PREFERENCIAS CON INDIFERENCIA NO TRANSITIVA: PROBLEMAS ABIERTOS RELATIVOS A ÓRDENES-INTERVALO*

Esteban Induráin
Universidad Pública de Navarra

RESUMEN.—En el marco del estudio de la preferencia con indiferencia no transitiva, y a la luz de una reciente caracterización ordinal de la representabilidad de órdenes-intervalo a través de dos funciones con valores reales, damos una visión panorámica de los diversos problemas que permanecen abiertos en el análisis de estas estructuras ordenadas.

1. INTRODUCCIÓN

En un reciente trabajo debido a Oloriz et al. (1998) se ha dado un teorema de caracterización de la representabilidad natural de una estructura de orden-intervalo $(X, \preceq)$ a través de dos funciones reales $u, v : X \longrightarrow \mathbb{R}$ de forma que $x \preceq y \iff u(x) \leq v(y) \quad (x, y \in X)$. Se cerró así un problema que ha permanecido abierto durante unos quince años, aparecido a partir de una trilogía de artículos debida a Douglas S. Bridges. (Véase Bridges (1983, 1985, 1986). Para una más completa información consúltese la monografía Fishburn (1985) o, tal vez mejor por su actualidad, el capítulo 6 del libro Bridges y Mehta (1995)). El concepto de *orden-intervalo* fue introducido como tal por

*Este trabajo ha sido realizado mediante el proyecto de investigación "Análisis Matemático de la Preferencia", subvencionado por el Gobierno de Navarra (Dic. 1996).

Peter C. Fishburn. (Véase Fishburn (1970 a)). No obstante, hay un caso particular de orden-intervalo muy significativo y de aparición previa como es el concepto de *semiorden.* (Véase Luce (1956), Scott y Suppes (1958), Suppes y Zinnes (1963), Scott (1964), Krantz (1967), o Gensemer (1987 a,b)). Tales conceptos se introdujeron en la literatura económica para la *modelización de preferencias con indiferencia no necesariamente transitiva.* (Véase por ejemplo Fishburn (1970 b), o Bosi e Isler (1995)).

En el presente artículo tratamos de *mostrar en forma panorámica qué problemas han sido ya resueltos en torno de estas estructuras ordenadas,* y sobre todo, *qué problemas quedan todavía abiertos.* Damos también un *amplio repaso a las distintas técnicas* que han ido empleándose, así como sugerencias acerca de las líneas que cabría seguir para abordar los problemas que quedan sin resolver.

2. CONSIDERACIONES PREVIAS

En lo que sigue "$\prec$" denotará una relación binaria asimétrica definida sobre un conjunto no vacío X. Le asociaremos otras dos relaciones binarias que denotaremos res-pectivamente mediante "$\preceq$" y "$\sim$", y que vienen dadas por $x \preceq y \iff \neg(y \prec x)$ y $x \sim y \iff x \preceq y \ , \ y \preceq x$. A la relación $\prec$ se le denomina *preferencia estricta.* A la relación $\preceq$, *preferencia débil,* y a la relación $\sim$ se le denomina *indiferencia.*

DEFINICIÓN: Se dice que la relación binaria $\prec$ es un *orden-intervalo* si $(x \prec y, a \prec b) \Longrightarrow$ o bien $x \prec b$, o bien $a \prec y$, (o ambas a la vez).

Observemos que al ser $\prec$ una relación asimétrica, *si es un orden-intervalo entonces debe ser transitiva.* (Para probarlo, basta tomar $a = y \ , \ b = z$ en la definición de orden-intervalo, y observar que ha de descartarse la posibilidad $y \prec y$ puesto que una relación asimétrica es en particular irreflexiva.)

Cabe hacer notar también que siendo $\prec$ un orden-intervalo, *las relaciones asociadas $\preceq$ y $\sim$ pueden no ser transitivas.* Un *ejemplo* de tal situación aparece al definir $\prec$ sobre la recta real $\mathbb{R}$ como $x \prec y \iff x + 1 < y$.

La nomenclatura *orden-intervalo* se asocia al siguiente ejemplo, bien conocido, propio de la Economía: Supongamos que salen al mercado dos bienes x e y de parecidas características. Según dónde vayamos a comprar el bien x tendremos que pagar un precio u otro, más o menos próximos, de manera que podemos pensar que los posibles precios a que puede venderse el producto x oscilan entre un valor mínimo $u(x)$ y un valor máximo $v(x)$. (Obviamente $u(x) \leq v(x)$). De manera análoga, los posibles precios a los que puede venderse el producto y oscilarán en un intervalo $(u(y)\ ,\ v(y))$ con $u(y) \leq v(y)$. Lógicamente, un consumidor dirá que el bien x es definitivamente más barato que el bien y si ocurre que el máximo precio $(v(x))$ a que puede venderse x es menor que el mínimo precio $(u(y))$ a que puede venderse y. Esto define una relación $\prec$ sobre el conjunto de los bienes, dada por $x \prec y \iff v(x) < u(y)$, o equivalentemente $a \preceq b \iff u(a) \leq v(b)$, siendo $u(z) \leq v(z)$, para todo bien z. Pues bien, esta relación $\prec$ es el ejemplo más típico (y quizá el primero en considerarse) de la estructura ordenada que ha pasado a denominarse *orden-intervalo* en la literatura.

Estas consideraciones sugieren la *representación natural mediante un par de funciones con valores reales,* para una estructura $(X, \prec)$ de orden-intervalo.

DEFINICIÓN: Sea X un conjunto no vacío y sea $\prec$ una relación binaria de tipo orden-intervalo definida sobre X. Diremos que la estructura ordenada $(X, \prec)$ es *representable* si existen dos funciones $u, v : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$u(x) \leq v(x) \quad , \quad x \prec y \iff v(x) < u(y) \qquad (x, y \in X).$$

Resulta sin embargo que el ejemplo que hemos considerado más arriba (donde $\prec$ se definía sobre la recta real $\mathbb{R}$ mediante $x \prec y \iff x + 1 < y$), no es el óptimo para entender la estructura ordenada de orden-intervalo. La razón es que otra forma equivalente de entender un orden-intervalo representable $(X, \prec)$ es mediante una *correspondencia C que asigna a cada elemento $x \in X$ el intervalo* $(u(x)\ ,\ v(x)) \subset \mathbb{R}$. Hay que tener presente que estos intervalos *no tienen por qué tener la misma longitud,* esto es, si $x \neq y$ no necesariamente se ha de tener la igualdad entre $v(x) - u(x)$ y $v(y) - u(y)$. Si tal cosa ocurriera, esto es, si $v(z) - u(z)$ fuese una constante real $k \geq 0$, la misma para todo $z \in X$, se tendría un notable caso particular de orden-intervalo, denominado *semiorden* en la literatura, y de aparición anterior al concepto más general de orden-intervalo. (Véase Luce (1956), trabajo donde se introdujo el concepto de *semiorden*). (Obsérvese que en el ejemplo antes considerado, podemos tomar $v(z) = u(z) + 1 \quad (z \in \mathbb{R})$). Este tipo de representación $x \prec y \iff u(x) + k < u(y)$ será la *natural para una estructura de semiorden.* Sin embargo, no hemos dado aún la definición técnica y abstracta de estas estructuras ordenadas. Lo hacemos a continuación.

DEFINICIÓN: Una relación binaria $\prec$ de tipo orden-intervalo definida sobre un conjunto no vacío X se denomina *semiorden* si ocurre que para cualesquiera $a, b, c, d \in X$ se tiene que

$$(a \prec b, \quad b \prec c) \Longrightarrow (\text{ o bien } a \prec d \quad \text{ o bien } d \prec c).$$

Una estructura de semiorden $(X, \prec)$ se dice *representable* si existen una función $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$ y una constante real no negativa k de manera que $x \prec y \iff u(x) + k < u(y) \quad (x, y \in X)$.

