



Diseño de control óptimo para el péndulo de furuta

Optimal control design for furuta's pendulum

Mérida Rubio Jován Oseas¹, Chávez Vázquez Paul Alejandro¹, Coria de los Ríos Luis Nestor²
Chávez Guzmán Carlos Alberto³

¹Facultad de Ciencias de la Ingeniería y Tecnología, Universidad Autónoma de Baja California, Blvd Universitario 1000, Unidad Valle de las Palmas, 22260 Tijuana, Baja California, México

²Instituto Tecnológico de Tijuana, Tecnológico Nacional de México. Calzada del Tecnológico S/N, Tomas Aquino, 22414 Tijuana, Baja California, México

³ Facultad de Ingeniería y Negocios Tecate, Universidad Autónoma de Baja California. Blvd. Universidad, La Viñita, 21460 Tecate, Baja California, México

Autor de correspondencia: Jován Oseas Mérida Rubio, Facultad de Ciencias de la Ingeniería y Tecnología, Universidad Autónoma de Baja California, Blvd Universitario 1000, Unidad Valle de las Palmas, 22260 Tijuana, Baja California, México. E-mail: jovan.merida@uabc.edu.mx. ORCID: 0000-0002-9355-4787.

Recibido: 01 de Julio del 2017

Aceptado: 03 de Noviembre del 2018

Publicado: 01 de Enero del 2018

Resumen. - *En este artículo se aborda el diseño de un controlador para el péndulo de Furuta, que es un sistema subactuado, no lineal y altamente inestable, lo cual lo hace un reto tanto científico, como tecnológico. Este sistema es a menudo utilizado en el dominio de la teoría de control ya que ayuda entender conceptos de control de mecanismos. Las dinámicas que presenta el péndulo de Furuta pueden ser encontradas en diversos sistemas físicos de alta relevancia, tales como: robots de dos llantas, transportadores personales Segway, propulsores de cohetes, controles de vuelo, etc. El objetivo es resolver el problema de estabilización en la posición invertida inestable del péndulo mediante un controlador óptimo, haciendo uso del modelo dinámico del péndulo fabricado por Quanser®. Un regulador óptimo cuadrático fue diseñado, tal que, el sistema no perturbado es estable alrededor de la posición invertida inestable, mientras que la energía de la señal de entrada es apropiada. La existencia de las soluciones propias de la ecuación algebraica de Riccati aseguran estabilizabilidad y detectabilidad del sistema y éstas implican que el sistema en lazo cerrado es estable. Los resultados muestran que el controlador cumple satisfactoriamente los requerimientos de diseño del sistema.*

Palabras clave: Control Óptimo; Péndulo de Furuta; Sistema Subactuado; Electrónica e Instrumentación.

Abstract. - *In this article, we discuss the design of a controller for the Furuta pendulum, which is a subactuated, nonlinear and highly unstable system, which makes it a scientific and technological challenge. This system is often used in the domain of control theory as it helps to understand concepts of control mechanisms. The dynamics of the Furuta pendulum can be found in several high-profile physical systems, such as: two-wheel robots, Segway, personal transporters, rocket propellers, flight controls, etc. The objective is to solve the stabilization problem in the unstable inverted position of the pendulum using an optimal controller, making use of the dynamic model of a pendulum manufactured by Quanser®. A linear quadratic regulator was designed, such that the undisturbed system is stable around the unstable inverted position, while the input signal energy is appropriate. The existence of the solutions of Riccati's algebraic equation assures stabilization and detectability of the system and implies that the closed-loop system is stable. The results show that the controller satisfies the design requirements of the system.*

Keywords: Optimal Control; Furuta Pendulum; Subactuated Systems; Electronic and Instrumentation.



1. Introducción

La mayoría de los sistemas físicos existentes son no lineales, por lo cual el diseño de controladores avanzados es importante para su aplicación en el mundo real. Dentro de los sistemas no lineales, existen los sistemas subactuados cuyo número de entradas de control es menor a los grados de libertad del sistema.

