ALAN TURING, SU OBRA Y LOS EFECTOS SOBRE LA CALCULABILIDAD

MAGDALENA PRADILLA RUEDA[1]

Recibido: mayo de 2014 / Aceptado: junio de 2014

Resumen

Este artículo presenta una visión general de los temas de investigación de Alan Turing, centrado en los desarrollos y aportes a la *Teoría de la Calculabilidad*. Basándose en los lineamientos sobre el *problema de la decisión* (*Entscheindungs problem)* de D. Hilbert y con el fin de dar una respuesta a la pregunta: ¿la Axiomática formal cuenta con un método efectivo para decidir que una fórmula puede ser verdadera o falsa?, Turing responde con una negativa por medio de un método *mecanicista* llamado *la máquina de Turing,* que prueba la *indecidibilidad* de la Axiomática y presenta las bases de la *Calculabilidad,* y posteriormente la de la *Informática*.

Palabras clave: Alan Turing, calculabilidad, decidibilidad, informática, máquina de Turín.

Resumen

This article presents an overview of the subjects of research of Alan Turing, focused on the developments and contributions to the theory of calculability. Based on the guidelines on the issue of D. Hilbert's the problem decision (Entscheindungs problem) and in order to give an answer to the question: the axiomatic formal account with an effective method for deciding that a formula can be true or false?, Turing responds with a negative using the mechanistic method called the Turing machine, which tests the undecidability of the Axiomatica and presents the bases of the calculability and subsequently the computer.

Key words: Alan Turing, calculability, decidability, computer science, Turing machine.

1. Introducción

Alan Mathison Turing (1912-1954), matemático inglés, estudia en Cambridge (Inglaterra). A los 24 años, en una tentativa de describir matemáticamente la esencia del acto de calcular, a partir de este análisis, trata de reconstruir el funcionamiento del pensamiento. Así, Turing proyecta su sistema científico

1 Doctor en Informática y Matemáticas Aplicadas a Ciencias Sociales, Universidad de Grenoble (Francia), 1983. Doctor en Filosofía, Universidad París 1 - Panthéon Sorbonne, 2008. Actualmente docente investigadora de la Corporación Universitaria Republicana, Bogotá.

teniendo como horizonte la posibilidad de la reconstrucción mental y física del hombre, donde muestra su interés interdisciplinario entrelazando las matemáticas y lógica con la biología. Igualmente, investiga sobre los desarrollos en la Matemática, centrados tanto en el cálculo de probabilidades y estadísticas (curvas, y sus límites), en la distribución de los sistemas numéricos (paradoja entre la dimensión discreta y la continua y su aproximación numérica) como en la teoría de grupos, donde la *función* se torna en objeto de estudio por su solidez estructural entre esta y el dominio de resolución, en un grupo dado.

Así mismo, sus investigaciones se ven relacionadas con la descodificación de mensajes secretos, utilizando métodos probabilísticos novedosos que dan un impulso a la ciencia de la Criptología, donde reinventa, un método de *análisis secuencial* y el concepto de *Información.*

En *Lógica Matemática*, bajo los resultados de Gödel y los lineamientos del Programa de Hilbert plantea las bases de la decidibilidad, la calculabilidad y la construcción de los primeros computadores. En su investigación de 1936, sobre la indecidibilidad, precisa la noción de *cálculo efectivo,* a partir del concepto de *número calculable* y su aplicación al *problema de la decisión* que da las bases de la *Teoría de la Calculabilidad*, donde aclara la pregunta sobre los procesos necesarios para realizar cálculos, y allí va a definir la noción de función, de cálculo y como resultado el de *función calculable*, con la cual modifica profundamente las fronteras entre los dominios del saber y la manera de analizar y producir resultados.

2. Ejes de investigación de Turing

Turing se interesa en una serie de temas variados, siendo ya estudiante de colegio, lo que vaticina el desarrollo de aspectos preponderantes de interés científico. Sus obras más importantes, que reflejan estos intereses y que según J. Lassègue (1998, p. 17), al ponerlos en perspectiva, Turing construye su proyecto científico integral presentando la posibilidad de la reconstrucción física y mental del ser humano, lo que es valioso en un científico matemático.

