RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES CON EXCEL

Fº JAVIER PALENCIA GONZÁLEZ

jpalencia@cee.uned.es

UNED – Departamento Economía Aplicada Cuantitativa I

Pº Senda del Rey, 11. 28040 – Madrid

RESUMEN: En este artículo se va a tratar de encontrar aproximaciones, de tipo numérico y gráfico, a las soluciones de problemas de valor inicial (PVI) de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) mediante el uso de la hoja de cálculo Excel, la cual va a permitir realizarlo con cierta facilidad.

La aproximación a la solución se realiza de dos formas distintas: a) mediante la confección de una plantilla en Excel de un método numérico; b) mediante la programación en VBA de un procedimiento que calcule el método numérico en cuestión. En el primer caso se van a ir creando una serie de hojas para cada uno de los métodos en estudio, en las cuales se introducirán las fórmulas de los métodos numéricos: Euler, Taylor, Runge-Kutta, etc. En el segundo caso se creará un programa en VBA que a partir de unos datos iniciales genere de forma automática la tabla de datos aproximados a la solución aplicando uno u otro método. En cualquiera de los dos casos, una vez obtenida la tabla de datos y mediante la inserción de gráficos XY, se podrá tener una aproximación gráfica a la solución.

Palabras claves: Excel, ecuaciones diferenciales, métodos numéricos, gráficos, Euler, Taylor, Heun, Runge-Kutta.

ABSTRACT: This article will try to find approximations, both of numerical and graphical type, to the solutions of initial value problems (IVP) of ordinary differential equations (ODE) by using the Excel spreadsheet, which will allow to do it with some ease.

The approximation to the solution is made in two ways: a) making a template of a numerical method in Excel, and b) programming in VBA the method in question. In the first case we will create a series of sheets for each of the methods under study, in which the formulas of the numerical methods will be introduced: Euler, Taylor, Runge-Kutta, etc. In the second case, it will be created a VBA program to automatically generate the data table solution from initial data using any method. In both cases, once the data table is generated you can obtain a graphical approach to the solution by the insertion of a XY graph.

Keywords: Excel, differential equations, numerical methods, graphics, Euler, Taylor, Heun, Runge-Kutta.

1. Introducción

Las ecuaciones diferenciales se utilizan para describir, representar o modelizar distintos tipos de sistemas: físicos, químicos, biológicos, económicos, etc… Se puede por tanto inferir, que alrededor nuestro existen multitud de ecuaciones diferenciales que nos pueden explicar el funcionamiento de estos sistemas.

Se recuerdan en primer lugar algunos conceptos respecto de las ecuaciones diferenciales.

Una ecuación diferencial, ED, es una ecuación que contiene las derivadas de una o más variables dependientes, con respecto a una o más variables independientes.

$$F(x, y, \ldots, f\left(x, y, \ldots\right), \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \ldots) = 0 \qquad (0.1)$$

dónde f es la variable dependiente que depende de x, y, … que son las variables independientes.

Si una ecuación contiene derivadas de una o más variables dependientes respecto a una sola variable independiente se dice que es una ecuación diferencial ordinaria, EDO, y en este caso se utiliza x como variable independiente e y como variable dependiente. Si una ecuación contiene las derivadas parciales de una o más variables dependientes respecto a dos o más variables independientes se dice que es una ecuación en derivadas parciales, EDP.

Se llama orden de una ecuación diferencial al orden de la derivada mayor que aparece en la ecuación. Luego si la derivada mayor que aparece en la ecuación es y', se dice que la ecuación diferencial es de primer orden, si es y'', se dice que es de segundo orden, y así sucesivamente. En este artículo se estudia la obtención de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

Se dice que una ecuación diferencial ordinaria está expresada en forma general o implícita cuando es de la forma $F(x, y, y', y'', ..., y^{n)}) = 0$, y se dice que una ecuación diferencial ordinaria está expresada en forma normal o explícita cuando es de la forma $y^{n)} = f(x, y, y', ..., y^{n-1)})$.

Una ecuación diferencial en forma normal o explícita es lineal cuando f es una función lineal de $y, y', ..., y^{n-1)}$, esto significa que una ecuación diferencial es lineal si se puede escribir de la forma:

$$a_n\left(x\right)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}\left(x\right)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1\left(x\right)\frac{dy}{dx} + a_n\left(x\right)y = g(x) \qquad (0.2)$$

con las propiedades siguientes:

- La variable dependiente y y todas sus derivadas $y',...,y^{n)}$ son de primer grado, es decir, la potencia de todo término donde aparece y es 1.
- Los coeficientes $a_0, a_1, ..., a_n$ correspondientes a $y, y', ..., y^{n)}$ dependen únicamente de la variable independiente, *x*.

Si en (0.2), $g(x) = 0$, entonces se dice que la ecuación diferencial es homogénea.

En determinadas ocasiones se pretende resolver ecuaciones diferenciales que satisfacen unas condiciones dadas, en particular se llama problema de valor inicial, PVI, a:

$$\begin{cases} y^{n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{n-1)}) \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ \dots,\ y^{n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases} \tag{0.3}$$

Los valores de *y*, y sus n-1 derivadas en el punto x_0, se llaman condiciones o valores iniciales.

2. Soluciones de ecuaciones diferenciales

Dada una función $y(x)$, que está definida en un determinado intervalo, que tiene al menos *n* derivadas continuas en el intervalo dado, y que al sustituirse en la ecuación diferencial ordinaria de orden *n* que se pretende resolver, reduce la ecuación a una identidad, se considera solución (o integral) de la ecuación diferencial en el intervalo.

La gráfica de la solución $y(x)$ de una EDO se llama curva solución o curva integral.

Si la solución $y(x)$ está expresada solamente en términos de la variable independiente *x*, y/o en términos de constantes, entonces se dice que la solución es explícita. Un caso particular es cuando la solución dada es idéntica a 0 en un determinado intervalo, entonces se llama solución trivial.

En un PVI, si *n*=1, se está buscando una solución de la ecuación diferencial en el intervalo de manera que la curva solución pase por el punto (x_0, y_0). Si *n*=2, se está buscando una solución de la ecuación diferencial en el intervalo de forma que la curva solución pase por el punto (x_0, y_0), y que la pendiente de la curva solución en ese punto sea y_1.

Encontrar soluciones a las ecuaciones diferenciales ordinarias no es tarea fácil en según qué casos, convirtiéndose en tarea compleja en algunos de ellos.

Si se tiene en cuenta su clasificación, se sabe que:

- para las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden, siempre puede encontrarse su solución exacta,
- para las ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales de primer orden, únicamente pueden resolverse algunos casos especiales (ecuación de Bernoulli, ecuaciones exactas, ecuaciones separables, ecuaciones homogéneas, etc…),
- para las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de orden 2 o superior, se puede hallar una solución, bien exacta o bien mediante serie de potencias,
- para las ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales de orden 2 o superior no existen métodos generales para llegar a una solución.

La opción resultante en los casos en que no se llega a obtener la solución exacta es analizar la ecuación bien de forma cualitativa, a través de los campos de direcciones, los puntos críticos y los diagramas de fase, o bien obtener soluciones cuantitativas, mediante la aplicación de métodos numéricos: Euler, Taylor, Runge-Kutta, etc...