El diseño de control de los sistemas subactuados [1–2] es de gran interés y se vuelve más popular, debido a que la utilización de un menor número de actuadores es un importante reto tanto científico como tecnológico. En este artículo se trabajará con el péndulo de Furuta que es la representación más típica para los sistemas subactuados. Este es uno de los péndulos con dos grados de libertad más complejo y difícil de controlar. El péndulo de Furuta consiste en un mecanismo de dos enlaces, uno de los cuales (llamado brazo) cuenta con un motor, el cual le permite girar en un plano horizontal, este a su vez es utilizado para controlar el movimiento libre del segundo enlace (péndulo), el cual se encuentra colocado en un extremo del brazo y su eje de giro es colineal al eje axial del brazo, realizando un giro en un plano perpendicular al movimiento del brazo. Diversas aplicaciones presentan dinámicas similares, tales como: control de aeronaves, vehículos bajo el agua, propulsores de cohete y robots de dos llantas [3].

El objetivo de este artículo es resolver el problema de estabilización en la posición invertida inestable del péndulo mediante un controlador óptimo haciendo uso del modelo físico CAD/Diseño asistido por computadora del péndulo fabricado por Quanser© desarrollado con el toolbox Simscape™ en MATLAB. Simscape provee un ambiente de simulación multicuerpo para sistemas mecánicos en 3D, de tal manera que el usuario puede tener una representación simulación tridimensional del sistema que le permita ver el comportamiento esperado en una plataforma real. Se puede modelar sistemas utilizando bloques que representan cuerpos, uniones, delimitaciones, elementos de fuerza y sensores. Además, permite formular y resolver las ecuaciones de movimiento para un sistema mecánico completo, permitiendo todo esto tener un modelo que se aproxime de una mejor manera a un sistema real [4].

1. Modelo dinámico y definición del problema

1.1 Modelo Dinámico

La planta bajo estudio es un sistema que consiste de un péndulo invertido conectado a un brazo horizontal rotacional (ver fig. 1). El modelo no-lineal de la parte mecánica es obtenido a través de las ecuaciones de Euler-Lagrange como sigue [4]:

$$\left(m_p L_r^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 - \frac{1}{4} m_p L_p^2 \cos^2(\alpha) + J_r \right) \ddot{\theta} - \frac{1}{2} m_p L_p L_r \cos(\alpha) \ddot{\alpha} + \frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \dot{\theta} \dot{\alpha} + \frac{1}{2} m_p L_p L_r \sin(\alpha) \dot{\alpha}^2 = \tau - B_r \dot{\theta}, \quad (1)$$

$$- \frac{1}{2} m_p L_p L_r \cos(\alpha) \ddot{\theta} + \left(\frac{1}{4} m_p L_p^2 + J_p \right) \ddot{\alpha} - \frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} m_p L_p g \sin(\alpha) = - B_p \dot{\alpha} \quad (2)$$

donde el brazo tiene una longitud L_r , un momento de inercia J_r , un ángulo θ , una fricción viscosa B_r , u es el voltaje aplicado al servomotor, el péndulo tiene una longitud L_p , un momento de inercia J_p , una masa m_p , un coeficiente de amortiguamiento B_p y un ángulo del péndulo invertido α . g es la constante de gravedad, $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$ representan la primera y segunda derivada temporal. El torque generado por el motor τ es aplicado en la base del brazo rotacional y es descrito por:

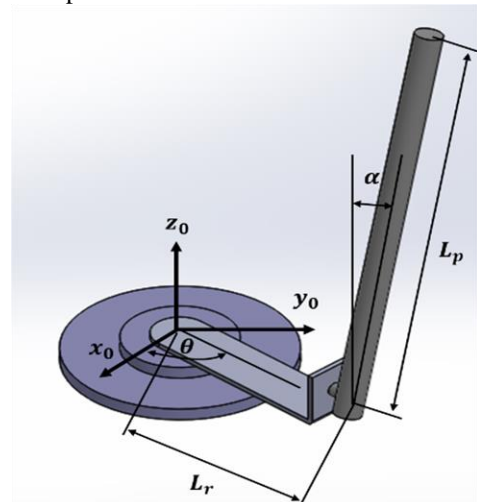
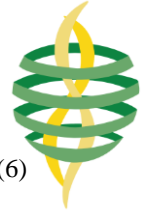


Figura 1. Convenciones para el péndulo rotacional invertido



$$\tau = \frac{K_g k_t (u - K_g k_m \dot{\theta})}{R_m} \quad (3)$$

donde K_g es la relación de engranaje, k_t la constante de corriente torque del motor, k_m es la constante del motor y R_m es la resistencia del motor.