De esta manera, sus obras síntesis son:

- "*On computable numbers with an application to the Entscheidungsproblem*". 1936: En esta obra funda la teoría lógica de la calculabilidad que se basa en el concepto de "máquina de Turing". El escrito plantea las bases teóricas de uno de los fenómenos científicos y técnicos más importantes de la segunda mitad del s. XX: la estructuración de la calculabilidad, que lleva a la constitución de la Informática teórica y la realización del computador.

- "*The chemical basis of morphogenesis*". 1952: Aquí, plantea las bases de una teoría general de la *morfogénesis* que tiene como objetivo presentar las diferentes formas existentes en la organización de los seres vivos. Esta teoría estudia las reacciones químicas en el seno del organismo por medio de una modelización matemática seguida de una simulación informática.

- "*Computing Machinery and Intelligence*". 1950. Establece la relación entre dos temas de investigación: lógica y biología, aparentemente lejanos, pero que Turing logra presentar de una forma coherente. Esta obra es más filosófica que matemática, propone el estudio de los procesos cognitivos y del lenguaje por simulación informática, base de lo que se llamaría, *Inteligencia Artificial*.

Anotaciones

Así, se puede decir que en el artículo de 1950, Turing establece un lazo científico entre los temas de los otros dos, lógica y biología. Se trata, en el caso de la biología, de determinar formalmente, las causas químicas responsables de la constitución de las formas biológicas, y en el caso del estudio del pensamiento, de presentar las causas del *pensamiento inteligente* de una manera formal. Estas tres investigaciones las realiza en un periodo de 20 años de 1935 a 1954.

Igualmente, su aporte base en el saber matemático es la articulación de investigaciones con importantes resultados, sobre temas diferentes, tales como:

- ***Matemáticas***, centradas en el cálculo de probabilidades y estadísticas, la teoría de números y la teoría de grupos.

- ***Lógica matemática***, que plantea las bases de la decidibilidad, la calculabilidad y la construcción de los primeros computadores, a partir de los aportes de los desarrollos en lógica.

- ***Criptología***, que comienza con descifrar los códigos de los mensajes alemanes y continúa hasta el desarrollo del computador.

2.1 Matemáticas

Cálculo de probabilidades

La noción de "curva normal" (*curva en campana* o *gaussiana*, que permite dar cuenta de las regularidades estadísticas y representa las variaciones de la función: $y = e^{-x^2}$). Es estudiada por Turing en 1933. Su interés se centra en el manejo metodológico de esta curva porque posee propiedades como la densidad, continuidad y simetría que la hacen de fácil manejo, como en el estudio de las distribuciones de muestras, las estimaciones e inclusive en las pruebas.

En ese sentido, el "teorema central del límite" es de gran importancia, porque en el caso del estudio de las regularidades que tocan los fenómenos naturales (como los de la física) la utilización de esta curva es menos directa, debido a que la ley que controla el comportamiento de esta *variable aleatoria*, es raramente normal cuando se le asocia al fenómeno en cuestión. El "teorema central de límite" permite aproximar la ley a la suma de *n* variables aleatorias independientes, integrando así, la ley normal a las ciencias de la naturaleza.

Como resultado de la investigación, Turing presenta una nueva demostración de este teorema, en febrero de 1934[2], la primera había sido mostrada en 1922 por el matemático alemán Lindeberg.

Teoría de Números

Los sistemas numéricos presentan un gran interés para Turing, profundizando particularmente en los números primos (indivisibles por ellos mismos y por uno) y en sus propiedades (números de cantidad infinita, que decrecen, es decir, que se presentan en menor cantidad, en tanto que los enteros crecen). La razón matemática que explica su distribución es un problema importante de la teoría de números, pero no existe una fórmula algebraica simple que permita enumerar todos los números primos o de enunciarlos a todos hasta un cierto límite. La importancia radica entonces, en su distribución media, es decir, en un grado de probabilidad donde se pueda encontrar un número primo entre los enteros en general[3]. De manera que, para Gauss, los números primos se espacean al mismo ritmo que el crecimiento de la función logarítmica (exactamente, el espacio entre dos números primos para *n* aumenta como el logaritmo natural de *n*).

Turing se interesa a la *paradoja* resultante de este planteamiento porque pone en relación la distribución de los números primos, que son entidades

2 "On the Gaussian error function"; en *Collected Works of* A.M. *Turing 1: Pure Mathematics,* Amsterdam, Elsevier Science Publishers, 1992; pp. xix-xx. Citado por Lassègue, 1998, p. 23.

