UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Revista Científica

http://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/revcie/index

CIDC

Artículo de investigación

Bifurcación de soluciones desde infinito en un valor propio de multiplicidad infinita a un problema hiperbólico semilineal doble-periódico

Bifurcation of Solutions from Infinity at an Infinity Multiplicity Eigenvalue for a Semilinear Double-Periodic Hyperbolic Problem

Bifurcação em Infinito em um Valor Próprio de Multiplicidade Infinita a um Problema Hiperbólico

Arturo Sanjuán[1]

Fecha de recepción: julio 2016 **Fecha de aceptación:** noviembre 2016

Para citar este artículo: Sanjuán, A. (2016). Bifurcación de Soluciones desde Infinito en un Valor Propio de Multiplicidad Infinita a un Problema Hiperbólico Semilineal Doble-Periódico. *Revista Científica*, 27, 402-406.
Doi: 10.14483/udistrital.jour.RC.2016.27.a9

Resumen

Estudiamos la existencia de soluciones débiles a la ecuación de onda $\Box u + \lambda u + h(u) = 0$ sujeta a las condiciones doble-periódicas $u(x,t) = u(x,t+2\pi) = u(x+2\pi,t)$. Cuando $\lambda \uparrow 0$las soluciones tienden a infinito. No estamos suponiendo monotonía sobre la nolinealidad $\lambda u + h(u)$. Empleamos métodos de Teoría de Grado de Leray-Schauder y Principio de Contracciones.

Palabras clave: ecuación de onda semilienal, bifurcación en infinito, nolinealidad no-monótona.

Abstract

We consider the existence of weak solutions to the wave equations $\Box u + \lambda u + h(u) = 0$ subject to the double-periodic conditions $u(x,t) = u(x,t+2\pi) = u(x+2\pi,t)$. When $\lambda \uparrow 0$the solutions goes to infinity. We are no assuming monotonicity on the nonlinearity $\lambda u + h(u)$. We use Leray-Schauder Degree Theory and Contraction Principle.

Keywords: semiliear wave equation, bifurcation at infinity, non-monotone nonlinearity.

Resumo

Consideramos a existência de soluções fracas nas equações de onda $\Box u + \lambda u + h(u) = 0$ sujeitas às condições de dupla periodicidade $u(x,t) = u(x,t+2\pi) = u(x+2\pi,t)$. Quando $\lambda \uparrow 0$as soluções vão para o infinito. Não estamos assumindo a monotonicidade sobre a não-linearidade $\lambda u + h(u)$. Utilizamos Leray-Schauder Grade e Contração Princípio.

Palavras chave: equação de onda semiliear, bifurcação no infinito, não-linearidade não-monotônica.

1. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia. Contacto: aasanjuanc@udistrital.edu.co

Introducción

Consideramos el problema de encontrar soluciones $u:[0,\pi]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\square u+\lambda u+h(u)=u_{tt}-u_{xx}+\lambda u+h(u)=0$, sujeto a las condiciones doble periódicas $u(x,t)=u(x+2\pi,t)=u(x,t+2\pi)$. Estamos suponiendo que $\lambda<0$, $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$es continuamente diferenciable y acotada. Suponemos además que existen $\gamma_1>1$ y $M_0>0$tales que si $|s|\geqslant M_0$entonces $|h(s)|\leqslant|s|^{-\gamma}$. Finalmente, suponemos que $h(x)>0$ ara $x\geqslant 0$ y $h_0:=\lim\inf_{x\to\infty}h(x)>0$.