El concepto de semiorden fue introducido en estudios de Psicología Matemática en lo que se denomina *Teoría de la Medición* (véase Luce (1956), Scott y Suppes (1958), Suppes y Zinnes (1963), Scott (1964), Krantz (1967), Tversky (1969) o Fisburn (1970 b)) a fin de interpretar situaciones de *"indiferencia no transitiva con umbral de percepción"*. Supongamos así que la capacidad humana de distinción entre dos cantidades de una misma cosa no permite distinguir (y por tanto las declara indiferentes) dos cantidades que se diferencien en menos de un *umbral de percepción* $\alpha \in (0, +\infty)$, que supondremos fijo e invariable para todo ser humano. *En las situaciones en que tal umbral sea estrictamente positivo se producirá indiferencia no transitiva.* Un ejemplo clásico atribuido a Armstrong (véase Armstrong (1950), p. 122 , o bien Fishburn (1970 b)) nos habla de una persona que prefiere una taza de café con un azucarillo a una taza de café sin azúcar. Si a esta persona le hacemos comparar sucesivamente tazas que se diferencian únicamente en tener un grano de azúcar más, entre cada dos tazas consecutivas nuestro consumidor se habrá mostrado *indiferente.* Sin embargo es obvio que al cabo de un cierto número de pasos intermedios habremos pasado de la taza sin nada de azúcar a la taza con la cantidad equivalente a un azucarillo, taza que es *estrictamente preferida* por nuestro consumidor a la taza sin azúcar. Se manifiesta así una clara intransitividad de la indiferencia.

Por último aparece un nuevo *caso particular clave* de semiorden, que correspondería a la *capacidad de discriminación perfecta,* o, en el contexto anterior, al *umbral de percepción cero.* También, en una situación en la que dispongamos de una estructura de semiorden $(X, \prec)$ representable, para la cual la constante k asociada a la re–presentación sea precisamente $k = 0$, se llega a que la relación binaria $\prec$ es un *orden estricto,* esto es, se trata de una relación binaria asimétrica y *negativamente transitiva* ($\neg(x \prec y) \quad , \quad \neg(y \prec z) \Longrightarrow \neg(x \prec z)$.) Equivalentemente, la relación asociada $\preceq$ es un *preorden total* (reflexiva, transitiva y completa). Puede observarse que la relación de *indiferencia* $\sim$ resulta ser *transitiva* en este caso. En definitiva, tendríamos aquí la siguiente definición:

DEFINICIÓN: Una relación binaria asimétrica y negativamente transitiva $\prec$ definida sobre un conjunto no vacío X se denomina *orden estricto*. Una relación binaria $\preceq$ reflexiva transitiva y completa se denomina *preorden total*. Un preorden total pasa a denominarse *cadena u orden total* si es además antisimétrico (esto es $x \preceq y$, $y \preceq x \Longrightarrow x = y$ $(x, y \in X)$). Un orden estricto es *representable* si existe una función $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$, denominada *función de utilidad* tal que $x \prec y \iff u(x) < u(y)$ $(x, y \in X)$. De idéntica forma, un preorden total es *representable* si existe una función $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$ (también denominada utilidad), tal que $x \preceq y \iff u(x) \leq u(y)$ $(x, y \in X)$.

NOTAS 1:

i) Obsérvese además que si $\prec$ es un orden estricto entonces su preferencia débil asociada $\preceq$ es un preorden total. De la misma forma, si $\preceq$ es un preorden total, la relación $\prec$ definida por $x \prec y \iff \neg(y \preceq x)$ es un orden estricto.

ii) Cuando se dispone de un orden estricto $\prec$, o equivalentemente un preorden total $\preceq$ definido sobre un conjunto no vacío X, el hecho de que la relación de indiferencia $\sim$ sea *transitiva* permite considerar el espacio cociente $\frac{X}{\sim} = \{(x) \ : \ (x \in X)\}$, siendo $(x) = \{z \in X, x \sim z \ \ (x \in X)\}$. Tal espacio cociente pasa a estar dotado de un *orden total o cadena,* que denotaremos también $\preceq$ dado por $(x) \preceq (y)$ (en el espacio cociente) $\iff x \preceq y$ (en X). Por todo esto, es inmediato observar que *la búsqueda de representaciones de utilidad para conjuntos totalmente ordenados se reduce a la búsqueda de representaciones de utilidad para cadenas.* (Para más información véase Tanguiane (1988), Candeal e Induráin (1990) o Candeal e Induráin (1993)).

En la presentación de conceptos que hemos dado aquí (orden-intervalo, semiorden como caso particular, y orden estricto como caso particular de este último) hemos seguido el orden inverso al de la aparición cronológica de estos conceptos en la literatura económica. El primer concepto en aparecer fue el de orden estricto (o su equivalente preorden total). Y ya a principios de los años cuarenta se disponía de una *caracterización ordinal de la representabilidad de una cadena a través de una función de utilidad.* (Véase Milgram (1939), Birkhoff (1940, 1967), Debreu (1954, 1959, 1964) o los primeros capítulos de Bridges y Mehta (1995)).

DEFINICIÓN: Dado un preorden total $\preceq$ definido sobre un conjunto no vacío X diremos que es *perfectamente separable* si existe un subconjunto numerable $D \subseteq X$ tal que para cualesquiera $x, y \in X$ con $x \prec y$ (esto es, $\neg(y \preceq x)$) existe $d \in D$ con $x \preceq d$, $d \preceq y$.

TEOREMA 1.: Sea X un conjunto no vacío y sea $\precsim$ un preorden total definido sobre X. Entonces $\precsim$ es representable mediante una función de utilidad si y solamente si es perfectamente separable.

DEMOSTRACIÓN: Hay múltiples demostraciones de este hecho en la literatura. Véase, por ejemplo, Milgram (1939), Birkhoff (1940, 1967), Debreu (1954, 1959, 1964), Bowen (1968), Jaffray (1975), Tanguiane (1988), Candeal e Induráin (1990, 1993), o el completo estudio que se realiza en los primeros capítulos de Bridges y Mehta (1995). □

3. MÁS ALLÁ DEL CASO NUMERABLE: ÓRDENES-INTERVALO Y CONDICIONES DE SEPARABILIDAD

A la vista de la caracterización ordinal de la representabilidad de preórdenes totales dada en el Teorema 1 anterior, la primera cuestión que cabe plantearse es la existencia de alguna condición de *separabilidad* para órdenes-intervalo que caracterice su representación numérica a través de dos funciones con valores reales. Tal cuestión aparece ya en forma más o menos explícita en trabajos como Bridges (1983, 1985, 1986), Chateauneuf (1987), Gensemer (1987 a,b), Bosi e Isler (1995), o el capítulo 6 de Bridges y Mehta (1995).

Antes de analizar esta cuestión anterior cabe todavía preguntarse acerca del *porqué de condiciones de separabilidad,* puesto que lo que ocurre en preórdenes totales podría no tener sentido al considerar otras estructuras como son los órdenes-intervalo.

Una condición de separabilidad trata en cierto modo de buscar un adecuado subconjunto *numerable* del conjunto ordenado que estamos considerando. Además tal conjunto numerable debe estar "repartido" por todo el conjunto ordenado. Esto nos hace pensar que si el conjunto de partida fuese numerable de entrada, entonces forzosamente será repre–sentable. Para el caso de órdenes y preórdenes totales este es un hecho bien conocido. Se tiene el resultado siguiente.

TEOREMA 2. : El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales, dotado con su orden natural $\leq$ contiene isotónicamente una copia de cualquier orden total que pueda definirse sobre un conjunto numerable. En consecuencia, todo conjunto numerable totalmente preordenado es representable a través de una función de utilidad.