La aplicación de hoja de cálculo Excel va a permitir obtener soluciones aproximadas a la solución real de forma cuantitativa, es decir, obtener la solución en determinados puntos de la ecuación diferencial de forma relativamente sencilla mediante el uso de diversos métodos numéricos, tal y como se expone a continuación.

La aplicación Excel va a permitir igualmente obtener la curva solución aproximada de la ecuación diferencial ordinaria que se esté estudiando.

3. Métodos numéricos

Se quiere hallar una aproximación a la solución de un problema de valor inicial de primer orden

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

y se calculará por varios métodos numéricos, en todos ellos la idea que subyace es ir hallando valores $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_k$, cercanos a los de la solución $y(x)$ en una serie de puntos $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k$ separados entre sí una distancia h fija, también llamado paso, es decir, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$, . . . , $x_k = x_0 + kh$.

3.1. *Método de Euler*

El más sencillo de los métodos es el de Euler, que consiste en aproximar la solución desconocida por su tangente conocida.

Como se conocen x_0 e y_0, se conoce también el valor de la pendiente de la tangente de la curva solución en x_0, $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ y se puede dibujar la recta tangente a la solución que pasa por el punto x_0.

Si el paso h es pequeño es de esperar que el valor de la solución en el punto x_1, $y(x_1) = y(x_0 + h)$, sea próximo al valor de la recta tangente en ese mismo punto:

$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$.

Como el par (x_1, y_1) se parece al desconocido $(x_1, y(x_1))$ se puede aproximar la solución $y(x_2)$ por el valor y_2 que se obtiene a partir del punto (x_1, y_1) de la misma forma que se obtuvo la solución y_1 a partir del punto (x_0, y_0) inicial. Prosiguiendo así se van obteniendo las soluciones y_k aproximadas (más inexactas según se alejan de x_0), las cuales vienen dadas por:

$$y_{k+1} = y_k + h\ f(x_k, y_k) \tag{2.2}$$

Puesto que el PVI está planteado para ser resuelto en un cierto intervalo $[a,b] = [x_0, x_k]$, se divide el intervalo en *m* subintervalos de forma que $h = \frac{b-a}{m}$, y por tanto $x_n = a + nh$, para *n*=0,1, …,*m*.

Se muestra a continuación una aplicación práctica de este método.

Ejemplo 1.- Dado el PVI: $\begin{cases} y'(x) = 0.1\sqrt{y} + 0.4x^2 \\ y(2) = 4 \end{cases}$. Resolver y dibujar la solución para $2 \le x \le 3$.

Solución.-

Para hallar la aproximación a la solución, se debe especificar el paso, *h*, que se va a utilizar y luego se halla la sucesión de puntos $x_0, x_1, ..., x_k$, para una vez que se hayan hallado, calcular los valores de la función solución en cada uno de sus puntos de acuerdo a la fórmula (2.2).

Tal y como explicita el problema $a = 2$, y $b = 3$. Por tanto se debe elegir un número determinado de subintervalos *m* tal que especifique el paso a utilizar, *h*. Si se elige *m*=5, entonces *h*=0.2

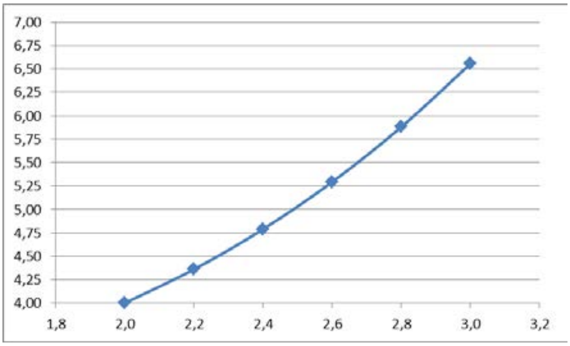
Ahora se genera la tabla de datos en Excel, tabla 1, para ello en la celda A1, se introduce "*h*" y en la celda B1, el correspondiente valor de *h*, en este caso 0,2. Seguidamente se le da nombre a este celda como "h", de esta forma se podrá utilizar la variable *h* en las fórmulas. En la segunda fila se ponen los nombres de las columnas, en nuestro caso *x* e *y*; en la tercera fila se introducen el valor de x_0, en la columna de las *x* y el valor de y_0 en la columna de las *y*; en la cuarta fila se rellena la columna de las *x*, mediante la fórmula "=A3+h", de esta forma se va incrementando el valor de las *x* con el valor de *h*, de forma que se obtengan los distintos valores de x_n, y se rellena la columna de las *y* con la siguiente fórmula "=B3+h*(0.1*raiz(B3)+0.4*A3^2)" que se corresponde con la fórmula dada en (2.2) y sustituyendo la *f* por la ecuación diferencial del PVI; para las siguientes filas nos basta con arrastrar las fórmulas y de esa forma se rellena la tabla, obteniéndose los siguientes valores:

Tabla 1. Solución del PVI con el Método de Euler

h	0,2
x	*y*
2,00	4,00000000
2,20	4,36000000
2,40	4,78896123
2,60	5,29352862
2,80	5,88034396
3,00	6,55604280

Una vez obtenidos los datos se puede generar la curva solución, figura 1, con un gráfico XY.

Figura 1. Curva solución del PVI, Método Euler, *h*=0,2



Hallada la primera aproximación, se mejora la misma disminuyendo el valor de h.

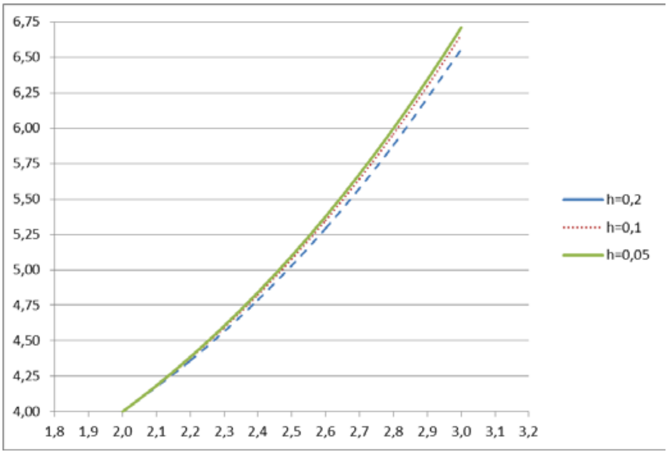
Tabla 2. Solución con el Método de Euler

h	0,20	0,1	0,05
x	*y*	*y*	*y*
2,00	4,00000000	4,00000000	4,00000000
2,05			4,09000000
2,10		4,18000000	4,18416187
2,15			4,28258949
2,20	4,36000000	4,37684505	4,38538670
2,25			4,49265735
2,30		4,59136596	4,60450530
2,35			4,72103435
2,40	4,78896123	4,82439343	4,84234832
2,45			4,96855099

2,50		5,07675793	5,09974612
2,55			5,23603742
2,60	5,29352862	5,34928960	5,37752862
2,65			5,52432337
2,70		5,64281813	5,67652531
2,75			5,83423804
2,80	5,88034396	5,95817274	5,99756512
2,85			6,16661008
2,90		6,29618211	6,34147641
2,95			6,52226756
3,00	6,55604280	6,65767431	6,70908692

Para terminar el ejemplo, se muestra una gráfica dónde se recogen las tres aproximaciones de la curva solución halladas, figura 2.