Denotemos con $\sigma(\square)$ el espectro del operador de onda bajo las condiciones doble-periódicas que viene dado por $\sigma(\square)=\{k^2-j^2:k=0,1\ldots,j=0,1\ldots\}$. Es de aclarar que 0 es el único valor propio de multiplicidad infinita (Sanjuán, 2015, p. 31-32) y que cuando $\lambda uparraw0$ el problema pierde compacidad (Sanjuán, 2015, p. 28-31). La pérdida de compacidad implica que las técnicas usuales para encontrar soluciones no son aplicables directamente: sucesiones de Palais-Smale, sucesiones débilmente convergentes que se transforman en sucesiones fuertemente convergentes, inmersiones de Sobolev, Morrey, Rellich-Kondrachov, etc. En el presente trabajo, por ejemplo, no es posible aplicar directamente el Teorema de Punto Fijo de Schauder. Se hace necesario dividir el espacio en dos partes, uno donde se tiene compacidad (el rango) para aplicar directamente el teorema y otro en donde se requiere un análisis adicional (el núcleo).

Denotamos con $\Omega=(0,2\pi)^2$ y con H el espacio de Sobolev de todas las funciones u en $L^2(\Omega)$ tales que $u_t,u_x\in L^2(\Omega)$. La norma en H viene dada por $\|u\|_1=\|u_t\|+\|u_x\|$ donde $\|u\|$ representa la norma en $L^2(\Omega)$. El núcleo N del operador de onda sujeto a las condiciones doble-periódicas viene dado por la adherencia en $L^2(\Omega)$del generado por las funciones $\cos(kx)\cos(kt),\sin(kx)\sin(kt),\sin(kx)\cos(kt)$ y $\cos(kx)\sin(kt)$para $k=0,1,\ldots$. Denotamos con Yal rango del operador de onda que viene dado por $Y=H\cap N^{\perp}$.

Decimosque$u=v+y\in N\oplus Y$esunasolución débil al problema semilineal $\square u+\lambda u+h(u)=0$ sujeto a las condiciones doble periódicas si $\int_\Omega(y_t\xi_t-v_x\xi_x)-(\lambda u+h(u))(\xi_t+\zeta_t)dxdt=0$ para toda $\xi\in Y$y toda $\zeta\in N$.

En este trabajo mostraremos que si $\lambda\uparrow 0$ es posible encontrar soluciones débiles en $L^\infty(\Omega)$ que se bifurcan desde infinito en el valor propio cero de multiplicidad infinita.

Antecedentes

Como antecedentes relevantes a las soluciones débiles de la ecuación de onda semilineal tenemos las siguientes.

Cuando la no-linealidad $g(u)=\lambda u+h(u)$ es pequeña, por ejemplo $\epsilon g(u)$, o monótona $g'(u)\geqslant 0$, el problema de encontrar soluciones al problema Dirichlet-periódico ha sido ampliamente estudiado por Lovicarová (1968), Rabinowitz (1967, 1978) y Brezis, Coron & Nirenberg (1981) ente otros. Los métodos empleados en estos casos son métodos variacionales estándar. Principalmente el Teorema del Paso de Montaña (Kun-Ching, 2005, p. 303). Más aún, asumiendo que $g'(u)>0$, Rabinowitz (1971) encontró un continuo de soluciones que se bifurcan desde el valor propio cero (de multiplicidad infinita) empleando el Teorema de Krasnoselskii-Rabinowitz y Teoría de grado (Kung-Ching, 2005, cap. 3).

Como trabajos precursores en el caso en que la nolinealidad es no-monótona se encuentran los trabajo se Hofer (1982) y Willem (1981). Los autores encontraron que para no-linealidades asintóticamente lineales cuyas derivadas no atraviesan el espectro, el rango del operador $\square u+g(u)$es denso en $L^2(\Omega)$. Las técnicas empleadas en estos trabajos están soportadas en teoría espectral y análisis funcional avanzado.

En este trabajo emplearemos una adaptación del método de reducción de Lyapunov-Schmidt (Kung-Ching, 2005 p. 38) y Teoría de Grado de Leray-Schauder (Kung-Ching, 2005, cap. 3). Para la búsqueda de soluciones débiles a la ecuación de onda $\Box u + \lambda u + h(u) = 0$, sin asumir monotonía, este enfoque ha sido aplicado con éxito en los trabajos de Castro & Preskill (2010), Caicedo, Castro, Duque & Sanjuán (2014) y Caicedo, Castro & Sanjuán (2017). En estos trabajos los autores encontraron soluciones al problema forzado $\Box u + \lambda u + h(u) = f$ suponiendo que el forzamiento f es no-plano sobre características y suficientemente grande.