DEMOSTRACIÓN: Aparece ya implícita en Debreu (1959). Puede verse también en Birkhoff (1967) (Teorema 22 en p. 200). □

Visto esto para preórdenes totales debemos preguntarnos si una situación similar se da para órdenes-intervalo, en el sentido de que todo orden-intervalo sobre un conjunto numerable admita una representación mediante un par de funciones con valores reales. A tal respecto se tiene el resultado siguiente:

TEOREMA 3. : Sea X un conjunto numerable y sea $\prec$ un orden-intervalo definido sobre X. Existen entonces dos funciones $u, v : X \longrightarrow \mathbb{R}$ de manera que

$$u(x) \leq v(x) \quad , \quad x \prec y \iff v(x) < u(y) \quad (x, y \in X).$$

DEMOSTRACIÓN: Véase Fishburn (1970 a), Bridges (1983), la sección 1.3 de Subiza (1992), o Bogart (1993). □

Curiosamente, *no hay un resultado similar para la estructura intermedia de semiorden.* A tal respecto se tiene el ejemplo siguiente.
EJEMPLO 1. : (Construcción de un semiorden numerable no representable)

Con la representación *natural* de una estructura de semiorden $(X, \prec)$ mediante una función $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$ y una constante no negativa $k \in (0 + \infty)$ de forma que $x \prec y \iff u(x) + k < u(y)$ observamos que si $k \neq 0$ y existen dos elementos $x, y \in X$ con $x \prec y$ y tales que existe toda una familia numerable de elementos distintos dos a dos $\{x_n \in X \ ; \ n \in \mathbb{N}\}$ tales que

i) o bien $x \prec x_n \prec x_{n+1} \prec y$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

ii) o bien $x \prec x_{n+1} \prec x_n \prec y$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

entonces en la situación primera se tiene, para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$u(x) + k < u(x_1), \quad u(x_1) + k < u(x_2), \quad \ldots,$$

$$\ldots, \quad u(x_n) + k < u(x_{n+1}), \quad u(x_{n+1}) + k < u(y),$$

y fácilmente se obtiene que

$$u(x) + kn < u(y) \quad (n \in \mathbb{N}),$$

con lo que el valor de $u(y)$ sería infinito, lo que es imposible.

En la situación segunda ocurre algo parecido, llegándose a la contradicción de que el valor de $u(x)$ debería ser menos infinito.

Por otra parte, si k fuese nula, la validez de la representación $x \prec y \iff u(x) < u(y)$ conlleva que "$\prec$" sea un orden estricto. De esta forma, si damos un ejemplo de un semiorden numerable tal que no sea un orden estricto y además existan dos elemento x, y verificando una de las dos condiciones *i)* o *ii)* anteriores, está claro que un tal semiorden no admitirá representación.

He aquí una tal estructura de semiorden: Consideremos el conjunto $X = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ dotado de la relación binaria $\prec$ dada por

$$(a,b) \prec (c,d) \iff \text{ o bien } a < c \text{ o bien } a = c, \quad b+1 < d.$$

No es un orden estricto ya que

$$(0,0) \sim (0,\frac{3}{4}), \quad (0,\frac{3}{4}) \sim (0,\frac{3}{2}), \quad \text{pero } (0,0) \prec (0,\frac{3}{2}).$$

Contiene subconjuntos del tipo de las condiciones i) o ii) anteriores, sin más que pensar que la restricción de $\prec$ a $\mathbb{Q} \times \{0\}$ es un orden estricto. Por último, es fácil comprobar que $(X,\prec)$ es una estructura de semiorden.

NOTAS 2:

i) Nótese que por el Teorema 3, la estructura $(X,\prec)$ será representable *como orden-intervalo.* (Recuérdese que semiorden es un caso particular de orden-intervalo).

ii) En Scott y Suppes (1958) se demuestra que ciertas estructuras numerables de semiorden $(X,\prec)$ pueden ser representables, aun sin tratarse de órdenes estrictos. Sin embargo, haya que recalcar que *no se trata de todas las estructuras numerables de semiorden,* como se interpreta incorrectamente en p. 54 de Subiza (1992).

iii) Aparece un *"subconjunto prohibido"* para la representabilidad de semiórdenes $(X,\prec)$ que no sean órdenes estrictos. Si siendo $a,b \in X$ definimos $a\mathcal{R}b$ como

$$a \sim b \text{ y para todo } c \in X \text{ se tiene } (a \sim c \iff b \sim c),$$

obtenemos que $\mathcal{R}$ es transitiva. Si el espacio cociente $\frac{X}{\mathcal{R}}$ contiene un subconjunto para el cual la restricción de la relación que $\prec$ define de manera obvia sobre $\frac{X}{\mathcal{R}}$ resulta ser un orden estricto, y tal que su tipo de orden es precisamente el de $\mathbb{N} \bigoplus 1$ o su dual, entonces $(X,\prec)$ no es representable como semiorden.

iv) La técnica de probar que una estructura ordenada de tipo orden-intervalo no será re–presentable en cuanto contenga ciertos *subconjuntos prohibidos* aparece ya en Mittas (1995).

PROBLEMA ABIERTO 1. : Queda como problema abierto determinar completamente todos aquellos semiórdenes numerables que sean representables como semiorden.

CONJETURA: Conjeturamos que si X es un conjunto no vacío y $\prec$ es un semiorden sobre X que no es orden estricto, entonces $\prec$ es representable como semiorden si y sólo si $\frac{X}{\mathcal{R}}$ (definido como en la Nota 2 iii anterior), una vez se le dota de la relación determinada por $\prec$, no contiene una copia isotónica de $\mathbb{N} \bigoplus 1$ ni de su dual.

Podemos resumir toda la discusión anterior en que *condiciones del tipo "separabilidad" no son suficientes para encontrar representaciones de semiórdenes,* aunque sí lo sean para representar tanto órdenes estrictos como órdenes-intervalo.

Presentamos a continuación las *condiciones de tipo separabilidad que caracterizan la representabilidad de una estructura de orden-intervalo,* tal y como aparecen recogidas en Oloriz et al. (1998). Para ello necesitamos introducir algunos conceptos y resultados previos.

DEFINICIÓN: Sea X un conjunto no vacío, y sea $\prec$ un orden-intervalo definido sobre X. Dado un par ordenado $(x,y) \in X \times X$ denotamos por $A(x,y)$ (en este orden) el conjunto siguiente, denominado *conjunto característico* asociado al par (x,y):

$$A(x,y) = \{s \in X : \text{ existe } a \in X \text{ tal que } x \preceq a \prec s \preceq y\}.$$

Diremos que una estructura de orden-intervalo $(X,\prec)$ es *separable como orden-intervalo* si existe un subconjunto numerable $D \subseteq X$ tal que para cualesquiera $x,y \in X$ con $x \prec y$ podemos encontrar $d \in D \bigcap (A(x,y) \setminus (A(x,x) \cup A(y,y)))$.

Este concepto de separabilidad como orden-intervalo dio lugar a un teorema clave (véase Oloriz et al. (1998)) que proporciona una caracterización ordinal de la representabi–lidad de una estructura de orden-intervalo $(X,\prec)$ a través de una pareja de funciones con valores reales $u,v : X \longrightarrow \mathbb{R}$ de manera que

$$x \prec y \iff v(x) < u(y) \quad (x,y \in X).$$

El problema de encontrar una adecuada caracterización ordinal de la representabilidad de órdenes-intervalo fue planteado ya en Bridges (1983, 1985, 1986). A tal respecto se tiene:

TEOREMA 4. : Sea $(X,\prec)$ una estructura de orden-intervalo donde X es un conjunto no vacío. Se verifica que la estructura $(X,\prec)$ es representable como orden-intervalo mediante dos funciones $u,v : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $x \prec y \iff v(x) < u(y) \quad (x,y \in X)$ si y solamente si es separable como orden-intervalo.

DEMOSTRACIÓN: Se trata del resultado central de Oloriz et al. (1998). □

4. TÉCNICAS BASADAS EN APLICACIONES BIVARIANTES Y ECUACIONES FUNCIONALES

Las técnicas empleadas en Oloriz et al. (1998) para probar su resultado central (el Teorema 4 de la sección anterior) se basan en el empleo de *aplicaciones bivariantes,* entendiendo por tales aplicaciones de $X \times X$ en $\mathbb{R}$, donde X es un conjunto no vacío dotado de una relación binaria que denotaremos $\prec$, y que intentamos *"representar"* en la forma $x \prec y \iff F(x,y) > 0$.

Observemos que esta es una idea con claras connotaciones económicas: Para saber si un producto es más caro que otro no tenemos por qué conocer exactamente el precio de cada uno de estos productos, ya que basta con que nos digan que la diferencia entre lo que cuesta el primer producto y lo que cuesta el segundo es estrictamente positiva.

El tipo de aplicación bivariante F que se maneje dará lugar a la posibilidad de repre-sentar unos tipos u otros de relaciones binarias. Así, por ejemplo, si $\precsim$ es un preorden total representable a través de una función de utilidad $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$ en la forma $x \precsim y \iff u(x) \leq u(y)$, llamando $F(x,y) = u(y) - u(x)$ resulta que $x < y \iff F(x,y) > 0$.