Figura 2. Curva solución del PVI, Método Euler



3.2. *Método de Euler mejorado.*

Una vez que se ha visto en el punto anterior como hallar la solución aproximada en un punto para un PVI, en esta subsección y en las siguientes se irán mostrando otros métodos que irán refinando los resultados.

El Método de Euler mejorado consiste en elegir en cada paso en vez de la pendiente en un extremo como se hacía en el Método de Euler, el valor medio de las pendientes asociadas a los dos extremos, el de partida y el previsto por el Método de Euler.

$$y^*_{k+1} = y_k + hf\left(x_k, y_k\right) \tag{2.3}$$

$$y_{k+1} = y_k + h\frac{f\left(x_k, y_k\right) + f\left(x_{k+1}, y^*_{k+1}\right)}{2} \tag{2.4}$$

Este método es un método de predicción y corrección, así el valor de y^*_{k+1} calculado en (2.3), predice un valor de y_k, mientras que el valor de y_{k+1} calculado en (2.4) corrige al anterior para obtener el valor buscado definitivo.

Ejemplo 2.- Dado el $\begin{cases} y'(x) = 0.1\sqrt{y} + 0.4x^2 \\ y(2) = 4 \end{cases}$ PVI: .

Resolver y dibujar la solución para $2 \le x \le 3$ con el Método de Euler mejorado.

Solución.-

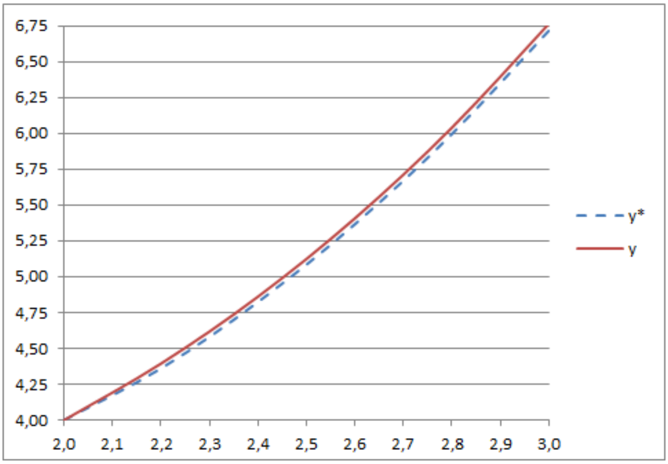
De forma análoga a como se hizo en el ejemplo 1, en una primera aproximación se toma *h*=0,2 y se genera la tabla de datos en Excel, tabla 3, para ello una vez introducidos los distintos valores de x_n, seguidamente se calcula el valor de y_1^* a partir de la fórmula (2.3), introduciendo en la hoja de cálculo la fórmula "=C3+h*(0,1*raíz(C3)+0,4*A3^2", de forma que se pueda corregir este valor mediante la fórmula (2.4) obteniendo el valor y_1 al introducir en la columna la fórmula "=C3+h/2*((0,1*raíz(C3)+0,4*A3^2)+(0,1*raíz(B4)+0,4*A4^2))". Luego se dibuja la gráfica con el valor de predicción y el corregido, figura 3.Repitiendo el proceso para *h*=0,1 y *h*=0,05 se obtiene:

Tabla 3. Solución con el Método de Euler mejorado, *h*=0,2

h	0,20		0,1		0,05	
x	*y**	*y*	*y**	*y*	*y**	*y*
2,00		4,00000000		4,00000000	0,00000000	4,00000000
2,05					4,09000000	4,09208094
2,10			4,18000000	4,18842252	4,18624538	4,18837824
2,15					4,28681100	4,28899578
2,20	4,36000000	4,39448061	4,38528816	4,39412588	4,39180072	4,39403740
2,25					4,50131838	4,50360697
2,30			4,60868805	4,61794089	4,61546782	4,61780831
2,35					4,73435285	4,73674522
2,40	4,82360665	4,86140634	4,85103029	4,86069812	4,85807725	4,86052150
2,45					4,98674479	4,98924090
2,50			5,11314511	5,12322775	5,12045921	5,12300716

2,55					5,25932419	5,26192398
2,60	5,36630353	5,40742022	5,39586230	5,40635952	5,40344342	5,40609503
2,65					5,55292053	5,55562394
2,70			5,70001110	5,71092266	5,70785913	5,71061431
2,75					5,86836276	5,87116971
2,80	5,99472794	6,03915821	6,02642019	6,03774581	6,03453496	6,03739366
2,85					6,20647921	6,20938964
2,90			6,37591763	6,38765701	6,38429896	6,38726109
2,95					6,56809761	6,57111143
3,00	6,71550761	6,76324721	6,74933083	6,76148366	6,75797852	6,76104400

Figura 3. Curva solución del PVI, Método Euler mejorado, *h*=0,2



3.3. *Método de Taylor de orden n*

En este método se va a aproximar la solución *y(x)* por el polinomio de Taylor de orden n. Como se sabe el polinomio de Taylor es:

$$y(x) = y(x_0) + y'(x)(x-x_0) + \frac{1}{2!} y''(x)(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} y^{n)}(x)(x-x_0)^n + R_n(x) \tag{2.5}$$

donde se llama resto o error asociado al polinomio a

$$R_n(x) = \frac{y^{n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \tag{2.6}$$

Como los puntos x_k están equiespaciados, se tiene que $h = x_{k+1} - x_k$, y truncando el resto, se puede escribir (2.5) de la forma que sigue:

$$y_{k+1} = y(x_k) + y'(x_k)h + \frac{1}{2!}y''(x_k)h^2 + \cdots + \frac{1}{n!}y^{n)}(x_k)h^n \qquad (2.7)$$

Pudiendo por tanto calcular para cada x_k el valor de la solución *y*. Si el orden del método es 1 se está en el Método de Euler descrito anteriormente.

3.3.1. Método de Taylor de orden 2

Se busca la solución al PVI mediante una aproximación al polinomio de Taylor de orden 2, por tanto los puntos aproximados responderán a la ecuación:

$$y_{k+1} = y(x_k) + y'(x_k)h + \frac{1}{2!}y''(x_k)h^2 \qquad (2.8)$$

Ejemplo 3.- Dado el PVI: $y'(x) = 0,2xy$; $y(1) = 1$, hallar la solución para $1 \le x \le 2$ mediante el Método de Taylor de orden 2 con paso *h*=0,1.

Solución.-

Para resolver el PVI, en primer lugar se tiene que hallar la expresión de $y''(x)$, la cual se halla derivando a partir de la expresión de $y'(x)$ dada en el PVI, obteniéndose en este caso:

$$y''(x) = 0,2y + 0,2xy' = 0,2y + 0,04x^2y \qquad (2.9)$$

Una vez hallada la expresión de $y''(x)$, se especifica el valor del paso, *h*, y seguidamente se procede a generar la tabla de datos en Excel, tabla 4, de forma análoga a como se ha hecho en los ejemplos anteriormente resueltos.

