOS EXTREMOS

Como en los otros capítulos, resulta interesante conocer la contribución y los resultados que ofrecen en cada problema los dos Colegios extremos, esto es, los que dan resultado mejor que los demás (el) y los que lo dan peor (C2). La tabla (PB ; TI) resume esa información dando en porcentajes los alumnos que obtienen las calificacio-

(PB ; TI)

PRUEBA	CO	N° DE ALMS		PUNTUACION					MEDIA	MEDIA GRAL
				O	1	2	3	4		
1	Cl C2	30 20	% %	10 80	30 20	30 --	17 --	13 --	1,9 0,2	0,97
2	Cl C2	26 22	% %	– 36	8 14	4 4	8 4	80 42	3,6 2,0	2,54
3	Cl C2	26 25	% %	38 84	4 16	8 --	4 --	46 --	2,16 0,16	0,95
4	C1 C2	35 29	% %	9 100	-- --	14 --	6 --	71 --	3,31 0,0	1,29
5	Cl C2	35 29	% %	37 100	-- --	-- --	6 --	57 --	2,46 0,0	0,77
6	C1 C2	35 25	% %	25 92	-- --	23 4	17 4	35 --	2,37 0,2	1,14

Conviene saber que el Colegio Cl de los problemas 4°,5° Y6° es el mismo, así como también es el mismo el C1 de los 2o y 3o. De modo que en lo referente a esos problemas de cálculo hay dos Colegios que adelantan claramente a los demás. También es el mismo el C2 de 3⁰ y 6°, así como el C2 de 4° y 5°. En estos dos

Conviene saber que el Colegio Cl de los problemas 4°,5° Y6° es el mismo, así como también es el mismo el C1 de los 2o y 3o. De modo que en lo referente a esos problemas de cálculo hay dos Colegios que adelantan claramente a los demás. También es el mismo el C2 de 3° y 6°, así como el C2 de 4° y 5°. En estos dos Colegios parecen francamente desconocidas las cuestiones planteadas.

III) ALGUNAS REFLEXIONES SOBRE LOS RESULTADOS OBTENIDOS

Considerados en su conjunto, los resultados obtenidos son peores de lo deseado y aparece inmediato el deseo de averiguar la razón de ello, así como el de la búsqueda de procedimientos que los mejoren en el futuro. Seguramente, todo cuanto sigue será conocido y las propuestas de procedimientos parecerán evidentes, hasta pensadas por algunos como modos de actuación ya vistos; sin embargo, los conceptos matemáticos son universales y si el alumno los tiene confusos o francamente equivocados será porque así se le han suministrado.

sabe reconocer que la segunda región negra es 6/15 (nadie escribe 2/5) del rectángulo total; en cambio, el 67 % no sabe averiguar qué número es 1/6 de 90. Observemos que ambos grupos de alumnos se solapan; exactamente, en su intersección hay 209.

Muy posiblemente, se han usado con frecuencia esquemas como el de PI para dar idea de fracción y los alumnos que contestan saben recordar tales esquemas, por 10 que atinan a escribir una fracción en esos ejemplos particulares. Si el rectángulo total no estuviera subdividido en cuadrados el resultado sería peor, porque lo que se ha enseñado es a contar cuadrados y escribir dos números uno sobre la raya y otro por debajo. Que en esa situación puede entenderse la fracción como razón de cantidades es algo que sabe el Profesor, pero sólo él. En cambio, no se resuelve el sencillo problema Pb4 porque no se conoce la interpretación de la fracción como operador que, sin embargo, también puede realizarse a partir de los esquemas como el comentado.