De la misma manera, si $\prec$ representa un orden-intervalo sobre un conjunto no vacío X, y la estructura ordenada $(X, \prec)$ es representable por un par de funciones $u, v : X \longrightarrow \mathbb{R}$ en la forma $x \prec y \iff v(x) < u(y), \quad u(x) \leq v(x) \qquad (x, y \in X)$, llamado $G(x,y) = u(y) - v(x)$ se tiene también una representación del tipo $x \prec y \iff G(x,y) > 0$.

Cabe entonces analizar qué diferencias hay entre la expresión $F(x,y) = u(y) - u(x)$ que manejamos en el caso de un preorden total representable, y la $G(x,y) = u(y) - v(x)$ que aparece en el caso de un orden-intervalo representable.

La diferencia fundamental estriba en qué *ecuación funcional satisface la aplicación bivariante que hayamos considerado en cada caso.*

De este modo en el caso de un preorden total representable, la aplicación F tal que $F(x,y) = u(y) - u(x)$ satisface claramente la ecuación funcional siguiente, denominada *ecuación de Sincov* :

$$F(x,y) + F(y,z) = F(x,z) \qquad (x,y,z \in X).$$

En el caso de un orden-intervalo representable, la aplicación G dada por $G(x,y) = u(y) - v(x)$ satisface la ecuación funcional

$$G(x,y) + G(y,z) = G(x,z) + G(y,y),$$

que se denomina *ecuación funcional de la separabilidad,* y que determina a aquellas funciones de dos variables $H(x,y)$ cuyas variables independientes pueden "separarse", de modo que la función pasa a expresarse como suma de dos funciones, una dependiendo sólo de la variable x y otra dependiendo sólo de la variable y.

(Para más información sobre éstas y otras ecuaciones funcionales consúltese Castillo y Ruiz (1993)).

En Oloriz et al. (1998) se probó que *toda solución de la ecuación funcional de la separabilidad sobre un conjunto no vacío X determina sobre X un orden-intervalo representable $\prec$*. Se tiene el siguiente resultado:

TEOREMA 5. : Sea X un conjunto no vacío y sea $\prec$ una relación binaria asimétrica definida sobre X. Son equivalentes:

a) La relación $\prec$ es un orden-intervalo representable,

b) existe una aplicación bivariante $F : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $x \preceq y \iff F(x,y) \geq 0$ y $F(x,y) + F(y,z) = F(x,z) + F(y,y)$ para cualesquiera $x, y, z \in X$.

   (Recordemos que $x \preceq y \iff \neg(y \prec x) \quad (x, y \in X)$).

NOTAS 3:

i) Hay un resultado similar para *preórdenes totales*. Es fácil probar que una relación binaria $\preceq$ sobre un conjunto no vacío X es un preorden total representable mediante una función de utilidad si y sólo si existe una aplicación bivariante $F : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ que es solución de la ecuación funcional de Sincov, y tal que $x \preceq y \iff F(x,y) \geq 0$. De esta forma tenemos que *toda solución de la ecuación funcional de Sincov sobre un conjunto no vacío X determina sobre X un preorden total representable mediante una función de utilidad.*

ii) También hay un resultado similar para *semiórdenes:* Siendo X un conjunto no vacío, una relación binaria asimétrica $\prec$ definida sobre X la relación $\prec$ es un orden-intervalo representable si y sólo si existe una aplicación bivariante $F : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $x \preceq y \iff F(x,y) \geq 0$ y $F(x,y) + F(y,z) = F(x,z) + F(t,t)$ para cualesquiera $x, y, z, t \in X$.

iii) Técnicas basadas en ecuaciones funcionales han sido utilizadas recientemente en Rodríguez-Palmero (1997) para estudiar relaciones binarias *acíclicas,* marco más general que el de orden-intervalo.

Analicemos con más detalle las ecuaciones funcionales que han ido apareciendo para el caso de órdenes-intervalo y semiórdenes: Si tenemos que F es una solución de la ecuación de la separabilidad sobre un conjunto no vacío X resulta que fijando $x_0 \in X$ y llamando $u(y) = -F(y, x_0)$, $v(x) = F(x,x) + u(x)$ $(x, y \in X)$ tenemos que $F(x,y) = F(x,x_0) + F(y,y) - F(y,x_0) = -(-F(x,x_0)) + (F(y,y) + u(y)) = -u(x) + v(y)$. Supongamos además que F verifica que $F(x,x) \geq 0$ para todo $x \in X$. Definimos ahora una relación binaria $\preceq$ sobre X dada por $x \preceq y \iff F(x,y) \geq 0 \iff v(y) - u(x) \geq 0$. (Equivalentemente será $x \prec y \iff \neg(y \preceq x) \iff \neg(v(x) - u(y) \geq 0) \iff v(x) - u(y) < 0 \iff v(x) < u(y))$. Como se tiene que $F(x,x) \geq 0$ para todo $x \in X$ resulta que $\preceq$ es reflexiva, luego $\prec$ es irreflexiva. Como $F(x,y) + F(y,x) = F(x,x) + F(y,y) \geq 0$ se sigue fácilmente que $\prec$ es asimétrica. Una situación del tipo $x \prec y$, $z \prec t$ se traduce en que $F(y,x), F(t,z)$ son estrictamente positivos. Un sencillo cálculo, teniendo en cuenta que F es solución de la ecuación de la separabilidad, nos conduce a $F(y,x) + F(t,z) = F(y,z) + F(t,x)$, luego alguno de los términos en el segundo miembro de la igualdad ha de ser estrictamente positivo, de manera que o bien $z \prec y$ o bien $x \prec t$. En definitiva, la aplicación binaria $\prec$ así definida es un *orden-intervalo.*

Con técnicas similares, si tenemos una aplicación bivariante F definida en X y tal que sea solución de la ecuación funcional $F(x,y) + F(y,z) = F(x,z) + F(t,t)$ $(x,y,z,t \in X)$, se sigue inmediatamente que $F(t,t) = F(a,a)$ para cualesqueira $t, a \in X$, de manera que la expresión $k(x) = F(x,x)$ $(x \in \mathbb{R})$ es una constante $k \in \mathbb{R}$.

Si tuviéramos que $k > 0$, no resulta difícil ver que la relación $\prec$ definida en X mediante $x \prec y \iff F(y,x) > 0$ constituye en X un *semiorden que no es orden estricto,* y que se verifica $x \prec y \iff u(x) + k < u(y)$, siendo $u(x) = -F(x,x_0)$ donde $x, y, x_0 \in X$ con x_0 cierto elemento prefijado.

Por último, si $k = 0$ la aplicación bivariante F satisfará la ecuación funcional de Sincov, y la relación binaria $\prec$ dada por $x \prec y \iff F(y,x) > 0$ resulta ser un *orden estricto.* Vemos así que la resolución de ciertas ecuaciones funcionales está íntimamente ligada con la posibilidad de definir adecuadas relaciones binarias de tipo orden-intervalo, semiorden, u orden estricto sobre un conjunto no vacío X.

En relación con las ecuaciones funcionales anteriores *vamos a resumir a continuación la técnica desarrollada en Oloriz et al. (1998) que permitió resolver la ecuación de la separabilidad para obtener de allí una representación natural de un orden-intervalo $\prec$ definido sobre un conjunto no vacío X.* El punto clave es la consideración de los *conjuntos característicos* $A(x,y)$ que hemos definido anteriormente.

Se prueba que estos conjuntos satisfacen las siguientes propiedades:

a) $A(x,y) \cap A(z,t) = A(x,t) \cap A(z,y) \qquad (x,y,z,t \in X)$,

b) $A(x,y) \cup A(y,z) = A(x,z) \cup A(y,y)$
$(x,y,z,t \in X \quad x \preceq y \preceq z, x \preceq z)$,

c) $A(y,x) = \emptyset, \quad A(x,x) \cup A(y,y) \not\subseteq A(x,y)$,
$A(x,x) \cap A(y,y) = \emptyset \quad (x,y \in X \quad x \prec y)$.