Resultado

El resultado del trabajo es el siguiente.

Teorema. *Sea $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciable y acotada. Suponga que existen $\gamma_1 > 1$ y $M_0 > 0$ tales que si $|s| \geqslant M_0$ entonces $|h(s)| \leqslant |s|^{-\gamma}$, que $h(x) > 0$ para $x \geqslant 0$ y que $h_0 := \liminf_{x\to\infty} h(x) > 0$. Entonces existe $\lambda_0 < 0$ tal que si $0 < -\lambda < -\lambda_0$, la ecuación $\Box u + \lambda u + h(u) = 0$ sujeta a las condiciones doble-periódicas $u(x,t) = u(x + 2\pi, t) = u(x, t + 2\pi)$ tiene una solución débil $u_\lambda = v_\lambda + y_\lambda \in (N \oplus Y) \cap L^\infty(\Omega)$ tal que $\|v_\lambda\| + \|y_\lambda\|_1 \to \infty$ cuando $\lambda \uparrow 0$.*

Demostración del Teorema

Denotemos con $|h|_\infty = máx_{x\in\mathbb{R}}|h(x)|$ y definamos la función $f_\lambda(x) := \lambda x + h(x)$, en vista de que $f_\lambda(0) > 0$ y que $f_\lambda(x) < 0$ siempre que $x > |h|_\infty/|\lambda|$, por el Teorema de Bolzao, existe $\phi_\lambda \in [h_0/|\lambda|, |h|_\infty/|\lambda|]$ tal que $\lambda\phi_\lambda + h(\phi_\lambda) = 0$.

De esta forma, la descomposición de Lyapunov-Schmidt de la ecuación $\Box u + \lambda u + h(u) = 0$da origen a la ecuación del núcleo $v = -1/\lambda\,(h(\phi_\lambda) - \Pi_N h(\phi_\lambda + v + y))$ y a la ecuación del rango $y = -(\Box + \lambda)^{-1}\Pi_Y h(\phi_\lambda + v + y)$. Aquí Π_X denota la proyección ortogonal sobre el subespacio cerrado X.

Soluciones en el Núcleo

Gracias a la caracterización del núcleo dada en Castro & Preskill (2010, p. 651-653) , tenemos que $v \in N$ si y solamente si existe un único número real $\bar{v}$ y dos únicas funciones 2π-periódicas de promedio nulo p y q tales que $v(x,t) = \bar{v} + p(x+t) + q(t-x)$. Más aún, la ecuación del núcleo $v = -1/\lambda\,(h(\phi_\lambda) - \Pi_N h(\phi_\lambda + v + y))$ es equivalente a resolver el sistema

$$\bar{v} = \frac{1}{4\pi^2\lambda}\int_\Omega (h(\phi_\lambda) - h(u)) =: N_1(\bar{v}, p, q)$$

$$p(r) = \frac{1}{2\pi\lambda}\int_\Omega [h(\phi_\lambda) - h(u(x, r+x))] - \bar{v} =: N_2(\bar{v}, p, q)$$

$$q(r) = \frac{1}{2\pi\lambda}\int_\Omega [h(\phi_\lambda) - h(u(x, r-x))] - \bar{v} =: N_3(\bar{v}, p, q)$$

donde $u = \phi_\lambda + v + y$.

Restrinjamos $|\lambda| < 1/2$ y tomemos $R = 4\sqrt{6}\pi|h|_\infty$. Para $y \in Y$fijo con $\|y\|_\infty \leqslant R$ definamos las bolas $B_\mathbb{R} = x \in \mathbb{R}: |x| \leqslant R$ y $B_\pi = \{p \in L^2_{loc}(\mathbb{R}): p(x) = p(x+2\pi), \int_0^{2\pi} \quad p = 0, \|p\|_\infty \leqslant R\}$ Definimos además la función mediante la fórmula $F_{\lambda,y}(\bar{v}, p, q) := (N_1(\bar{v}, p, q), N_2(\bar{v}, p, q), N_3(\bar{v}, p, q))$.