3 Esta disminución de los números primos, había sido investigada por Gauss (siglo XVIII) que encontró el medio de describirla relacionando el aspecto inestable de su distribución y la función logarítmica, que se expresa como una relación entre la progresión geométrica de las potencias de un mismo elemento (por ejemplo, la cadena: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, …) y la progresión aritmética de sus potencias (en el ejemplo, 1=20, 2=21, 4=22, 8=23, …): medida aproximada y posible de una dimensión continua.

individuales, *discretas* y una función que permite la medida de una dimensión *continua* como la función logarítmica. Es un tema sobre aproximación numérica, tocando la relación entre el aspecto discreto de los números enteros y el aspecto continuo de los números reales. En este mismo sentido, a mitad del siglo XIX, *Riemann*[4] había demostrado que la distribución de números primos adoptaba una línea general de naturaleza logarítmica con un grado de error muy débil, cuya medida era la "Hipótesis de Riemann". El problema consistía en mostrar que una cierta función "zeta", no tomaba el valor cero sino para ciertos puntos que forman una línea recta en el plano compuesto. Sin embargo, la hipótesis según la cual los números primos debían escasearse según una medida relacionada a la función logarítmica, tenía tendencia a sobreestimar la cantidad de números primos.

Pero en Cambridge, por un lado, hacia los años 1910 y 1930, J. E. Littlewood había notado que existían puntos donde, contrariamente a lo que se había previsto, la hipótesis de la sobreestimación era falsa; por otro lado, en 1933, en Cambridge, igualmente, Skewes había mostrado que si la Hipótesis de Riemann era verdadera, debía existir un punto a partir del cual se operaba una subestimación del número extremadamente grande en cuestión[5].

De esta manera, Turing se confronta en 1939 a la Hipótesis de Riemann (Booker, 2006) y al problema de la sobreestimación de los números primos y evalúa numéricamente la función "*zeta*", para un cierto número de valores. Esta vez, Turing plantea un nuevo método "efectivo", es decir, una máquina de calcular porque los cálculos son demasiado grandes para realizarlos a mano[6].

Turing realiza varios intentos para calcular la función *efectivamente,* es decir, en diversas máquinas para calcular[7] y conduce así su cálculo a un valor de la

4 Riemann, en 1859, es nombrado profesor en Gottingen y en la Academia de Ciencias de Berlín, publica el artículo: "Sobre el número de los números primos inferiores a una talla dada". Aquí, él define la *función zeta*, retomando los trabajos de Euler y los extiende a los números complejos. Utiliza esta función con el objetivo de estudiar la repartición de los números primos. La hipótesis de Riemann sobre los ceros no-triviales de la función zeta, no se ha demostrado todavía y hace parte de los 23 famosos problemas de Hilbert, lo mismo que de los siete problemas del milenio.

5 El número en cuestión sería: 10 a la potencia 10, esta a la potencia 10 y esta a la potencia 14. (Hodges 1983, p. 135).

6 A la época, las máquinas de calcular son de dos tipos: a. máquinas digitales que operan sobre las marcas interpretadas por el ser humano como los números y que se limitan a las cuatro operaciones; b. máquinas analógicas que recrean un análogo físico, basadas sobre una medida de longitudes continuas, de la función matemática de calcular.

7 Primero, una máquina analógica realizada para predecir la altura de las mareas, luego en una máquina especializada en el cálculo de esta función y después de la guerra (junio 1950), cuando el computador que él había ayudado a crear en la Universidad de Manchester se vuelve entonces operacional para este tipo de cálculos.

función superior a 1540[8]. Con el estudio y realización de la función *zeta,* no solamente muestra un nuevo método para calcularla y definirla sino una estructura novedosa para máquina, necesaria tanto para la solución numérica del problema como para la necesidad *efectiva* requerida por la máquina. Considerada esta, como una de las primeras experiencias en la historia de las *máquinas* y de la *informática*.

Teoría de Grupos

El interés de Turing por la *Teoría de Grupos*, que no está focalizada hacia sus dos principales ejes de investigación (sistemas numéricos o efectividad del cálculo), radica en la noción de *función.* En esta teoría, la función se interpreta de manera proyectiva, previendo todas las permutaciones posibles de los valores que una función puede contener. Este estudio abstracto de permutaciones, en un grupo, se vuelve el objeto de estudio general porque va mas allá de los números como objetos privilegiados de investigación; por otro lado, desde el punto de vista de la interpretación numérica de la teoría, Turing plantea que la posibilidad de una resolución numérica de una ecuación no es absoluta sino relativa al dominio en la cual se considera[9].