Si existe ahora un conjunto $D = \{d_n : n \in \mathbb{N}\}$ numerable que corta a todo conjunto de la forma $A(x,y) \setminus (A(x,x) \cup A(y,y))$ siempre que se tenga $x \prec y \quad (x,y \in X)$, entonces a partir de las propiedades a),b),c) anteriores resulta que la aplicación bivariante F definida por

$$F(x,y) = \Sigma_{\{n \in \mathbb{N}: d_n \in D \cap A(x,y)\}} \quad 2^{-n} \qquad \text{si } x \preceq y,$$

$$F(x,y) = -F(y,x) + F(x,x) + F(y,y) \qquad \text{si } y \prec x$$

(donde se entiende además que $F(x,y) = 0$ en los casos en que siendo $x \preceq y$, la intersección $D \cap A(x,y)$ sea vacía), resulta ser una solución de la ecuación de la separabilidad que representa al orden-intervalo $\prec$ en la forma $x \preceq y \iff F(x,y) \geq 0$.

Se prueba además que si $\prec$ es un *orden estricto* (o equivalentemente $\preceq$ es preorden total) se tiene que $A(x,x) = \emptyset$ para todo $x \in X$. esto conlleva que en la construcción anterior de F, para este caso particular de orden estricto se llegue a que $F(x,x) = 0$ para todo $x \in X$, y en consecuencia F sea solución de la *ecuación funcional de Sincov.*

Sin embargo, la construcción anterior *no resulta satisfactoria para encontrar representaciones naturales de un semiorden $\prec$ que no sea orden estricto, y que esté definido sobre un conjunto no vacío X*, a través de una aplicación bivariante F que cumpla $F(x,y) + F(y,z) = F(x,z) + F(t,t) \quad (x,y,z,t \in X)$ y además $x \preceq y \iff F(x,y) \geq 0$.

La razón es que $F(x,x)$ debe ser una constante k estrictamente positiva. Pero comoquiera que si $x \prec y$ resulta que los conjuntos $A(x,x)$ y $A(y,y)$ son disjuntos, es más que probable que los elementos de D que estén en $A(x,x)$ no tengan nada que ver con los que estén en $A(y,y)$. Como hemos considerado la serie de término general 2^{-n} y resulta que cualesquiera dos subseries distintas de la misma tienen distinta suma, concluiremos que $F(x,x)$ no va a ser, en general, igual a $F(y,y)$ con lo que tal construcción no nos sirve.

Está claro que esta discusión nos conduce a un nuevo *problema abierto,* con el que cerramos esta sección 4.

PROBLEMA ABIERTO 2. : Dado un conjunto no vacío X y un semiorden sobre X que no sea orden estricto, queda como problema abierto encontrar algún modo de resolver la ecuación funcional $F(x,y) + F(y,z) = F(x,z) + F(t,t) \quad (x,y,z,t \in X)$ de forma que $F(x,y) \geq 0$ equivalga a $x \preceq y$. (Naturalmente, para que esto sea posible el semiorden $\prec$ habrá de ser representable).

CONJETURA: Supongamos que $\prec$ es un semiorden que no es orden estricto, definido sobre un conjunto no vacío X. Consideramos la familia de todos los subconjuntos $C \subset X$ para los que la restricción de $\prec$ al conjunto C es un orden estricto. Ordenamos esta familia por contenido estricto conjuntista, y consideramos los elementos maximales respecto de tal ordenación. (Tales maximales existen vía el lema de Zorn).

Es sencillo ver que si el semiorden $\preceq$ es representable, entonces cualquier elemento maximal $\mathcal{M}$ de la familia anterior es isótono a un subconjunto de $\mathbb{Z}$ (conjunto de los números enteros, dotado con su orden natural). Para ello basta pensar cómo podemos colocar en la recta real una familia de intervalos distintos dos a dos y todos ellos de la misma longitud.

Hecha esta observación, conjeturamos que:

i) El semiorden $\preceq$ es representable si y sólo si existe un subconjunto D numerable tal que para cualesquiera $x, y \in X$ con $x \prec y$ se tiene que $D \bigcap A(x,y) \setminus ((A(x,x) \cup A(y,y)) \neq \emptyset$ y tal que además la intersección del conjunto D con un conjunto característico $A(x,y)$ será siempre finita, y en el caso particular $x = y$, la intersección $D \cap A(x,x)$ consta de un único elemento (para cualquier $x \in X$).

ii) Supongamos que $\prec$ es representable y que disponemos de un conjunto numerable D en las condiciones del apartado i) anterior. Entonces tal conjunto D ha de contener algún elemento maximal $\mathcal{M}$ respecto a contenido estricto conjuntista entre los conjuntos en los que la restricción de $\prec$ resulta ser un orden estricto. Además el número de posibles maximales $\mathcal{M}$ que, estando contenidos en D, son dos a dos disjuntos, ha de ser forzosamente finito.

iii) Supongamos que $\prec$ es representable y que disponemos de un conjunto numerable D en las condiciones del apartado i) anterior. Dados elementos $x, y \in X$ con $x \preceq y$, llamamos $F(x,y)$ al número de elementos en $D \cap A(x,y)$, mientras que si $y < x$ definimos $F(x,y)$ como $-F(y,x) + F(x,x) + F(y,y)$. Entonces, la aplicación F así definida es una solución de la ecuación funcional $F(x,y) + F(y,z) = F(x,z) + F(t,t) \quad (x,y,z,t \in X)$.

iv) En las condiciones del apartado iii), la aplicación bivariante F representa al orden-intervalo $\prec$ mediante $x \preceq y \iff F(x,y) \geq 0$.

5. EL PROBLEMA DE LA CONTINUIDAD EN LA REPRESENTABILIDAD DE ÓRDENES-INTERVALO

Sea X un conjunto no vacío dotado de una relación binaria $\prec$ de orden-intervalo. La familia de subconjuntos

$$\mathcal{F} = \{\{x \in X : x \prec a\}_{a \in X} \cup \{z \in X : b \prec z\}_{b \in X}\}$$

constituye una subbase para una topología en X que se denomina *topología del orden.* Otra topología que pueda definirse sobre X se dirá *natural* si es más fina que la topología del orden.

La existencia de representación de una estructura de orden-intervalo $(X, \prec)$ mediante una pareja de funciones $u, v : X \longrightarrow \mathbb{R}$ de manera que $x \prec y \iff v(x) < u(y)$ no nos garantiza de entrada la *continuidad* de tales funciones u, v, entendida tal continuidad en relación a la topología usual en $\mathbb{R}$ y la topología del orden (y por ende toda topología natural) en X.

En el caso especial en que $\prec$ es un orden estricto, la existencia de una representación a través de una *función de utilidad* $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$ de forma que $x \prec y \iff u(x) < u(y)$ sí llega a garantizar la existencia de una representación *continua* a través de otra adecuada función de utilidad U. Este resultado sale como consecuencia del célebre *"open gap lemma"* de Debreu. (Véase Debreu (1964)).

Se tiene así: DEFINICIÓN: Denotemos mediante $\bar{\mathbb{R}}$ la recta real completada con los valores límite $-\infty$ y $+\infty$. Un *subconjunto degenerado* en $\bar{\mathbb{R}}$ es uno que no contenga más de un elemento. Un *hueco ("gap",* en inglés) de un subconjunto S de $\bar{\mathbb{R}}$ es, por definición, un intervalo no degenerado maximal disjunto de S y con alguna cota superior y alguna cota inferior en el subconjunto S. Un intervalo de $\bar{\mathbb{R}}$ que sea del tipo (a,b) o del tipo (a,b) se dice *semiabierto.*

TEOREMA 6. :

(a) (Lema del hueco abierto ("open gap") de Debreu): Si S es un subconjunto de $\bar{\mathbb{R}}$, existe una función creciente $g : S \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que todos los huecos de $g(S)$ son abiertos.

(b) Sea $(X, \preceq)$ una estructura de orden total representable a través de una función de utilidad $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Si $u(X)$ no contiene huecos semiabiertos, entonces u es continua como aplicación de X con su topología del orden con valores en $\mathbb{R}$ con la topología usual.

c) Si una estructura totalmente ordenada $(X, \preceq)$ es representable a través de una función de utilidad, lo es también a través de una función de utilidad continua para cualquier topología natural en X y la topología usual en $\mathbb{R}$.

DEMOSTRACIÓN: (Véase Bridges y Mehta (1995), pp. 38 y ss, así como Debreu (1964)). La técnica para probar el apartado c) consiste en la composición de una función de utilidad $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$, continua o no, con una función creciente g de manera que los huecos de $g(u(X))$ sean todos abiertos. Tal función existe por el apartado a). En consecuencia, por el apartado b), la composición en cuestión será continua. Para finalizar basta observar que la composición $g \circ u$ de una función de utilidad $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$ con una estrictamente creciente $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ también es función de utilidad. □

Pretender extender estos resultados al caso de ordenes-intervalo y semiórdenes dará lugar a interesantes cuestiones, alguna de las cuales es todavía problema abierto.