Se utilizan dos columnas auxiliares para calcular y' e y''. En la columna de y' se introduce la fórmula “=0,2*A3*B3”, y en la de y'' la fórmula “=0,2*B3+0,04*A3^2*B3”. Finalmente en la siguiente fila, en la columna de las *y* se introduce la siguiente expresión “=B3+h*C3+h^2/2*D3”. Se rellenan el resto de filas de la tabla y se obtienen los siguientes datos:

Tabla 4. Solución con el Método de Taylor de orden 2

h	0,1		
x	*y*	*y'*	*y''*
1,00	1,00000000	0,20000000	0,24000000
1,10	1,02120000	0,22466400	0,25366608
1,20	1,04493473	0,25078434	0,26917519
1,30	1,07135904	0,27855335	0,28669568
1,40	1,10064785	0,30818140	0,30642036
1,50	1,13299809	0,33989943	0,32856945
1,60	1,16863089	0,37396188	0,35339398
1,70	1,20779404	0,41064997	0,38117980
1,80	1,25076494	0,45027538	0,41225212
1,90	1,29785374	0,49318442	0,44698083
2,00	1,34940708		

3.3.2. Método de Taylor de orden 3

Se busca la solución al PVI mediante una aproximación al polinomio de Taylor de orden 3, por tanto los puntos aproximados responderán a la ecuación:

$$y_{k+1} = y(x_k) + y'(x_k)h + \frac{1}{2!}y''(x_k)h^2 + \frac{1}{3!}y'''(x_k)h^3 \qquad (2.10)$$

Ejemplo 4.- Dado el PVI: $y'(x) = 0,2xy$; $y(1) = 1$, hallar la solución para $1 \le x \le 2$ mediante el Método de Taylor de orden 3 con paso *h*=0,05.

Solución.-

Para resolver el PVI, en primer lugar se tiene que hallar la expresión de $y''(x)$, e $y'''(x)$, las cuales se hallan derivando a partir de la expresión de $y'(x)$ dada en el PVI, obteniéndose en este caso:

$$y''(x) = 0,2y + 0,2xy' = 0,2y + 0,04x^2y \qquad (2.11)$$

$$y'''(x) = 0,2y' + 0,08xy + 0,04x^2y' = 0,12xy + 0,008x^3y \qquad (2.12)$$

Una vez halladas las expresiones de la segunda y la tercera derivada, se especifica el valor del paso, *h*, y seguidamente se procede a generar la tabla de datos en Excel, tabla 5, de forma análoga a como se ha hecho en los ejemplos anteriormente resueltos.

Se utilizan tres columnas auxiliares para calcular y', y'' e y'''. En la columna y' se introduce la fórmula "=0,2*A3*B3"; en la columna y'' la fórmula "=0,2*B3+0,04*A3^2*B3" y en la columna y''' se introduce la fórmula "=0,12*A3*B3+0,008*A3^3*B3". Finalmente en la siguiente fila en la columna de las *y* se introduce la siguiente expresión "=B3+h*C3+h^2/2*D3+h^3/FACT(3)*E3". Se rellenan el resto de filas de la tabla y se obtienen los siguientes datos:

Tabla 5. Solución con el Método de Taylor de orden 3

h	0,05			
x	y	y'	y''	y'''
1,00	1,00000000	0,20000000	0,24000000	0,12800000
1,05	1,01030267	0,21216356	0,24661488	0,13665455
1,10	1,02122196	0,22466883	0,25367153	0,14567527
1,15	1,03277553	0,23753837	0,26118893	0,15508880
1,20	1,04498216	0,25079572	0,26918740	0,16492326
1,25	1,05786187	0,26446547	0,27768874	0,17520837
1,30	1,07143590	0,27857333	0,28671625	0,18597556
1,35	1,08572684	0,29314625	0,29629485	0,19725811
1,40	1,10075863	0,30821242	0,30645120	0,20909130
1,45	1,11655667	0,32380143	0,31721375	0,22151256
1,50	1,13314787	0,33994436	0,32861288	0,23456161
1,55	1,15056074	0,35667383	0,34068104	0,24828065
1,60	1,16882546	0,37402415	0,35345282	0,26271456
1,65	1,18797396	0,39203141	0,36696516	0,27791106
1,70	1,20804002	0,41073361	0,38125743	0,29392097
1,75	1,22905940	0,43017079	0,39637166	0,31079840
1,80	1,25106988	0,45038516	0,41235263	0,32860101
1,85	1,27411142	0,47142123	0,42924814	0,34739030
1,90	1,29822628	0,49332599	0,44710913	0,36723186
1,95	1,32345912	0,51614906	0,46598996	0,38819570
2,00	1,34985715			

3.3.3. Error cometido en la aproximación

En general, los valores aproximados obtenidos para y_k no son iguales a la solución real de la función evaluada en el punto x_k, $y(x_k)$. El error cometido en cada paso se llama error de truncamiento local o de discretización, es decir, suponiendo que y_k es preciso, y_{k+1} contiene error de truncamiento local, y viene dado por:

$$e(h) = y(x_k) - y_k \tag{2.13}$$

Se dice que el error cometido es de orden h^n, $O(h^n)$, si existe una constante K y un valor n positivo:

$$|e(h)| \leq Kh^n \tag{2.14}$$

Se ha supuesto que y_k es exacto, pero normalmente no lo es, así el error total al calcular y_{k+1} es una acumulación de errores dada en cada paso en que se ha calculado $y_1, y_2, \ldots, y_k$. A este error acumulado se le llama error de truncamiento global o error global. Se puede demostrar de forma general que si un método numérico de resolución de una ecuación diferencial tiene un error de truncamiento local $O(h^{n+1})$, el error de truncamiento global es $O(h^n)$. De acuerdo a (2.6), el método de Taylor de orden *n* tiene un error de truncamiento local $O(h^{n+1})$ y un error global $O(h^n)$. Como el método de Euler es un método de Taylor de orden 1, sus errores de truncamiento local y global son $O(h^2)$ y $O(h)$ respectivamente.