Esa falta conceptual hace que el alumno no sepa justificar la mecánica de las operaciones con fracciones, para las que se le suministran, únicamente, reglas memorísticas (al menos cuatro, si no seis u ocho según las distinciones que se hagan en la adición). Tales reglas suelen ilustrarse mediante consideraciones pseudo-matemáticas que son las que producen las confusiones. Esas reglas se olvidan facilmente, como se ve repasando la tabla (P5 ; TI) Yel gráfico (P5 ; G1) : 89 % de los alumnos no dan respuesta a ninguna de las tres sustracciones propuestas.

memorísticas (al menos cuatro, si no seis u ocho según las distinciones que se hagan en la adición). Tales reglas suelen ilustrarse mediante consideraciones pseudo-matemáticas que son las que producen las confusiones. Esas reglas se olvidan facilmente, como se ve repasando la tabla (P5 ; TI) Yel gráfico (P5 ; G1) : 89 % de los alumnos no dan respuesta a ninguna de las tres sustracciones propuestas.

y ese desconocimiento de la fracción como operador lleva al de la fracción inversa de otra, de la que suele informarse por el hecho (que parece anecdótico) de que el orden de los términos cambia de una a otra. Por eso, en el problema Pb5 la media del total de alumnos es 0,77 en el intervalo de puntuación (O ; 4) Yel 83 % no 10 sabe resolver.

Los malos resultados en P2, especialmente en la ordenación de las fracciones, se deben al mismo motivo de desconocer que la fracción puede considerarse como operador. Sin embargo bien sabido es que para justificar, en principio que $3/5 < 2/3$ basta observar que las imágenes de 15 por uno y otro de los operadores se relacionan por $9 < 10$ y por ese motivo escribimos la primera. Eso está al alcance de un alumno de 6° curso y le permite descubrir automatismos posteriores que en cualquier momento puede recomponer si los olvida. Pero en nuestras pruebas sólo el 4 % de los alumnos recuerdan la regla (que es lo que se les ha dado) para ordenar fracciones. Por todo ello operador que actúa sobre los múltiplos del denominador. En primer lugar, ese concepto y usos funcionales son fundamentales en la Matemática además de permitir que el alumno descubra reglas para operar y acceda de modo natural al concepto de operador inverso de otro.

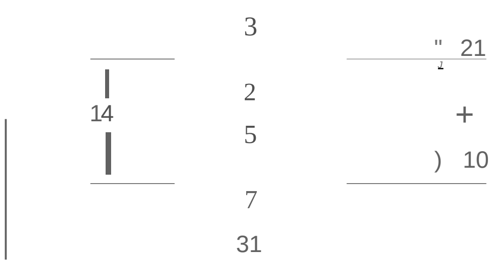
Los números decimales y los cálculos con ellos suelen introducirse antes que las fracciones, bien como consecuencia de la numeración o bien como consecuencia de la medida de longitudes. Posteriormente se hacen divisiones "sacando decimales" y con frecuencia el alumno aprende que 41/5 es igual a 8,2 PORQUE DIVIDE 41 : 5 y expresa el cociente con un decimal. Desde ese momento el alumno piensa que cada fracción es una orden para dividir. Por eso, en el enunciado de Pb3 interpreta que ha de buscar dividiendo y divisor e ignora cómo encontrarlos. Así que 66 % dejan la cuestión en blanco.

Seguramente, lo más recomendable es dar los conceptos matemáticos tal y como son, porque resultan más fáciles de entender que los sucedáneos.

ASÍ, 137/100 es igual a 1,37 POR CONVENIO de escritura y no porque se haga división alguna. Todo Profesor lo sabe pero la arraigada idea de que la Matemática es demasiado "abstracta" para algunos de menos de 12 años impide presentarla tal cual es.

Así, 137/100 es igual a 1,37 POR CONVENIO de escritura y no porque se haga división alguna. Todo Profesor lo sabe pero la arraigada idea de que la Matemática es demasiado "abstracta" para algunos de menos de 12 años impide presentarla tal cual es.