1.2 Definición del problema

El problema de control de balanceo del péndulo rotacional invertido consiste en diseñar una ley de control, tal que cumpla con los siguientes requerimientos:

La deflexión del ángulo del péndulo cumpla con $|\alpha| < 10$ grados y el valor máximo del voltaje cumpla con $|u| < 10$ V. Las especificaciones anteriores deberán ser satisfechas cuando el brazo rotacional está siguiendo una señal de referencia cuadrada con un ángulo θ de ± 20 grados.

2. Diseño del controlador

2.1 Modelo lineal del péndulo de Furuta

Con el fin de diseñar el controlador óptimo, obtendremos un modelo lineal del péndulo invertido rotacional. Utilizando el truncamiento de las series de Taylor [5] alrededor del origen para el sistema expresado por ecuaciones (1) -(2) con condiciones iniciales igual a cero y resolviendo para los términos de aceleración, obtenemos:

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{J_T} \left(- \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) B_r \dot{\theta} - \frac{1}{2} m_p L_p L_r B_p \dot{\alpha} \right) + \frac{1}{J_T} \left(\frac{1}{4} m_p^2 L_p^2 L_r g \alpha + \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) \tau \right) \quad (4)$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{1}{J_T} \left(\frac{1}{2} m_p L_p L_r B_r \dot{\theta} - (J_r + m_p L_r^2) B_p \dot{\alpha} \right) + \frac{1}{J_T} \left(\frac{1}{2} m_p L_p g (J_r + m_p L_r^2) \alpha + \frac{1}{2} m_p L_p L_r \tau \right) \quad (5)$$

donde $J_T = J_p m_p L_r^2 + J_r J_p + \frac{1}{4} J_r m_p L_p^2$.

Expresando las ecuaciones (4) y (5) en la forma de espacio des estados tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (6)$$

donde $x^T = [\theta \ \alpha \ \dot{\theta} \ \dot{\alpha}]$ es el vector de estados, u es la entrada de control, A, B, C y D son las matrices del espacio de estados dadas en ecuación (7).

$$A = \frac{1}{J_T} \begin{bmatrix} 0 & 0 & J_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_r \\ 0 & \frac{1}{4} m_p^2 L_p^2 L_r g & \left(-B_r - \frac{K_g^2 k_t k_m}{R_m} \right) \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) & -\frac{1}{2} m_p L_p L_r B_p \\ 0 & \frac{1}{2} m_p L_p g (J_r + m_p L_r^2) & \left(B_r - \frac{K_g^2 k_t k_m}{R_m} \right) \left(\frac{1}{2} m_p L_p L_r \right) & -(J_r + m_p L_r^2) B_p \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{1}{J_T} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_g k_t}{R_m} \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) \\ \frac{K_g k_t}{2R_m} m_p L_p L_r \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.2 Control lineal óptimo

El controlador está definido como

$$u = -Kx. \quad (8)$$

La ecuación de lazo cerrado del sistema es:

$$\dot{x} = (A - BK)x. \quad (9)$$

Entonces el problema es diseñar el vector de ganancias K tal que $A < BK$ para que el sistema sea estable y que la solución tienda de manera asintótica a la referencia propuesta. El vector K es calculado minimizando la siguiente función de costo:

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (10)$$

donde Q y R son matrices para penalizar a las variables de estado y a las acciones de control. Seleccionando Q y R como:

$$Q = \begin{bmatrix} 5.3859 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 86.1741 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = 0.0460 \quad (11)$$

por lo tanto, el vector de ganancias K es:

$$K = [-10.8206 \quad 67.2905 \quad -6.1728 \quad 7.1159]. \quad (12)$$



3. Resultados

En esta sección se demostrará a través de simulaciones numéricas la efectividad del control diseñado utilizando el modelo matemático desarrollado con el toolbox de Simscape™, en Simulink™-Matlab® (ver fig. 2).