Tabla 6. Errores de la solución aproximada respecto de la solución exacta, *h*=0,2

y'	0,2*x*y	y=k*e^(0,1*x^2)	
h	0,2	k=1/(e^0,1)	
x	Taylor 3	RK-4	Solución Exacta
1,00	1,0000000000	1,0000000000	1,0000000000
1,20	1,0449706667	1,0449823522	1,0449823549
1,40	1,1007328428	1,1007590560	1,1007590640
1,60	1,1687815443	1,1688261847	1,1688262031
1,80	1,2510026269	1,2510709818	1,2510710194
2,00	1,3497595365	1,3498587354	1,3498588076
Error	0,0000992711	0,0000000722	

Tabla 7. Errores de la solución aproximada respecto de la solución exacta, *h*=0,1

y'	0,2*x*y	y=k*e^(0,1*x^2)	
h	0,1	k=1/(e^0,1)	
x	Taylor 3	RK-4	Solución Exacta
1,00	1,0000000000	1,0000000000	1,0000000000
1,10	1,0212213333	1,0212220516	1,0212220516
1,20	1,0449808388	1,0449823548	1,0449823549
1,30	1,0714338014	1,0714362089	1,0714362091
1,40	1,1007556545	1,1007590636	1,1007590640
1,50	1,1331439132	1,1331484524	1,1331484531
1,60	1,1688203827	1,1688262021	1,1688262031
1,70	1,2080336769	1,2080409510	1,2080409525
1,80	1,2510620857	1,2510710173	1,2510710194
1,90	1,2982168376	1,2982276624	1,2982276654
2,00	1,3498458116	1,3498588034	1,3498588076
Error	0,0000129959	0,0000000042	

Como se puede observar comparando los resultados de las tablas 6 y 7, y sabiendo que para el método de Taylor de orden 3 el error local es $O(h^4)$ y el error global es $O(h^3)$, esto implica que cuando el paso se reduce a la mitad el error se ha de reducir entre un factor aproximado de $h^3 = 2^3$, lo cual efectivamente se puede comprobar que ocurre si se calcula la relación que existe entre los errores cometidos:

$$\frac{0,0000992711}{0,0000129959} \approx 7,63$$

Análogamente y como se verá en la siguiente sección, en el Método de Runge-Kutta de orden 4 el error local es $O(h^5)$ y el error global es $O(h^4)$, esto implica que cuando el paso se reduce a la mitad el error se ha de reducir entre un factor aproximado de $h^4 = 2^4$, lo cual efectivamente se puede comprobar que ocurre si se calcula la relación que existe entre los errores cometidos para el citado método en las tablas 6 y 7:

$$\frac{0,0000000722}{0,0000000042} \approx 17,19$$

3.4. *Método de Runge-Kutta de orden n*

Se ha visto que el método de Taylor de orden *n*, tiene errores de truncamiento y globales de orden alto, lo cual aproxima bastante bien los valores obtenidos a la solución real, sin embargo tiene la desventaja de requerir en todo momento el cálculo y evaluación de la derivadas sucesivas de *f(x,y)*, lo cual es un procedimiento lento y complicado en gran número de ocasiones.

La idea es desarrollar fórmulas equivalentes a los polinomios de Taylor de orden *n* en las que no aparezcan las derivadas de *f*.

El desarrollo de estas fórmulas dio lugar al método de Runge-Kutta, en los cuales el orden de exactitud se va a ver incrementado por el empleo de métodos de integración de mayor orden, luego el resultado va a ser más exacto y los errores se reducirán con mayor rapidez al reducir el tamaño del paso, *h*. Cada método de Runge-Kutta posee un determinado número de etapas, que coincide con el número de evaluaciones de la función *f* necesarias para avanzar un paso *h*.

La idea es resolver (2.1) mediante integración, así se tiene que:

$$\int_{y_0}^{y} dy = \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))dx \Rightarrow y_{k+1} - y_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x))dx \quad (2.15)$$

por tanto ahora, se necesita calcular la integral del lado derecho, lo que se hará por alguno de los métodos numéricos de integración conocidos. Así se obtiene:

$$y_{k+1} = y_k + h\phi(x_n, y_n) \quad (2.16)$$

Siendo

$$\phi(x_n, y_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j K_j$$
$$K_1 = f(x_k, y_k) \tag{2.17}$$
$$K_j = f(x_k + ha_j, y_k + h\sum_{p=1}^{j-1} b_{jp} K_p),\ j = 2,3,...,k$$

Si k=1, se obtiene nuevamente el método de Euler.

3.4.1. Método de Runge-Kutta de orden 2

Por (2.16) y (2.17) se tiene que para orden n=2

$$y_{k+1} = y_k + h(c_1 K_1 + c_2 K_2) \tag{2.18}$$

donde

$$\begin{aligned} K_1 &= f(x_k, y_k) \\ K_2 &= f(x_k + ha_2, y_k + hb_{21} K_1) \end{aligned} \tag{2.19}$$

Por otro lado, si para aproximar la integral dada en (2.15) se utiliza el método de integración de los trapecios, es decir:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x))dx \approx \frac{1}{2} h(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})) \tag{2.20}$$

se tiene que para que la fórmula dada en (2.18) coincida con un Polinomio de Taylor de orden 2, debe cumplirse que:

$$c_1 + c_2 = 1; \quad a_2 c_2 = 1/2; \quad b_{21} c_2 = 1/2 \tag{2.21}$$

luego, se tiene un sistema de 3 ecuaciones con 4 incógnitas, lo cual da lugar a infinitas soluciones. En función de los valores que se vayan escogiendo se estará en uno u otro método.

Si $c_1 = c_2 = 1/2$ y $a_2 = b_{21} = 1$, se está en el caso del ya estudiado Método de Euler mejorado.

Si $c_1 = 1/4,\ c_2 = 3/4,\ a_2 = b_{21} = 2/3$, se está ante el Método de Heun:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{4} h\left[f(x_k, y_k) + 3f\left(x_k + \frac{2}{3}h, y_k + \frac{2}{3}hf(x_k, y_k) \right) \right] = y_k + \frac{1}{4} h(K_1 + 3K_2) \tag{2.22}$$

Ejemplo 5.- Dado el PVI: $y'(x) = 0,2xy$; $y(1) = 1$, hallar la solución para $1 \le x \le 2$ mediante el Método de Heun.

Solución.-

Para resolver el PVI, y una vez especificado el valor del paso, h, se procede a generar la tabla de datos en Excel, tabla 8, de forma análoga a como se ha hecho en los ejemplos anteriormente resueltos.

Se utilizan dos columnas auxiliares para calcular K_1 y K_2 que de acuerdo a (2.19) y a (2.22) valdrán:

$$K_1 = 0,2 * x_k * y_k$$
$$K_2 = 0,2 * (x_k + \tfrac{2}{3}h) * (y_k + \tfrac{2}{3}h * K_1)$$

luego, en las columnas se introducirán respectivamente las siguientes fórmulas "=0,2*A3*B3" y "=0,2*(A3+2/3*h)*(B3+2/3*h*C3). Finalmente en la siguiente fila en la columna de las *y* se introduce la siguiente expresión "=B3+h/4*(C3+3*D3)". Se rellenan el resto de filas de la tabla y se obtienen los siguientes datos:

Tabla 8. Solución con el Método de Runge-Kutta de orden 2 (Método de Heun)

h	0,1		
x	*y*	*K1*	*K2*
1,00	1,00000000	0,20000000	0,21617778
1,10	1,02121333	0,22466693	0,24177793
1,20	1,04496335	0,25079120	0,26895963
1,30	1,07140510	0,27856533	0,29792681
1,40	1,10071375	0,30819985	0,32890305
1,50	1,13308647	0,33992594	0,36213444
1,60	1,16874470	0,37399831	0,39789264
1,70	1,20793661	0,41069845	0,43647850
1,80	1,25093996	0,45033839	0,47822601
1,90	1,29806537	0,49326484	0,52350688
2,00	1,34966001	0,53986400	0,57273572

3.4.2. Método de Runge-Kutta de orden 3

En este caso la integración se hace por el método numérico de integración de Simpson y de las ecuaciones (2.16) y (2.17) se tiene que para *n*=3 se puede llegar a las siguientes expresiones dando ciertos valores a los parámetros

$$\begin{aligned} K_1 &= f(x_k, y_k) \\ K_2 &= f(x_k + \tfrac{1}{2}h, y_k + \tfrac{1}{2}hK_1) \\ K_3 &= f(x_k + h, y_k - hK_1 + 2hK_2) \end{aligned} \qquad (2.23)$$

y, por tanto:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}\left(K_1 + 4K_2 + K_3\right) \qquad (2.24)$$

Ejemplo 6.- Dado el PVI: $y'(x) = 0,2xy$; $y(1) = 1$, hallar la solución para $1 \le x \le 2$ mediante el Método de Runge-Kutta de orden 3.