A continuación demostraremos que $F_{\lambda,y}$ está bien definida de $B_\mathbb{R} \times B_\pi \times B_\pi$ en sí mismo con de la métrica d dada por $d(\overline{v_1}, p_1, q_1; \overline{v_2}, p_2, q_2) = |\overline{v_1} - \overline{v_2}| + \|p_1 - p_2\|_\infty + \|q_1 - q_2\|_\infty$. Tomemos $\lambda_0 = -min\{\frac{1}{2}, \frac{h_0}{2M_0}, \frac{h}{20R}, (\frac{h_0^\gamma}{8\cdot 2^\gamma})^{\frac{1}{\gamma-1}}\}$ y $0 < -\lambda < -\lambda_0$. Para $s \in [0,1]$, denotamos $a_0(x,r,s) := \phi_\lambda + s(v(x,t) + y(x,t))$.
Para casi todo $(x,t) \in \Omega$ tenemos que $|a_0(x,r,s)| \geqslant \frac{h_0}{|\lambda|} - |v(x,t)| - |y(x,t)| \geqslant \frac{h_0}{2|\lambda_0|}$.

De lo anterior se tiene la siguiente estimación

$$|N_1(\bar{v}, p, q)| \leqslant \frac{1}{4\pi^2|\lambda|}\int_\Omega\int_0^1 |h'(a_0(x,r,s))|\, dsdxdt \leqslant \frac{4R2^\gamma}{h_0^\gamma}|\lambda|^{\gamma-1} \leqslant \frac{R}{2}$$

Procediendo de manera similar, se tiene que $\|N_i(\bar{v}, p, q)\|_\infty \leqslant R$ para $i = 1,2,3$. Es decir $F_{\lambda,y}(B_\mathbb{R} \times B_\pi^2) \subset B_\mathbb{R} \times B_{pi}^2$.

Un argumento similar al realizado para estimar los $|N_i|$ nos permite ver que $d(F_{\lambda,y}(\overline{v_1,}p_{1,}q_1);F_{\lambda,y}(\overline{v_2,}p_{2,}q_2)) \leqslant \frac{1}{2} d((\overline{v_1,}p_{1,}q_1);(\overline{v_2,}p_{2,}q_2))$. Es decir $F_{\lambda,y}$ es una contracción de $B_{\mathbb{R}} \times B_{\pi}^2$ en sí mismo. Por el Principio de Contracción de Banach con Parámetros (Brooks & Schmitt, 2009) tenemos que para $0 < -\lambda < -\lambda_0$ y $y \in Y$ con $\|y\|_\infty \leqslant R$ fijos, $F_{\lambda,y}$ tiene un único punto fijo $v(\lambda, y) \in B_{\mathbb{R}} \times B_{\pi}^2$ que soluciona la ecuación del núcleo $v = -1/\lambda(h(\phi_\lambda) - \Pi_N h(\phi_\lambda + v + y))$.

Ecuación del Rango

Sin pérdida de generalidad supongamos que $\Pi_Y h(u)$ tiene solamente componente en las funciones propias $\sin(kx)\sin(kt)$ y expresamos $\Pi_Y h(u)$ en series de Fourier (Iorio & Magalhaes, 2001, cp 2.) $\Pi_Y h(u) = \sum_{k^2-j^2 \neq 0} a_{kj} \sin(kx)\sin(kt)$ donde $u = \phi_\lambda + v(\lambda, y) + y$. Para $y \in Y$ con $\|y\|_\infty \leqslant R$ tenemos que

$$|(\Box + \lambda)^{-1}\Pi_Y h(u)| \leqslant \sum_{k^2-j^2 \neq 0} \frac{|a_{kj}|}{|k^2 - j^2 + \lambda|}$$
$$\leqslant 3\sqrt{2}(\sum_{k^2-j^2 \neq 0} \frac{1}{|k^2 - j^2|^2})^{1/2}(\sum_{k^2-j^2 \neq 0} a_{kj}^2)^{1/2} \leqslant 6\sqrt{3}\pi|h|_\infty \leqslant R$$