La mecánica de las operaciones elementales con fracciones ha sido el apartado que proporciona los segundos peores resultados de toda la sección, sólamente empeorados por los de reducción a común denominador, como han dejado ver las tablas y los gráficos de P5. Creemos que la causa de ello es la misma ya citada: el desconocimiento de la interpretación funcional que se puede hacer de la fracción. Con ésta, el significado de la escritura 3/2 + 5/7 queda patente en el esquema (E.1)



Sumadas las imágenes 21 + 10, el operador que da 31 como imagen de 14 se toma como <u>suma</u> (operador suma) de los 3/2 y 5/7. Otro tanto para la sustracción, evidentemente.

Tanto lo anterior como que la multiplicación nace del operador compuesto y la división del inverso, es también muy sabido por todo Profesor pero no suele aprovecharse porque parece poco "serio", a pesar de que traduce ortodoxamente el aspecto funcional de la fracción, que pedagógicamente es muy eficaz. y matemáticamente, no olvidemos que el concepto de función es el más característico de la Matemática, sin duda alguna.

Entonces, lo que parece ineludible es preparar y <u>usar</u> la idea de operador desde el comienzo de la enseñanza, a fin de que el alumno contemple y absorba el caracter funcional de los conceptos de la Matemática que estudia. Además, de ese modo el aspecto algorítmico le surge por añadidura.

La simplificación de fracciones, la amplificación y la reducción a común denominador, aparecen en nuestra prueba como casi desconocidas yeso POR LA MISMA CAUSA ya repetida abundantemente. Recuérdese que en P6 el 50 % no pasa de 1 punto en el intervalo (O ; 4) Yen P7 se llega a los peores resultados de toda la sección. Eso ocurre porque tanto la simplificación como la amplificación y la reducción

La simplificación de fracciones, la amplificación y la reducción a común denominador, aparecen en nuestra prueba como casi desconocidas yeso POR LA MISMA CAUSA ya repetida abundantemente. Recuérdese que en P6 el 50 % no pasa de 1 punto en el intervalo (O ; 4) Yen P7 se llega a los peores resultados de toda la sección. Eso ocurre porque tanto la simplificación como la amplificación y la reducción
a común denominador, se han enseñado por reglas que hay que aprender, en lugar de descubrirse como opciones para representar a un mismo número.

El fracaso conceptual se evita tomando la fracción como operador. Todos los operadores que dan la misma imagen de un mismo número son intercambiables yeso lleva hacia el número racional sin dificultades, además de dejar a la simplificación, amplificación y reducción a común denominador en su justo lugar: son usadas porque hay infinitos símbolos (fracciones) para aludir al mismo número racional.

No es acertado suponer, sin más, que al final del 6° curso los alumnos saben sumar, restar, multiplicar y dividir. Es cierto que 93 % y 87 % respectivamente, obtienen bien las sumas y las diferencias propuestas en P4, pero la suma de decimales se queda en 50 % y, repasando la tabla (P4 ; TI), se puede observar que el número de SI (hace la operación) baja hasta sólo 32 % en la división 64,56 : 1,5 y que47 % hacen mal la división 1302 : 12

Puede pensarse que las calculadoras de bolsillo hacen menos importantes esa falta, lo que habría que estudiar con detenimiento, pero, a nuestro juicio, lo perturbador y que merece atención especial está en (R3 ; TI), porque 87 % de los alumnos NO SABEN efectuar correctamente cálculos tan simples como 7+4x2 ó 3x4-6x2, y sólo 3 % interpretan correctamente expresiones de ese tipo.

Seguramente, ese defecto, cuya importancia no escapa a nadie, se debe a la orientación de la enseñanza. Esta situación es un buen ejemplo de que en este capítulo del cálculo, como en casi todos los demás, no se enseñan más que casos particulares. Se han dado reglas como "primero se quitan los paréntesis" "la multiplicación tiene prioridad sobre la adición", y se dan normas (la "jerarquía" de las operaciones) que además de inútiles son falsas en general y adecuadas sólamente en casos particulares. En realidad, viene a darse una norma para cada caso.