Solución.-

Para resolver el PVI, y una vez especificado el valor del paso, h, se procede a generar la tabla de datos en Excel, tabla 9, de forma análoga a como se ha hecho en los ejemplos anteriormente resueltos.

Se utilizan tres columnas auxiliares para calcular K_1, K_2 y K_3 que de acuerdo a (2.23) y a (2.24) valdrán:

$$K_1 = 0,2 * x_k * y_k$$

$$K_2 = 0,2 * (x_k + \tfrac{1}{2}h) * (y_k + \tfrac{1}{2}h * K_1)$$

$$K_3 = 0,2 * (x_k + h) * (y_k - h * K_1 + 2 * h * K_2)$$

luego, en las columnas se introducirán respectivamente las siguientes fórmulas "=0,2*A3*B3", "=0,2*(A3+1/2*h)*(B3+1/2*h*C3)" y "=0,2*(A3+h)*(B3-h*C3+2*h*D3)". Finalmente en la siguiente fila en la columna de las *y* se introduce la siguiente expresión "=B3+h/6*(C3+4*D3+E3)". Se rellenan el resto de filas de la tabla y se obtienen los siguientes datos:

Tabla 9. Solución con el Método de Runge-Kutta de orden 3

h	0,1			
x	*y*	*K1*	*K2*	*K3*
1,00	1,00000000	0,20000000	0,21210000	0,22493240
1,10	1,02122221	0,22466889	0,23746480	0,25109959
1,20	1,04498267	0,25079584	0,26438061	0,27892259
1,30	1,07143668	0,27857354	0,29304865	0,30861294
1,40	1,10075970	0,30821272	0,32368940	0,34040289
1,50	1,13314925	0,33994478	0,35654541	0,37454843
1,60	1,16882717	0,37402469	0,39188437	0,41133253
1,70	1,20804208	0,41073431	0,43000258	0,45106890
1,80	1,25107231	0,45038603	0,47122889	0,49410620
1,90	1,29822910	0,49332706	0,51592923	0,54083290
2,00	1,34986038	0,53994415	0,56451161	0,59168268

3.4.3. Método de Runge-Kutta de orden 4 (RK4)

Este método es uno de los más usados, por su exactitud. Por (2.16) y (2.17) se tiene que para *n*=4, hay 11 ecuaciones y 13 incógnitas. Los conjuntos de valores más usados se corresponden con los métodos de integración 1/3 de Simpson, de donde resultan las siguientes expresiones,

$$\begin{aligned} K_1 &= f(x_k, y_k) \\ K_2 &= f(x_k + \tfrac{1}{2}h, y_k + \tfrac{1}{2}hK_1) \\ K_3 &= f(x_k + \tfrac{1}{2}h, y_k + \tfrac{1}{2}hK_2) \\ K_4 &= f(x_k + h, y_k + hK_3) \end{aligned} \tag{2.25}$$

y, por tanto:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}\left(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4\right) \tag{2.26}$$

y del método de integración 3/8 de Simpson, de donde resultan las siguientes expresiones,

$$\begin{aligned} K_1 &= f(x_k, y_k) \\ K_2 &= f(x_k + \tfrac{1}{3}h, y_k + \tfrac{1}{3}hK_1) \\ K_3 &= f(x_k + \tfrac{2}{3}h, y_k + \tfrac{1}{3}hK_1 + \tfrac{1}{3}hK_2) \\ K_4 &= f(x_k + h, y_k + hK_1 - hK_2 + hK_3) \end{aligned} \tag{2.27}$$

y, por tanto:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{8}\left(K_1 + 3K_2 + 3K_3 + K_4\right) \tag{2.28}$$

Ejemplo 7.- Dado el PVI: $y'(x) = 0,2xy$; $y(1) = 1$, hallar la solución para $1 \le x \le 2$ con el Método RK4.

Solución.-

Para resolver el PVI, conocido *h*, se genera la tabla de datos en Excel, tabla 10. Se utilizan cuatro columnas auxiliares para calcular K_1, K_2, K_3 y K_4 que de acuerdo a (2.27) y a (2.28) valdrán:

$$\begin{aligned} K_1 &= 0,2 * x_k * y_k \\ K_2 &= 0,2 * (x_k + \tfrac{1}{2}h) * (y_k + \tfrac{1}{2}h * K_1) \\ K_3 &= 0,2 * (x_k + \tfrac{1}{2}h) * (y_k + \tfrac{1}{2}h * K_2) \\ K_4 &= 0,2 * (x_k + h) * (y_k + h * K_3) \end{aligned}$$

luego, en las columnas se introducirán respectivamente las siguientes fórmulas "=0,2*A3*B3", "=0,2*(A3+1/2*h)*(B3+1/2*h*C3)", "=0,2*(A3+1/2*h)*(B3+1/2*h*D3)" y "=0,2*(A3+h)*(B3+h*E3)". Finalmente en la siguiente fila en la columna de las *y* se introduce la siguiente expresión "=B3+h/6*(C3+2*D3+2*E3+F3)". Se rellena el resto de la tabla y se obtienen los siguientes datos:

Tabla 10. Solución con el Método de Runge-Kutta de orden 4

h	0,1				
x	*y*	*K1*	*K2*	*K3*	*K4*
1,00	1,00000000	0,20000000	0,21210000	0,21222705	0,22466900
1,10	1,02122205	0,22466885	0,23746476	0,23761192	0,25079598
1,20	1,04498235	0,25079577	0,26438054	0,26455035	0,27857372
1,30	1,07143621	0,27857341	0,29304852	0,29324393	0,30821297
1,40	1,10075906	0,30821254	0,32368921	0,32391362	0,33994513
1,50	1,13314845	0,33994454	0,35654516	0,35680247	0,37402518
1,60	1,16882620	0,37402438	0,39188405	0,39217873	0,41073499
1,70	1,20804095	0,41073392	0,43000218	0,43033937	0,45038696
1,80	1,25107102	0,45038557	0,47122841	0,47161400	0,49332832
1,90	1,29822766	0,49332651	0,51592866	0,51636940	0,53994584
2,00	1,34985880	0,53994352	0,56451095	0,56501458	0,59067131

4. .Solución de ecuaciones diferenciales mediante VBA (Visual Basic for Applications)

En esta sección se va a implementar mediante VBA algunos de los métodos vistos para solucionar ecuaciones diferenciales, en particular se programan sencillos procedimientos para los Métodos de Euler, de Taylor de orden 3 y de Runge-Kutta de orden 4.