De la estimación anterior obtenemos que $\|(\Box + \lambda)^{-1}\Pi_Y h(u)\|_\infty \leqslant R$ y del hecho que el operador $(\Box + \lambda)^{-1}$ es compacto (Castro & Preskill, 2010) podemos aplicar entonces el Teorema de Punto Fijo de Schauder (Kung-Ching, 2005, p. 160). Por lo tanto, la ecuación del rango $y = -(\Box + \lambda)^{-1}\Pi_Y h(\phi_\lambda + v + y)$ tiene solución.

De este modo queda demostrado el teorema.

Perspectivas

En el caso de una dimensión en la variable espacial se sabe que existe bifurcación en infinito desde todos los valores propios de multiplicidad finita (Sanjuán, 2015, Caicedo, Castro & Sanjuán, 2017). De hecho, gracias al Teorema de Krasnoselskii-Rabinowitz es posible encontrar un continuo de soluciones en los valores propios de multiplicidad impar. El caso del valor propio cero para el problema Dirichlet-periódico sigue siendo un problema abierto, así como la extensión de estos hechos al caso de membranas en varias dimensiones.

Problemas similares para el caso doble periódico con periodos múltiplos irracionales de π también es un problema abierto. Algunos acercamientos en el caso Dirichlet-periódico y con una variable espacial son conocidos (McKenna, 1985, Caicedo & Castro, 1997).

Referencias bibliográficas

Brézis, H., Coron, J. M. y Nirenberg, L. (1980). Free vibrations for a nonlinear wave equation and a theorem of P. Rabinowitz. *Communications on pure and applied mathematics,* 32, 667-689.

Brooks, R. M. y Schmitt. K. (2009). The contraction mapping principle and some applications. *Electronic journal of differential equations,* monográfico.

Caicedo, J. F. y Castro, A. (1997). A semilinear wave equation with derivative of nonlinearity containing multiple eigenvalues of infinite multiplicity. *Contemporary mathematics*, 208.

Caicedo, J. F., Castro, A. y Sanjuán, A. (2016). Bifurcación at infinity for a semilinear wave equation. (prepint).

Caicedo, J. F., Castro, A., Duque, R. y Sanjuán A. (2014). Existence of for a semilinear wave equation with non-monotone nonlinearity. *Discrete and continuous dynamical systems*, 7(69), 1193-1202.

Castro, A. y Preskill, B. (2010). Existence of solutions for a wave equation with nonmonotone nonlinearity. *Discrete and continuous dynamical systems*, 28(2), 549-658.

Hofer, H. (1982). On the range of a wave operator with nonmonotone nonlinearity. *Nachr. Math.,* 106, 327-340.

Iorio, R. y Magalhaes, V. (2001). *Fourier analysis and partial differential equations.* Cambridge studies in advanced mathematicas.

Kung-Ching, C. (2005) *Methods in nonlinear analyisis.* Berlin: Springer-Verlag.

Lovicarová H. (1968). Periodic solutions of a weakly nonlinear wave equation in one dimention. *Czecnosiovak mathematical journal*, 19(94), 324-343.

Rabinowitz, P. (1967). Periodic solutions of nonlinear hyperbolic partial diffrential equations. *Communications on pure and applied mathematics*, 20, 145-205.

Rabinowitz, P. (1971). Some global results for nonlinear eigenvalue problems. *Journal of functional analysis*, 7(3), 487-513.

Rabinowitz, P. (1978). Free vibrations for a semilinear wave equation. *Communications on pure and applied mathematics*, 31, 31-68.

Sanjuán, A. (2015). *Membranas vibrantes*. Tesis doctoral. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Willem, M. (1981) Density of the range of potential operators. *Proceedings of the american mathematical society*, 83(2), 341-344.