Lo procedente sería que el Profesor utilizara su conocimiento de la estructuras algebráicas, que orientara el aprendizaje en términos de estructuras (para qué aprendió el Profesor que (N, +, X) es un semianillo, que (Z, +, X) es un anillo, que (Q, +, X) es un cuerpo, si con ello no reconoce automáticamente reglas de cálculo muy precisas), aunque no las cite en su formalismo como habla de la medida de longitudes sin citar lo que es un espacio métrico, cosa que él también sabe. Con esa orientación el alumno aprende la sintáxis numérica correcta y nunca tiene dudas, por ejemplo,
el Profesor que (N, +, X) es un semianillo, que (Z, +, X) es un anillo, que (Q, +, X) es un cuerpo, si con ello no reconoce automáticamente reglas de cálculo muy precisas), aunque no las cite en su formalismo como habla de la medida de longitudes sin citar lo que es un espacio métrico, cosa que él también sabe. Con esa orientación el alumno aprende la sintáxis numérica correcta y nunca tiene dudas, por ejemplo,
sobre en qué casos trata con una división entera y en qué otros ha de dar del cociente una aproximación decimal.

Puede sorprender que 58 % de los alumnos participantes ignore la relación fundamental de la división (R2 ; TI) pero se explica al pensar que se enseña la <u>mecánica</u> de la división pero no en qué consiste el problema de dividir. Se insiste en resolver problemas de reparto, y anteriormente en introducir la división presentando cuestiones de reparto; es desde tercer curso que el alumno se ve tácitamente obligado a pensar que dividir es repartir. Nunca se le ha enunciado cual es el problema de la división y en qué consiste la operación. Se le ha indicado, únicamente, <u>cómo se hace.</u>

Aparte las necesarias, imprescindibles, aplicaciones del vocabulario y de las técnicas de cálculo a las situaciones vividas, los fundamentos del cálculo y la Matemática con que se trabaje deben enseñarse por sí mismos y descubirse sus

La división es la

también la de operador inverso). Con números naturales no en todos los casos existe el cociente y entonces se busca la mejor aproximación etc.

Ese camino, muy conocido por el Profesor, es mejor que dejar la división por sabida cuando se ha aprendido su mecanismo y nada más.

El alumno de 6° curso (los participantes en nuestra prueba, como bloque) no tienen la más mínima idea de aproximación. Ante las cuestiones (R5) se ve que 68 % ignora cómo saber el número de cifras del cociente entero sin hacer la división. Sin embargo, entrenar el sentido de aproximación es uno de los objetivos de la enseñanza de la Matemática, no sólo expresado en la Reforma en curso sino desde siempre.

Es recomendable comenzar a cultivar esa idea de aproximación aprovechando todas las situaciones ventajosas para ello y ésta de la división es una de ellas pur cuanto el número de cifras del cociente da dos potencias de diez consecutivas entre las que se encuentra el cociente. La aproximación no sólo se ejercita en la medida sino también y sobre todo en el cálculo; "sacar decimales" no es otra cosa y así debe conducirse también su enseñanza.

Como otra prueba del mal reconocimiento del significado de las operaciones están los resultados de (R7), los peores de la sección. No más de un alumno de los 545

encuentra el cociente. La aproximación no sólo se ejercita en la medida sino también y sobre todo en el cálculo; "sacar decimales" no es otra cosa y así debe conducirse también su enseñanza.

Como otra prueba del mal reconocimiento del significado de las operaciones están los resultados de (R7), los peores de la sección. No más de un alumno de los 545
llega a 2,6 puntos en el intervalo (0;4) y 94 % obtienen menos de 1 punto en el mismo intervalo.

Al alumno se le ha dejado deducir que la multiplicación significa aumento (ni siquiera los casos 0 x a = a y 1 x a = a les son familiares) a pesar de que 44 % han respondido a una multiplicación de decimales, lo que prueba que la han practicado y han encontrado casos en que el producto no es mayor que los factores; no aludimos a la multiplicación de fracciones porque en P5 se ve que 50 % no saben multiplicar fracciones (no dan respuesta a ninguna de las tres propuestas).