4.1. *Método de Euler*

Como se ha visto en este método se van obteniendo los puntos mediante la fórmula:

$$y_{k+1} = y_k + h\ f(x_k, y_k) \tag{3.1}$$

El programa va a leer los valores del PVI directamente de la hoja de cálculo, en particular se ha de conocer el valor del paso, *h*, que se introducirá en la celda B2, el valor de x_0 que estará en la primera fila de la tabla a generar, celda “A5”y el valor de y_0, que estará en la celda “B5”. Se necesitará también el valor de x_n en el que se quiere conocer la función solución, celda B3.

El código VBA del procedimiento Euler que soluciona el PVI dado en el Ejemplo 1, es:

```
Sub Euler()
' Halla la solución de un PVI mediante el Método de Euler
' Lee h, x0, y0 y xn
' Genera una tabla con los valores aproximados de la función y
' evaluada en los puntos x0, x1, ..., xn
```

```
' Fº Javier Palencia, 20-V-2013
    'Se asignan los valores conocidos a sus respectivas variables
    x0 = Range("A5").Value
    y0 = Range("B5").Value
    h = Range("B2").Value
    xn = Range("B3").Value
    'Se halla el número de subintervalos
    m = (xn - x0) / h
    'Se asignan los valores conocidos a las variables de trabajo
    xk = x0
    yk = y0
    For i = 1 To m
        'Se halla el valor de la solución en el siguiente punto
        yk = yk + h * (0.1 * Sqr(yk) + 0.4 * xk ^ 2)
        xk = xk + h
        'Se escriben los valores en la tabla
        Cells(5 + i, 1).Value = xk
        Cells(5 + i, 2).Value = yk
    Next i
End Sub
```

Se asigna el código a un botón y haciendo clic en el mismo se obtiene la tabla de resultados, tal y como se muestra en la figura 4.

	A	B	C	D
1	y'	0,1*raiz(y)+0,4*x^2		
2	h	0,2		
3	xn	3	Euler	
4	x	y		
5	2,00	4,00000000		
6	2,20	4,36000000		
7	2,40	4,78896123		
8	2,60	5,29352862		
9	2,80	5,88034396		
10	3,00	6,55604280		
11				
12				

Figura 4. Tabla generada mediante la macro Euler para el Ejemplo 1

Al implementar el procedimiento, se ha escrito específicamente la función que se está tratando, así se ha puesto en el código la línea:

```
yk = yk + h * (0.1 * Sqr(yk) + 0.4 * xk ^ 2)
```

4.2. *Método de Euler independiente del PVI*

Sería interesante que el código del procedimiento fuera independiente del PVI a solucionar, es decir que el procedimiento tome los distintos valores iniciales de la hoja de datos, inclusive la función que define la ecuación diferencial y devuelva la tabla generada.

Pues bien, esto se va a lograr haciendo unas pequeñas modificaciones en el código y en la hoja de entrada de datos.

Para que la función pueda ser evaluada, tienen que estar especificadas las variables que toman parte en la ecuación a evaluar en la hoja de cálculo, en el caso que nos ocupa *x* e *y*. Luego se ha de especificar mediante el administrador de nombres de Excel en que celda está “x” y en que celda se encuentra “y”. En nuestro caso, serán las celdas “A5”, y “B5”. Seguidamente se escribe la fórmula de la ecuación y se pone en la celda “B1”, es decir la celda ahora será “0.1*sqrt(y)+0.4*x^2”, y finalmente en el código del procedimiento se hace una llamada a la función “Evaluate”, de forma que en ese momento se evalúe la función con los valores actuales de *x* e *y*. El código sería de la siguiente forma:

```
Sub Euler_Eval()
' Halla la solución de un PVI mediante el Método de Euler
' Lee h, x0, y0 y xn
' Fº Javier Palencia, 20-V-2013
   'Se asignan los valores conocidos a sus respectivas variables
   x0 = Range("A5").Value
   y0 = Range("B5").Value
   h = Range("B2").Value
   xn = Range("B3").Value
   'Se asigna la función que define la ecuación
   f = Range("B1").Formula
   'Se halla el número de subintervalos
   m = (xn - x0) / h
   'Se asignan los valores conocidos a las variables de trabajo
   xk = x0
   yk = y0
   For i = 1 To m
      'Evaluamos la función, x e y están definidas en la hoja
      yk = yk + h * Evaluate(f & "+x*0")
      xk = xk + h
      'Se escriben los valores en la tabla
      Cells(5 + i, 1).Value = xk
      Cells(5 + i, 2).Value = yk
      'Se actualizan los valores de x e y para reevalar la función
      Cells(5, 1).Value = xk
      Cells(5, 2).Value = yk
```

```
    Next i
    'Se restablecen los valores iniciales en la tabla
    Cells(5, 1).Value = x0
    Cells(5, 2).Value = y0
End Sub
```

Se asigna el código a un botón y haciendo clic en el mismo se obtiene la tabla 11.a) de resultados. Para hallar los resultados de un nuevo PVI, el que se establece en el ejemplo 4, se cambia la ecuación a tratar en la celda “B1” que toma ahora la expresión “0.2*x*y”, y se establecen los valores iniciales y finales, así se establece el valor de x_0 en la celda “A5” que viene dado por el PVI y es 1, el valor de y_0 en la celda “B5” que vale también 1 y en la celda “B3” se establece el valor donde se quiere hallar la solución, es decir x_n, que viene dado por el problema y es 2. Ahora se vuelve a ejecutar el procedimiento, obteniéndose los datos de la tabla 11.b). Luego efectivamente el procedimiento programado es independiente del PVI a solucionar.

y'	0.1*sqrt(y)+0.4*x^2
h	0,2
xn	3
x	y
2,00	4,00000000
2,20	4,36000000
2,40	4,78896123
2,60	5,29352862
2,80	5,88034396
3,00	6,55604280

y'	0.2*x*y
h	0,2
xn	2
x	y
1,00	1,00000000
1,20	1,04000000
1,40	1,08992000
1,60	1,15095552
1,80	1,22461667
2,00	1,31278907

Tabla 11 a) b) . Resultados obtenidos para distintos PVI con el Método de Euler mediante la macro Euler_Eval

4.3. *Método de Taylor de orden 3*

Como se ha visto en este método se van obteniendo los puntos mediante la fórmula:

$$y_{k+1} = y(x_k) + y'(x_k)h + \frac{1}{2!}y''(x_k)h^2 + \frac{1}{3!}y'''(x_k)h^3 \qquad (3.2)$$

El programa va a leer los valores del PVI directamente de la hoja de cálculo, en particular se ha de conocer el valor del paso, *h*, que se introducirá en la celda B2, el valor de x_0 que estará en la primera fila de la tabla a generar, celda “A5”y el valor de y_0, que estará en la celda “B5”. Se necesitará también el valor de x_n en el que se quiere conocer la función solución, celda B3.