Consideremos en primer lugar un orden-intervalo $\prec$ definido sobre un conjunto no vacío X, y representable a través de un par u, v de funciones de X en $\mathbb{R}$ de manera que $x \prec y \iff v(x) < u(y) \quad (x, y \in X)$.

Nuestro problema ahora es que no tenemos garantía alguna de que u, v vayan a ser continuas.

En caso de discontinuidad podríamos pensar en una generalización del lema del hueco abierto de Debreu que permitiera "arreglar" las funciones u, v de forma que al componerlas con adecuadas funciones crecientes pasaramos a tener funciones ya continuas. Hay que hacer notar además que siendo u, v funciones que representan a un orden-intervalo $\prec$ sobre un conjunto no vacío X existen dos relaciones de orden estricto $\prec_1$ y $\prec_2$ sobre X de manera que u es función de utilidad que representa a $\prec_1$ mientras que v es función de utilidad que representa a $\prec_2$. (Véase Fishburn (1970), Bridges (1985), Chateauneuf (1987), Bosi e Isler (1995) o el capítulo 6 de Bridges y Mehta (1995).) Podríamos aplicar el lema del hueco abierto por separado a u y a v, encontrando sendas representaciones para $\prec_1$ y $\prec_2$. Para ello u se habrá de componer con una aplicación creciente g_1 y v se habrá de componer con una aplicación creciente g_2.

La dificultad estriba en que si g_1 no coincide con g_2, el par $(g_1 \circ u, \quad g_2 \circ v)$ podría no representar ya al orden-intervalo $\prec$.

Esta dificultad conduce al siguiente *problema abierto.*

PROBLEMA ABIERTO 3. : Caracterizar los órdenes-intervalo representables que admitan una representación a través de funciones continuas.

CONJETURA: Conjeturamos que, a diferencia de lo que ocurre para órdenes totales, existen órdenes-intervalo representables *intrínsecamente discontinuos,* en el sentido de que no admiten ninguna representación en la que las correspondientes funciones u, v sean ambas continuas al dotar a X de la topología del orden y a $\mathbb{R}$ de la topología usual.

NOTAS 4:

i) En la línea opuesta a nuestra conjetura se muestra el ejemplo 6.3.13 de p. 100 de Bridges y Mehta (1995) donde se da una construcción de un orden-intervalo representable a través de dos parejas (u_1, v_1) y (u_2, v_2) de funciones con valores reales. Mientras que en la primera pareja ninguna función es continua, en la segunda ambas son continuas.

ii) Las construcciones que intentábamos dar en la conjetura que seguía al Problema abierto 2 anterior para el caso de semiórdenes, mediante la búsqueda de soluciones de la ecuación funcional $F(x,y) + F(y,z) = F(x,z) + F(t,t) \quad (x,y,z,t \in X)$ utilizando los conjuntos característicos, son susceptibles de no producir buenos resultados en cuanto a *continuidad* se refiere. La razón estriba en que los posibles valores $F(x,y)$ recorren un conjunto numerable. Recordemos aquí que el rango de una función continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ es *no numerable a menos que se trate de una función constante.*

   Comoquiera que, salvo en casos triviales, se tiene que una función constante no puede representar a un orden estricto, llegamos a la conlusión de que muy probablemente cons–trucciones de este tipo serán discontinuas en la mayoría de los casos.

iii) Hay condiciones necesarias y suficientes para que una estructura de orden-intervalo admita representacion a través de funciones continuas en *casos particulares significativos,* por ejemplo, cuando se parte de conjuntos *conexos.* (Para más información véase Chateauneuf (1987), Gensemer (1987 a), Bosi e Isler (1995) o la parte final del capítulo 6 de Bridges y Mehta (1995)).

iv) Otra técnica que cabría analizar es la posibilidad de llegar a obtener una *"utilización del lema del hueco abierto para aplicaciones bivariantes"* , en el sentido de que permitan modificar una aplicación bivariante $F : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ que represente un orden-intervalo $\prec$ definido sobre un conjunto no vacío X mediante $x \preceq y \iff F(x,y) \geq 0 \quad (x,y \in X)$. La aplicación F puede o no ser continua. Si lo fuera, las funciones $u, v : X \longrightarrow \mathbb{R}$ que obteníamos en el análisis que sigue a la Nota 3, y que representan al orden-intervalo $\prec$, resultan también continuas. Se trataría por tanto de utilizar una técnica similar a la del Teorema 6 c) para llegar a modificar directamente F hasta obtener otra aplcación $\bar{F}$ que sea ya continua y representa también a $\prec$. Todo parece indicar que la *clave* consistiría en una adecuada extensión del resultado expresado en el apartado b) del Teorema 6.

6. CUESTIONES ALGEBRAICAS EN LA REPRESENTABILIDAD DE ÓRDENES-INTERVALO

Consideramos ahora la siguiente línea de discusión, ya parcialmente analizada en Candeal et al. (1996):

Supongamos que estamos considerando algún tipo de preferencias sobre un conjunto no vacío X en el que hay definida alguna operación binaria interna que denotaremos "+". Y que esta operación + tiene alguna *propiedad algebraica* (asociatividad, por ejemplo). Supongamos también que sobre el conjunto X queremos definir una relación de preferencia $\prec$ que sea de algún modo *compatible* con la estructura algebraica, en la línea de verificarse alguna propiedad como $a \prec b \iff a + c \prec b + c \iff c + a \prec c + b \quad (a, b, c \in X)$. Una situación clara podría ser la de un consumidor que prefiere un bien a a otro b en la medida en que el precio de una unidad de a supere al precio de una unidad de b. La operación $a+b$ correspondería simplemente "comprar los bienes a y b simultáneamente" entendiéndolos como un nuevo "bien agregado". Esta operación es evidentemente asociativa y compatible con la preferencia "tanto vale tanto es preferido" de ese consumidor.

Al tener en cuenta no sólo la estructura ordinal de la recta real $\mathbb{R}$ sino también su estructura algebraica a partir de las operaciones de adición y multiplicación, podemos intentar buscar representaciones de $(X, \prec, +)$ que no sólo representen la ordenación $\prec$ sino que también sean homomorfismo algebraico al considerar en el espacio de llegada, por fijar ideas, la estructura *aditiva* $(\mathbb{R}, +)$.

Una situación típica se da cuando $(X, \preceq, +)$ es un *grupo totalmente ordenado invariante por traslaciones,* esto es $(X, +)$ es una estructura algebraica de *grupo* , $\preceq$ es un orden total definido sobre X, y se tiene además que

$$a \prec b \iff a + c \prec b + c \iff c + a \prec c + b \quad (a, b, c \in X).$$

En esta situación, la solución ideal al problema de la *representabilidad de la estructura en $\mathbb{R}$* sería una función de utilidad $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$ (esto es $x \preceq y \iff u(x) \leq u(y) \quad (x, y \in X)$) que preservase además las operaciones algebraicas, cumpliéndose que $u(x + y) = u(x) + u(y) \quad (x, y \in X)$ (Nótese que la primera operación $+$ corresponde a la operación interna en X, mientras que la segunda es la adición en $\mathbb{R}$). A este tipo de funciones de utilidad les llamaremos *funciones de utilidad aditivas.*

La caracterización de la existencia de funciones de utilidad aditiva en estos casos apareció ya en trabajos clásicos de álgebra, estudiando grupos ordenados. Viene dada por el conocido *teorema de Hölder,* cuyo enunciado damos a continuación. Antes necesitamos alguna definición previa.

DEFINICIÓN: Sea $(G, +)$ un grupo dotado de un orden total "$\preceq$". Decimos que la estructura $(G, +, \preceq)$ es *invariante por traslaciones* si $x \preceq y \iff x + t \preceq y + t \iff t + x \preceq t + y$, para cualesquiera $x, y, t \in G$. Decimos que $(G, +, \preceq)$ es *arquimediana* si, siendo e el elemento neutro de $(G, +)$ ocurre que para cualesquiera $x, y \in G$ con $e \prec x \prec y$ se tiene que existe $n \in \mathbb{N}$ con $y \prec n \cdot x = x + \ldots_{\text{n-veces}} \ldots + x$. Decimos que la estructura $(G, +, \preceq)$ es *super-arquimediana* si siendo e el elemento neutro de $(G, +)$ ocurre que para cualesquiera $x, y \in G$ con $e \prec x \prec y$ se tiene que existe $k \in \mathbb{N}$ con $(k + 1) \cdot x \prec k \cdot y$. El conjunto de los elementos $\{x \in G : e \prec x\}$ se denomina *cono positivo* de G.