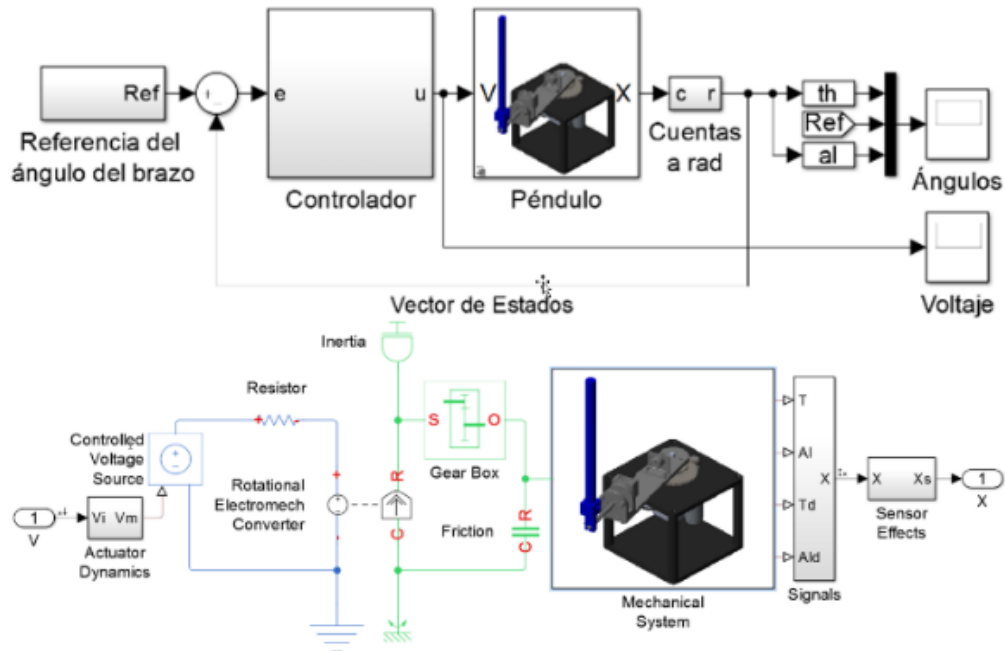


Figura 2. Modelo Matemático con de Simscape

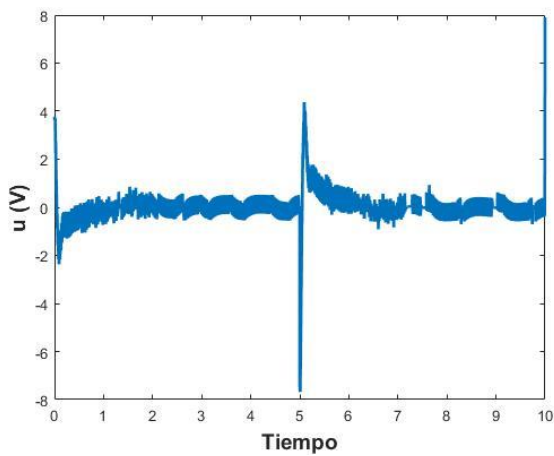


Figura 3. Entrada de control

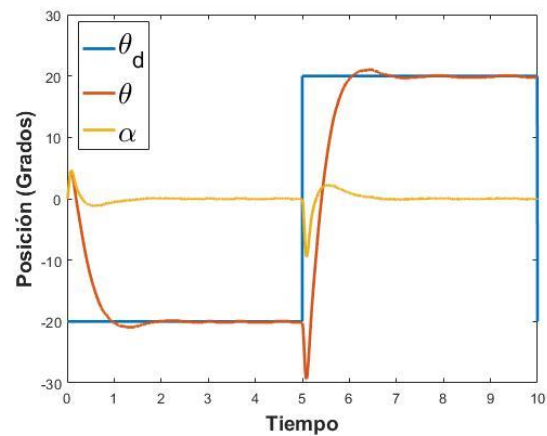


Figura 4. Posición del brazo deseada (θ_d), posición del brazo real (θ) y posición del péndulo (α).