El código VBA del procedimiento Taylor_3 que soluciona el PVI dado en el

Ejemplo 4, es:

```
Sub Taylor_3()
' Halla la solución de un PVI mediante el Método de Taylor, orden 3
' Lee h, x0, y0 y xn
' Fº Javier Palencia, 20-V-2013
    'Se asignan los valores conocidos a sus respectivas variables
    x0 = Range("A5").Value
    y0 = Range("B5").Value
    h = Range("B2").Value
    xn = Range("B3").Value
    'Se halla el número de subintervalos
    m = (xn - x0) / h
    'Se asignan los valores conocidos a las variables de trabajo
    xk = x0
    yk = y0
    For i = 1 To m
        'Se calcula el valor de y'
        y1 = 0.2 * xk * yk
        'Se calcula el valor de y"
        y2 = 0.2 * yk + 0.004 * xk ^ 2 * yk
        'Se calcula el valor de y"'
        y3 = 0.12 * xk * yk + 0.008 * xk ^ 3 * yk
        'Se halla el valor de la solución en el siguiente punto
        yk = yk + y1 * h + 1 / 2 * y2 * h ^ 2 + 1 / 6 * y3 * h ^ 3
        xk = xk + h
        'Se escriben los valores en la tabla
        Cells(5 + i, 1).Value = xk
        Cells(5 + i, 2).Value = yk
    Next i
End Sub
```

Se asigna el código a un botón y haciendo clic se obtiene la tabla de la figura 5.

	A	B	C
1	y'	0,2*x*y	
2	h	0,1	
3	xn	2	Taylor3
4	x	y	
5	1,00	1,00000000	
6	1,10	1,02122133	
7	1,20	1,04498084	
8	1,30	1,07143380	
9	1,40	1,10075565	
10	1,50	1,13314391	
11	1,60	1,16882038	
12	1,70	1,20803368	
13	1,80	1,25106209	
14	1,90	1,29821684	
15	2,00	1,34984581	
16			
17			

Figura 5. Tabla generada mediante la macro Taylor_3 para el Ejemplo 4

4.4. *Método de Runge-Kutta de orden 4*

Como se ha visto en este método se van obteniendo los puntos mediante las fórmulas:

$$\begin{aligned} K_1 &= f(x_k, y_k) \\ K_2 &= f(x_k + \tfrac{1}{2}h, y_k + \tfrac{1}{2}hK_1) \\ K_3 &= f(x_k + \tfrac{1}{2}h, y_k + \tfrac{1}{2}hK_2) \\ K_4 &= f(x_k + h, y_k + hK_3) \end{aligned} \tag{3.3}$$

y, finalmente:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}\left(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4\right) \tag{3.4}$$

El programa funciona de forma análoga a los anteriores, si bien previamente al cálculo de y_k, va a ir obteniendo los valores de K_1, K_2, K_3 y K_4.

El código VBA del procedimiento RK_4 que soluciona el PVI dado en el Ejemplo 7, es:

```
Sub RK_4()
' Halla la solución de un PVI mediante el Método de Runge-Kutta 4
' Lee h, x0, y0 y xn
' Fº Javier Palencia, 20-V-2013
   'Se asignan los valores conocidos a sus respectivas variables
   x0 = Range("A5").Value
   y0 = Range("B5").Value
   h = Range("B2").Value
   xn = Range("B3").Value
   'Se halla el número de subintervalos
   m = (xn - x0) / h
   'Se asignan los valores conocidos a las variables de trabajo
   xk = x0
   yk = y0
   For i = 1 To m
      'Se calculan los valores auxiliares para cada etapa K1...K4
      K1 = 0.2 * xk * yk
      K2 = 0.2 * (xk + h / 2) * (yk + h / 2 * K1)
      K3 = 0.2 * (xk + h / 2) * (yk + h / 2 * K2)
      K4 = 0.2 * (xk + h) * (yk + h * K3)
      'Se halla el valor de la solución en el siguiente punto
      yk = yk + h / 6 * (K1 + 2 * K2 + 2 * K3 + K4)
      xk = xk + h
      'Se escriben los valores en la tabla
```

```
        Cells(5 + i, 1).Value = xk
        Cells(5 + i, 2).Value = yk
    Next i
End Sub
```

	A	B	C
1	y'	0,2*x*y	
2	h	0,1	
3	xn	2	RK-4
4	x	y	
5	1,00	1,00000000	
6	1,10	1,02122205	
7	1,20	1,04498235	
8	1,30	1,07143621	
9	1,40	1,10075906	
10	1,50	1,13314845	
11	1,60	1,16882620	
12	1,70	1,20804095	
13	1,80	1,25107102	
14	1,90	1,29822766	
15	2,00	1,34985880	
16			

Figura 6. Tabla generada mediante la macro RK-4 para el Ejemplo 7

5. Conclusiones

Se ha podido comprobar que mediante la hoja de cálculo Excel es extremadamente sencillo encontrar soluciones aproximadas tanto numéricas como gráficas para problemas de valor inicial de ecuaciones diferenciales ordinarias, a partir de las fórmulas de determinados métodos numéricos: Euler, Taylor, Runge-Kutta. El grado de exactitud de las aproximaciones obtenidas viene dado por los distintos métodos numéricos que se han utilizado.

Asimismo se ha mostrado que con una sencilla implementación en VBA, se pueden hallar también excelentes aproximaciones a las soluciones de los PVI. La programación se ha realizado de la forma más simple posible de forma que se pueda replicar fácilmente el programa para cualquier ecuación dentro de un PVI que sea planteado.

6. Referencias bibliográficas

1. M. Amelot, VBA Excel 2007, *Ediciones ENI*, (Barcelona, 2007)
2. J.J Bernal García, Aportaciones para la mejora de la presentación grafica de datos cuantitativos en Excel, Revista Rect@. Vol. 16: 41242-412, XVI Congreso ASEPUMA y IV Encuentro Internacional. (Cartagena, 2008).
3. J.J. Bernal García, Representación automática de funciones en Excel y su aplicación docente, Revista Rect@. Vol. 12, pp: 141 a 157. (2011)
4. R.L. Burden, J.D. Faires, Análisis numerico (7ª ed.), *Thomson Learning*, (México, 2002)
5. C. H. Edwards, D.E. Penney, Ecuaciones diferenciales (4ª ed), *Pearson Prentice-Hall*, (México, 2001)

6. C.F. Gerald, P.O. Wheatley, Análisis numerico con aplicaciones (6ª ed.), *Pearson Prentice-Hall*, (México, 2000)
7. J. H. Mathews, K.D. Fink, Métodos numéricos con Matlab (3ª ed.), *Pearson Prentice-Hall*, (Madrid, 2000).
8. Shoichiro Nakamura, Análisis numéricos y visualización gráfica con Matlab, *Pearson Prentice-Hall*, (México, 1997)
9. J. Walkenbach, Excel 2010. Los mejores trucos, Anaya multimedia, (Madrid, 2011)
10. J. Walkenbach, Excel 2010.Programación con VBA, Anaya Multimedia-Wiley (Madrid, 2011)
11. D.G, Zill, M.R. Cullen, Ecuaciones diferenciales con problemas de valor en la frontera (6ª ed), *Thomson Learning*, (México, 2006)