La causa es, otra vez, que se enseñan casos particulares más que hechos generales. Se insiste en dar normas de procedimiento para cada cálculo, muchas de las cuales son mal memorizadas u olvidadas pronto, como ocurre con la división de decimales o cualquiera de las que se citan en las operaciones de P5. Seguramente, el fracción de cantidad como las que ofrecemos en PI. Con referencia especial a la multiplicación es obligado introducirla con números naturales pero eso no debe autorizar a asegurar que el producto es mayor que los factores (cosa, por lo demás, falsa si uno de ellos es O ó 1 <u>en toda multiplicación</u> y menos sabiendo el Profesor, como sabe, que no es así.

Parece razonable proponer que no se citen como propiedades o hechos generales los que únicamente son particularidades, yeso es válido también para el vocabulario. Un ejemplo: con números decimales se acostumbra a decir que el número a la izquierda de la coma se llama parte entera, de lo que no hay ninguna necesidad; con ello, el alumno traduce que "parte entera" de un decimal es el número que resulta de prescindir de la coma y las cifras que le siguen. Pero más adelante, cuando llega al número - 4,6 dice por analogía que la parte entera es -4, con lo que el Profesor debe rectificarles la idea que él mismo le indujo.

Lo recomendable es dar desde el principio las ideas y los conceptos verdaderos, precisos; eso se puede conseguir con toda facilidad mucho antes de que el alumno pueda comprender una definición rigurosa con tecnicismos de vocabulario.

Ya hemos señalado, en los comentarios a los resultados en Pb2, lo que suele ser una nota general a toda edad y no sólo de esta prueba: la falta de cualquier razonamien-
LO recornenuame es oar oesoe el pnncipio las meas y IOS conceptos veroaoeros, precisos; eso se puede conseguir con toda facilidad mucho antes de que el alumno pueda comprender una definición rigurosa con tecnicismos de vocabulario.

Ya hemos señalado, en los comentarios a los resultados en Pb2, lo que suele ser una nota general a toda edad y no sólo de esta prueba: la falta de cualquier razonamien-
to escrito que justifique los cálculos realizados para hallar la solución de un problema. La verdad es que no se dice al alumno que una de las razones por las que se le proponen problemas de enunciados que cuentan historias es para que se habitúe a expresar por escrito un razonamiento. A falta de ese acuerdo, supone que 10 que se le pide es uno o varios húmeros y la experiencia le enseña que ese número es una combinación de operaciones hechas con los que están en el enunciado, por 10 que intenta las que le parecer sugeridas por las palabras del mismo. ASÍ, "se añade", "he ganado", "aumenta", etc. le parecen indicar una suma; "se han gastado tantas pesetas", "he dado", "disminuye", "hay de menos", invitan a restary es seguro que "repartir" se identifica con dividir. La aparición de algunas de esas palabras en su enunciado ha hecho del problema Pb2 el resuelto por más alumnos.

Es de notar que nadie se ha servido de ninguna ayuda gráfica (por ejemplo para los Pb3 o Pb5, que han resultado difíciles si nos atenernos a los resultados). Resolver planteará el estudio de la Matemática como resolución de problemas (y no hablamos aquí de "la Matemática a partir de los problemas" ni mucho menos), exigiendo constantemente la justificación de cuanto se hace, aunque lejos por el momento del razonamiento lógico-deductivo de premisas y conclusión.

Por otra parte, haber alcanzado un buen nivel de lectura comprensiva es indispensable para atacar con alguna garantía de éxito la resolución de problemas dados por enunciados escritos.

El análisis de los resultados obtenidos en nuestra prueba de problemas nos lleva a la reiteración de las causas del poco éxito y pensamos que la diferenciación del estilo de enunciados para una misma situación y su influencia en la resolución, la presentación escrita de los razonamientos hechos, la asociación de la historia contada con partes de la Matemátioca estudiada anteriormente, la facilidad del alumno para razonar sobre situaciones que no sean reiteraciones de otras ya vistas, etc., merecen una investigación detenida que está por hacer.