La solidez estructural entre una función y el dominio de su resolución, dada en la *Teoría de Grupos*, influenciará el itinerario de Turing, por su riqueza de enseñanzas, así:

- La separación entre los números calculables y los no-calculables (1936), que responde a una pregunta estructural: la efectividad del cálculo y no propiamente la de la resolución de ecuaciones en aspectos particulares.

- La prolongación del interés que él tiene sobre la teoría de funciones y en este marco plantea los problemas específicos referidos a las aproximaciones de funciones, en los casos donde aquellas son necesarias.

8 En 1953, publica un nuevo artículo sobre el cálculo de la función *zeta*, donde recuerda que el último matemático que había calculado los valores de esta función, fue el británico E. C. Tichmarsh, en 1936 y que llegaba hasta el número 1468. El artículo: "Some calculations of the Zeta-function" en *Proc. London Mathematics Society (3) 3*, 1953, pp. 99-117.

9 Turing en *Teoría de Grupos* se interesa en mejorar técnicamente un resultado de von Neumann que toca las funciones cuasi-periódicas de un grupo, el va a mostrar la compacidad de un grupo de "unión conexa" cuando es aproximable, preguntándose: ¿en qué medida los grupos llamados "de unión" que son de naturaleza continua, podían ser aproximados por las estructuras discretas como son los grupos finitos? (Turing, 1935: "*Equivalence of left and right almost periodicity*". En: *J. London Mathematics Society 10.* pp. 284-285).

En 1935, generaliza las investigaciones del algebrista alemán Reinhold Baer sobre las extensiones de un grupo, es decir, sobre los dominios numéricos de resolución de ecuaciones (Turing 1938: "*The extensions of a group*"; en *Composition Mathematics. 5*, pp. 357-367).

· Las aplicaciones no directamente numéricas de la *Teoría de Grupos* que tocan ciertos aspectos que serían sus temas de interés hasta el final de la vida: la mecánica cuántica y la criptología. En mecánica cuántica, la noción de estado es caracterizada por la *Teoría de Grupos*, mientras que en criptología, permite definir rigurosamente la noción de permutación y de no-variabilidad de las permutaciones.

2.2. Lógica Matemática

Bajo los resultados de Gödel de 1931, en lógica matemática, sobre la decidibilidad y la completitud de los sistemas formales, Turing con su investigación de 1936, sobre la indecidibilidad, va a dilucidar la noción crucial de *cálculo efectivo,* a partir del concepto de *número calculable* y su aplicación al *Problema de la decisión (Entscheinsdung problem)* propuesto por D. Hilbert.

Así mismo, realiza una investigación doctoral en Princeton, 1938, a partir de la noción de la que llamaría Gödel: la *incompletitud* de todo sistema formal, investigación cuyo objeto era aclarar y mostrar la posibilidad de ir más allá del *límite interno* propio a cada sistema formal, el cual demuestra que es posible representar aritméticamente.

El desarrollo de esta investigación, la hace presentando una jerarquía de sistemas formales compuestos de proposiciones homogéneas en cuanto a su uso de conectores lógicos (es decir en cuanto al orden en el cual se colocan los conectores existenciales y los universales). En cada sistema formal, agrega una proposición que sea inabordable por el sistema formal de la etapa precedente e incluye igualmente, la proposición que representa la función *zeta* de Riemann[10]. Se trata, entonces, de estudiar la *completitud* parcial de cada etapa engendrada por el sistema formal, que puede ser extendida a toda la jerarquía.

Turing presenta un cambio en la metodología utilizada, porque estructura una jerarquía aritmética de grados de insolubilidad que es *relativa al sistema formal considerado.*

2.3 La Criptología[11]

Objetivos: asegurar la *confidencialidad,* garantizar la *autenticidad* y conservar la *integralidad* de informaciones o mensajes codificados o "encriptados"; lo

10 De esta manera, esta función queda clasificada aritméticamente según los grados de insolubilidad, resultado importante en el desarrollo de la función *zeta*.