TEOREMA 7. (Hölder, 1901): Un grupo totalmente ordenado invariante por traslaciones $(G, +, \preceq)$ es aditivamente representable si y solamente si es arquimediano.

DEMOSTRACIÓN: Véase el artículo original (Hölder (1901)), o Birkhoff (1967), p. 300. □

En el caso de *semigrupos* (donde una estructura de semigrupo consta de un conjunto no vacío X y una operación binaria *asociativa* "$+$" definida sobre él) totalmente ordenados, hay un resultado que extiende al teorema de Hölder. Para enunciarlo necesitamos antes introducir algún concepto previo.

DEFINICIÓN: Sea $(S, +, \preceq)$ un semigrupo totalmente ordenado. Como en el caso de grupos, se dice que la estructura $(S, +, \preceq)$ es *invariante por traslaciones* si $x \preceq y \iff x+t \preceq y+t \iff t+x \preceq t+y$, para cualesquiera $x, y, t \in S$. Un elemento $x \in S$ se dice *positivo* si $x \prec x+x$, y se dice *negativo* si $x+x \prec x$. Si $(S, +, \preceq)$ es invariante por traslaciones, el caso posible en que $x = x+x$ corresponde a la existencia en S de un elemento neutro, en cuyo caso se dice que $(S, +)$ es un *monoide.* S se dice *positivo* (respectivamente: *negativo)* si sólo consta de elementos positivos (respectivamente: negativos). Si $(S, +, \preceq)$ es invariante por traslaciones, el conjunto de los elementos positivos (respectivamente: negativos) de S constituye a su vez un semigrupo. Se denomina *cono positivo* (respectivamente: *negativo)* de S.

TEOREMA 8. :

a) Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un semigrupo positivo $(S, +, \preceq)$ totalmente ordenado e invariante por traslaciones:

(i) $(S, +, \preceq)$ es representable mediante una función de utilidad aditiva,

(ii) $(S, +, \preceq)$ es superarquimediano.

b) En el caso de grupos totalmente ordenados invariantes por traslaciones podemos añadir la verificación de la propiedad arquimediana a las equivalencias anteriores de a).

c) Un semigrupo totalmente ordenado e invariante por traslaciones $(S, +, \preceq)$ es representable mediante una función de utilidad aditiva si y sólo si sus conos positivo y negativo son representables por sendas funciones de utilidad aditiva.

DEMOSTRACIÓN: La equivalencia del apartado a) está probada, esencialmente, en Alimov (1950). (Véase por ejemplo, Fuchs (1963), pp 230 y ss.). Una prueba completa aparece en De Miguel et al. (1996). $\square$

Todo esta discusión anterior corresponde a semigrupos *totalmente ordenados.*

Sin embargo, *se conocen muy pocos resultados acerca de semigrupos* $(S, +)$ *dotados de una operación binaria* $\prec$ *de orden-intervalo o semiorden invariante por traslaciones* en el sentido $a \prec b \iff a+c \prec b+c \iff c+a \prec c+b$ $(a, b, c \in S)$. En Candeal et al. (1996) aparece algún resultado en esta línea, que pasamos a comentar a continuación, viendo además a qué tipo de problemas abiertos habríamos de dirigir ahora nuestra atención.

Supongamos que $(G,+)$ es una estructura de grupo, que $\prec$ es un orden-intervalo definido sobre G e invariante por traslaciones $a \prec b \iff a+c \prec b+c \iff c+a \prec c+b \quad (a,b,c \in G)$. Y supongamos que lo queremos representar a través de un par de funciones $u,v : G \longrightarrow \mathbb{R}$ en la forma $x \prec y \iff v(x) < u(y) \quad (x,y \in G)$ verificándose además $u(x) \geq v(x) \quad (x \in X)$ así como las condiciones de homomorfismo algebraico $u(x+y) = u(x)+u(y), \quad v(x+y) = v(x)+v(y) \quad (x,y \in G)$. Se sigue fácilmente que si e es el elemento neutro de G entonces $u(e) = v(e) = 0$. Por otra parte, siendo $x \in G$ llamamos $L(x)$ a la longitud del intervalo $(u(x), v(x))$, es decir $L(x) = v(x) - u(x)$. Siendo $x,y \in G$ se tiene que $y = x + (-x+y)$, donde el elemento opuesto de x se ha denotado "$-x$". A partir las condiciones de homomorfismo algebraico llegamos a $L(y) = L(x) + L(-x+y)$, luego $L(y) \geq L(x)$. Pero intercambiando los papeles de x e y se va a tener que $L(y) \leq L(x)$. Así $L : G \longrightarrow \mathbb{R}$ resulta ser una función *constante.* Como además $L(e) = 0$ concluimos que $u(x) = v(x)$ para todo $x \in G$.

Esto corresponde a que $\prec$ sea un orden estricto representable a través de la función de utilidad aditiva $u = v$.

La relación de indiferencia $\sim$ asociada resulta ser de equivalencia, y compatible con la estructura algebraica en el sentido de que al conjunto cociente $\frac{G}{\sim}$ le podemos dotar de una estructutra natural de grupo totalmente ordenado invariante por traslaciones y aditivamente representable. Esto nos remite al Teorema 7, luego tal cociente habrá de ser *arquimediano.*

NOTAS 5:

i) En Candeal et al. (1996) se llega al mismo resultado con técnicas muy diferentes *basadas en ecuaciones funcionales.* Se parte de una aplicación bivariante $F : G \times G \longrightarrow \mathbb{R}$ que sea solución de la ecuación de la separabilidad y que represente al orden-intervalo $\prec$ en la forma habitual $(x \preceq y \iff F(x,y) \geq 0 \quad (x,y \in G))$ y tal que además dé lugar a que las funciones u,v asociadas satisfagan las condiciones de homomorfismo antes expuestas. Se prueba que en estas circunstancias F será solución de la ecuación funcional de Sincov, con lo que representará a un preorden total $(\preceq)$.

ii) *El resultado es aún más general. Se extiende al caso de un semigrupo $(S,+)$ dotado de un orden-intervalo $\prec$ compatible (invariante por traslaciones), y representable a través de dos funciones $u,v : S \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que*

$$u(x) \leq v(x); \quad u(x+y) = u(x)+u(y); \quad v(x+y) = v(x)+v(y)$$

$$x \prec y \iff v(x) < u(y) \quad (x, y \in S).$$

En efecto, resulta que dados $a, b \in S$ con $a \prec b$ se obtiene por la invariancia por traslaciones que $a + n \cdot a \prec b + n \cdot a$. Así $v(a+n \cdot a) < u(b+n \cdot a)$. Por las condiciones de homomorfismo deducimos que $v(a) + n \cdot v(a) < u(b) + n \cdot u(a) \Longrightarrow n \cdot (v(a) - u(a)) < u(b) - v(a)$. Al ocurrir esto para todo $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$ y ser $v(a) - u(a) \geq 0$, concluimos que $u(a) = v(a)$. De análoga forma se llega a que $u(b) = v(b)$. Así, para la relación binaria $\prec$ tenemos que $a \prec b \iff u(a) < u(b) \quad (a, b \in S)$. De esta manera, u sería función de utilidad aditiva, y $\prec$ sería un orden estricto. En este caso, la relación de indiferencia asociada $\sim$ es de equivalencia, y pasando al cociente obtendremos un semigrupo totalmente ordenado y aditivamente representable, algo que quedó caracterizado en el Teorema 8.

iii) En el caso de un *semiorden* $\prec$ definido sobre un semigrupo $(S, +)$ invariante por traslaciones y representable a través de una pareja de funciones $u, v : X \longrightarrow \mathbb{R}$ cumpliendo la condición de homomorfismo y tales que existe una constante $k \geq 0$ con $v(x) = u(x) + k \quad (x \in S)$ podemos ver más fácilmente aún que se trata de un *orden estricto*. En efecto, dado $x \in S$ cualquiera se tiene que $u(x+x)+k = v(x+x) = v(x)+v(x) = (u(x)+k)+(u(x)+k) = u(x)+u(x)+2k = u(x+x)+2k$, luego $k = 2k \Longrightarrow k = 0$. Así $u = v$ y estamos ante un orden estricto aditivamente representable.