Las velocidades de los ángulos del servo y el péndulo son calculadas tomando la derivada y filtrando el resultado a través de un filtro pasa-altas. La señal de referencia θ_d es una onda cuadrada de 0.1 Hz. El brazo del péndulo debe mantenerse en la posición vertical mientras se sigue θ_d . La posición inicial del péndulo es la posición vertical invertida.

En la fig. 3 se presenta la entrada de voltaje aplicada. Se observa que la entrada cumple con $|u| < 10$ V. En la fig. 4 se presentan la referencia del brazo θ_d , el valor real del mismo θ y la posición del péndulo α . Se puede observar que mientras se sigue la referencia de ± 20 grados, el brazo del péndulo se mantiene en su posición vertical cumpliendo con $|\alpha| < 10$ grados.

4. Conclusiones

El problema de diseño de un controlador de balanceo para el péndulo invertido rotacional se abordó en este artículo. Se resolvió el problema de estabilización en la posición invertida inestable del péndulo mientras se sigue la señal de referencia de entrada, mediante el diseño de un controlador lineal cuadrático óptimo. El regulador óptimo cuadrático fue diseñado, tal que, el sistema no perturbado es estable alrededor de la posición invertida inestable, mientras que la energía de la señal de entrada es apropiada. Los resultados fueron obtenidos utilizando un modelo del péndulo rotacional invertido desarrollado con el toolbox Simscape™, el cual provee un ambiente de simulación multicuerpo para sistemas mecánicos. El uso del toolbox de Simscape™ en conjunto con Simulink™ nos permitió tener una simulación en 3D

del sistema real. Se cumplieron con las especificaciones de diseño de manera satisfactoria.

Referencias

- [1] Yan Q., "Output Tracking of Underactuated Rotary Inverted Pendulum by Nonlinear Controller", *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, Vol. 3, pp. 2395–2400, 2003. <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.451.4866&rep=rep1&type=pdf>
- [2] Reyhanoglu M., Mcclamroch y Kolmanovsky I., "Dynamics and Control of a Class of Underactuated Mechanical Systems", *IEEE Trans. on A. C.*, Vol. 44, pp. 1663–1671, 1999. <https://doi.org/10.1109/9.788533>
- [3] Boubaker O., "The Inverted Pendulum: A Fundamental Benchmark in Control Theory and Robotics", *IEEE International Conference on Education and e-Learning Innovations*, pp. 1–6, 2012. <https://doi.org/10.1109/ICEELI.2012.6360606>
- [4] Tejado I. and Torres D., "Physical Modeling Based Simulators to Support Teaching in Automatic Control: the Rotatory Pendulum", *IFAC-PapersOnLine*, Vol. 49(6), pp.75–80, 2016. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2016.07.156>
- [5] Pierre, R., "Control Engineering a Modern Approach", Sanders College Publishing, 1995. <http://downloads.hindawi.com/journals/specialissues/508979.pdf>



Este texto está protegido por una licencia [Creative Commons 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Usted es libre para Compartir —copiar y redistribuir el material en cualquier medio o formato— y Adaptar el documento —remezclar, transformar y crear a partir del material— para cualquier propósito, incluso para fines comerciales, siempre que cumpla la condición de:

Atribución: Usted debe dar crédito a la obra original de manera adecuada, proporcionar un enlace a la licencia, e indicar si se han realizado cambios. Puede hacerlo en cualquier forma razonable, pero no de forma tal que sugiera que tiene el apoyo del licenciante o lo recibe por el uso que hace de la obra.

[Resumen de licencia](#) - [Texto completo de la licencia](#)