11 Del griego κριπτοσ (esconder) y λογοσ (ciencia), "criptología" significa la ciencia del secreto y se propone esconder (encriptar o codificar) las informaciones de un mensaje.

que significa asegurar códigos secretos impenetrables. Esta ciencia nace desde la antigüedad, los hombres inventan sistemas manuales primero y luego se vuelven mecánicos, antes de la revolución electrónica, pero solamente se estructura como disciplina hacia la segunda decena del siglo XX.

En su concepción de la Criptología Turing, representa las leyes del universo por el sistema de codificación con el que se "encriptan" los mensajes y las claves de códigos por sus constantes. Esta concepción pone en relación el mundo abstracto de la lógica, estadísticas, probabilidades y máquinas y el mundo de la física; lo cual engloba todos los temas de su interés.

Este trabajo es realizado durante la segunda guerra, el cual no se conoce actualmente en su integralidad, pero se estima que "sin Turing, Inglaterra hubiera perdido la guerra". Se pueden distinguir dos periodos en su realización:

- El primer período fue esencialmente consagrado a la descodificación de los mensajes *encriptados* de la marina alemana[12]. Turing propone un método que hace uso del cálculo de probabilidades y de la lógica que consistía en la comparación estadística de las frecuencias en las configuraciones "hembras", reemplazando la búsqueda mecánica de reconocimiento de letras hembras por la búsqueda de las "opuestas" entre las letras repetidas de una palabra, que se supone están en el mensaje, y la repetición del mensaje codificado. Es decir, este método consistía no solamente en operar el reconocimiento mecánico de la repetición de palabras sino en tratar, por métodos lógicos mecánicos, de limitar la proliferación combinatoria, eliminando de entrada las posibilidades incompatibles entre ellas[13].

  Con este método Turing reinventa, de manera original, un método de análisis estadístico, el *análisis secuencial* y el concepto, prioritario en el siglo XX, que es el de *Información.*

12 Los estudios de *descodificación* habían comenzado antes de la segunda guerra por los poloneses, que constituían un grupo de matemáticos especialistas en *teoría de grupos* y en el idioma *alemán*, y un grupo de ingenieros idóneos en construir máquinas para descodificar. Su método llamado del "Reloj", se centraba en descubrir en los mensajes codificados, repeticiones de letras discernibles llamadas "hembras" (*samiczka* en polonés), búsqueda que se realizaba mecánicamente con la ayuda de máquinas electromecánicas nominadas "Bombas". La estructura de codificación de los alemanes por su máquina *Enigma* fue descubierta por el estudio de estas repeticiones, en su trabajo de conjunción inédita de la mecanización del mensaje y las competencias matemáticas y lingüísticas; lo cual lleva, igualmente, a una renovación completa de los métodos en Criptología. Después de la pérdida de Polonia, los investigadores poloneses van a Francia y luego a Inglaterra; momento en el cual los alemanes habían complicado sus codificaciones y el método del "Reloj" se vuelve ineficaz (Lassègue, 1998, pp.34-35).

13 Teóricamente, este método había sido propuesto por C.S. Pierce, como un método de Inferencia para la investigación, llamado *abducción*, al lado de los otros dos métodos: *inducción y deducción.*

- El *análisis secuencial*[14], entendido como une análisis estadístico donde la talla de la muestra no se fija con anterioridad. Por el contrario, los datos se evalúan a medida que se recolectan y la prueba llega a su fin, según una regla de parada predefinida, cuando los resultados significativos se presentan. De esta manera la conclusión del análisis puede ser presentada en un estadio primario relativo a aquel al que se llegaría a partir de pruebas de hipótesis o estimaciones más clásicas, con un costo financiero o humano inferior.

- La *Informacion*, noción sintética, transformada (codificada) producida para ser transmitida; fenómeno sobre el cual Norbert Wiener (1962), se había interesado, examinando las máquinas a calcular que eran capaces de imitar e inclusive de substituir el comportamiento humano. La característica principal de transmisión de máquinas y de humanos, era la de "patrón" (*pattern):* en tanto que "arreglo" o "vector", caracterizado por el orden de sus elementos y no por el contenido mismo de estos (dos modelos son iguales si sus relaciones de estructura se corresponden, en elementos y en orden (p. ej: la manera de contar); o en tanto que distribución temporal, como los mensajes que se intercambian en una conversación telefónica. Es así, que la manera de "medir" la información para hacer las transmisiones va a constituirse en una de sus características importantes. La medida de la información, para Wiener, depende de un principio parecido a aquel de la *entropía*[15], en donde un mensaje puede perder espontáneamente su orden pero no podría obtenerlo[16].