Terminamos esta sección con un nuevo problema abierto.

PROBLEMA ABIERTO 4. : Queda como problema abierto la caracterización de semigrupos $(S, +)$ dotados de un orden-intervalo $\prec$ que sean representables a través de un par de funciones $u, v : S \longrightarrow \mathbb{R}$ en la forma $u(x) \leq v(x)$; $x \prec y \iff v(x) < u(y) \quad (x, y \in X)$ y que sean además aditivas ($u(x + y) = u(x) + u(y)$; $v(x + y) = v(x) + v(y) \quad (x, y \in X)$).

NOTAS 6:

i) Obsérvese que, en virtud de la nota 5 ii), no decimos ya que el semigrupo $(S, +)$ sea invariante por traslaciones al considerar sobre él el orden-intervalo $\prec$. Un *ejemplo* de tal tipo lo constituye $(0, +\infty)$ con la adición usual $+$ y la estructura de orden-intervalo proporcionada por la relación binaria $\prec$ dada por $x \prec y \iff 3x < 2y$. Es claro que *no es invariante por tralaciones* puesto que $1 \prec 2$ pero $\neg(1 + 2 \prec 2 + 2)$.

ii) Se dice que un semigrupo $(S,+)$ dotado de un orden-intervalo $\prec$ es *resoluble* si dado $x \prec y$ existe $z \in S$ tal que $x+z=y$, y que es *positivo* si ocurre que $x \prec x+x \quad (x \in X)$. Se sabe que en el caso particular en que $\prec$ es un orden estricto invariante por traslaciones sobre un semigrupo positivo $(S,+)$ entonces S resulta ser el cono positivo de un grupo G, y la ordenación $\prec$ se extiende de manera natural a los elementos del cono negativo de G, y de manera que si $(S,+,\prec)$ es representable por una función de utilidad aditiva, también lo es $(G,+,\prec)$. En consecuencia, si encontramos un orden-intervalo $\prec$ definido sobre un semigrupo positivo y resoluble, y representable por funciones u, v que satisfagan las condiciones de homomorfismo, ocurre que o bien $\prec$ es un orden estricto, o bien S no es el cono positivo de ningún grupo, o si lo es $\prec$ ya no se extiende a todo ese grupo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alimov, N. G. : "On ordered semigroups". (En ruso) . Izvestia Akad. Nauk. SSSR. Math. Ser. 14, 569-576. (1950).

Armstrong, W. E. : "A note on the theory of consumer's behavior". Oxford Economic Papers 2, 119-122. (1950).

Birkhoff, G. : "Lattice theory". American Mathematical Society. Providence, R.I. 1940.

Birkhoff, G. : "Lattice theory (Third edition)". American Mathematical Society. Providence, R.I. 1967.

Bogart, K. P. : "An obvious proof of Fishburn's interval order theorem". Discrete Mathematics 118, 239-242. (1993).

Bosi, G. y R. Isler: "Representing preferences with nontransitive indifference by a single real-valued function". Journal of Mathematical Economics 24, 621-631. (1995).

Bowen, R. : "A new proof of a theorem in utility theory". International Economic Review 9 (3), 374. (1968).

Bridges, D. S. : "Numerical representation of intransitive preferences on a countable set". Journal of Economic Theory 30, 213-217. (1983).

Bridges, D. S. : "Representing interval orders by a single real-valued function". Journal of Economic Theory 36, 149-155. (1985).

Bridges, D. S. : "Numerical representation of interval orders on a topological space". Journal of Economic Theory 38, 160-166. (1986).

Bridges, D. S. y G. B. Mehta : "Representations of preference orderings". Springer-Verlag. Berlin. 1995.

Candeal, J. C. y E. Induráin : "Sobre caracterizaciones topológicas de la representabi–lidad de cadenas mediante funciones de utilidad". Revista Española de Economía 7 (2), 235-244. (1990).

Candeal, J. C. y E. Induráin : "Utility functions on chains". Journal of Mathematical Economics 22, 161-168. (1993).

Candeal, J. C. , Induráin, E. y E. Olóriz : "Aplicaciones bivariantes que representan semigrupos ordenados". Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid (Matemáticas) 90 (3), 157-170. (1996).

Castillo, E. y R. Ruiz : "Ecuaciones funcionales y modelización en Ciencia, Ingeniería y Economía". Reverté. Barcelona. 1993.

Chateauneuf, A. : "Continuous representation of a preference relation on a connected topological space". Journal of Mathematical Economics 16, 139-146. (1987).

De Miguel, J. R. , Candeal, J. C. y E. Induráin : "Archimedeaness and additive utility on totally ordered semigroups". Semigroup Forum 52, 335-347. (1996).

Debreu, G. : "Representation of a preference ordering by a numerical function", en *"Decission processes"*, pp. 159-166, editado por R. Thrall, C. Coombs y R. Davis. Wiley. New York. 1954.

Debreu, G. : "Theory of value". Wiley. New York. 1959.

Debreu, G. : "Continuous properties of Paretian utility". International Economic Review 5, 285-293. (1964).

Fishburn, P. C. : "Intransitive indifference with unequal indifference intervals". Journal of Mathematical Psychology 7, 144-149. (1970 a).

Fishburn, P. C. : "Intransitive indifference in preference theory: a survey". Operations Research 18 (2), 207-228. (1970 b).

Fishburn, P. C. : "Interval representations for interval orders and semiorders". Journal of Mathematical Psychology 10, 91-105. (1973).

Fishburn, P. C. : "Interval orders and interval graphs". John Wiley. New York. 1985.

Fuchs, L. : "Partially ordered algebraical systems". Addison Wesley. Reading, Massachusetts. 1963.

Gensemer, S. H. : "Continuous semiorder representations". Journal of Mathematical Economics 16, 275-289. (1987 a).

Gensemer, S. H. : "On relationships between numerical representations of interval orders and semiorders". Journal of Economic Theory 43, 157-169. (1987 b).

Hölder, O. : "Der Axiome der Quantität und die Lehre von Mass". Leipzig Ber. Math Phys. C1, 53, 1-64. (1901).

Jaffray, J. Y. : "Existence of a continuus utility function: an elementary proof". Econometrica 43 (5-6), 981-983. (1975).

Krantz, D. H.: "Extensive measurement in semiorders". Philosophy of Science 34, 348-362. (1967).

Luce, R. D. : "Semiorders and a theory of utility discrimination". Econometrica 24, 178-191. (1956).

Milgram, A. N. : "Partially ordered sets, separating systems and inductiveness", en *"Reports of a mathematical colloquium, second series, n. 1"*. University of Notre Dame. Notre Dame, IN. 1939.

Mittas, J. : "Interval orders based on arbitrary ordered sets". Discrete Mathematics 144, 75-95. (1995).

Oloriz, E. , Candeal, J. C. y E. Induráin : "Representability of interval orders". Journal of Economic Theory 78 (1), 219-227. (1998).

Rodríguez-Palmero, C. : "A representation of acyclic preferences". Economics Letters 54, 143-146. (1997).

Scott, D. : "Measurement structures and linear inequalities". Journal of Mathematical Psychology 1, 233-247. (1964).

Scott, D. y P. Suppes : "Foundational aspects of theories of measurement". Journal of Symbolic Logic 23, 113-128. (1958).

Subiza, B. : "Representaciones numéricas de preferencias cuasitransitivas y acíclicas". Tesis doctoral. Universidad de Alicante, Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. 1992.

Suppes, P. y J. L. Zinnes : "Basic measurement theory", en *"Handbook of Mathematical Psychology, Vol 1."*, editado por R. D. Luce, R. R. Bush y E. Galanter. Wiley. New York. 1963.

Tanguiane, A. S. (o Tangyan, A. S.) : "Representation of a weak ordering by a numerical function". Soviet Math. Doklady 37 (1), 222-225. (1988).

Tversky, A. : "Intransitivity of preferences". Psychological Review 76 (1), 31-48. (1969).