De esta manera, con la introduccion de la "medida" de informacion, el concepto de *información* va a referirse al "peso de la evidencia" de

14 El *Análisis Secuencial* fue concebido por A. Wald, estadístico americano, y G. A. Barnard, británico, para controlar la calidad de productos manufacturados. Para decidir si un lote de productos es de buena calidad o no, sin tener que revisar todos los productos, se tienen dos hipótesis: la una k (productos defectuosos) y la otra no-k (productos no-defectuosos), se prueban los productos y cada vez se recalcula la calidad del lote, sin fijar con anterioridad la talla de la muestra sometida a la prueba de calidad. Cada observación tiene tres acciones relativas a: k es verdad o no-k es verdad u ordenar otra prueba. Se trata de proseguir la prueba hasta un límite sin multiplicar excesivamente el número de pruebas, lo cual lleva a definir una regla de parada para la prueba. La escogencia de productos de la misma calidad puede asimilarse a la aceptación de la hipótesis que se refiere al significado de una palabra contenida en un mensaje, que es el concepto mismo de *Información*.

15 La mecánica estadística utilizaba nociones similares, que en la rama de la Física llevaba al "segundo principio de la termodinámica", la que afirma que un sistema puede perder espontáneamente el orden y la regularidad pero que no gana casi nunca (WIENER, Norbert, Ibid).

16 El estudio de los mensajes y en particular, de los mensajes de control, constituye el objeto de la "Cibernética", en la época de Wiener. Su nombre significa el arte de controlar o timonear, viene de la palabra griega *γοϖερνορ* "governor" (ingles) que designa el regulador de una máquina y se ha formado por la latinización de esta palabra griega.

los mensajes, que es netamente estadístico, con utilización posterior en probabilística, lo cual es importante para los métodos de descodificación que buscaba Turing. Su problema era conocer la probabilidad de realización de una hipotésis H dada *a priori* y de la información obtenida, que sería la *evidencia* E; por lo cual es posible revisar por medio de una regla (de Bayes, por ejemplo), la probabilidad buscada. De esta manera la característica de "peso" de información va a permitir conocer las medidas de probabilidad calculadas en términos de semejanzas. El nombre que da Turing a la unidad de medida de Informacion es *ban* y *deciban* cuyo significado es el de *más pequeño cambio perceptible por la intuición humana*[17].

- En el segundo período, provisto del concepto de información, Turing se centra en la puesta en funcionamiento de un sistema de codificación de la palabra, a partir de los estudios realizados por los ingenieros de los laboratorios Bell especializados en la tecnología electrónica, en particular Claude Shannon, uno de los fundadores de la *teoría de la información*[18], cuyo interés se centraba en la puesta en funcionamiento de máquinas susceptibles de codificar la palabra humana.

3. Aportes de Turing a la *Calculabilidad*

Con los intereses e investigaciones de Turing en Matemáticas, se puede decir que su perspectiva está ligada, la mayoría de los casos, a la *efectividad del cálculo*, es decir, no solamente desde el punto de vista del planteamiento de las problemáticas y de las posibilidades de resolución sino de las condiciones prácticas de su realización, razón por la cual estos desarrollos están ligados a la *lógica matemática*.

17 El nombre *ban* fue dado porque el proyecto sobre el cual trabajaba Turing se llamaba *banburism*, cuyas operaciones y cálculos se hacían sobre papel proveniente de la ciudad inglesa de Banbury. Estas unidades de medida fueron tomadas de la teoría acústica que utilizaba *bel y decibel*, y significan el logaritmo de base 10 de la relación entre dos intensidades sonoras. Posteriormente Shannon en su *Teoría de Información* las reemplaza por una noción binaria equivalente, el *bit*. (Lassègue, J. 1998, p. 37)

18 De manera general, la *teoría de la información* es una teoría de naturaleza estadística que mide "la cantidad de información provista por una operación dada". Además de Turing, se encuentran varios estudiosos de esta teoría, así: de un lado, la teoría de información de Kolmogorov, en general, que se pregunta si se puede deducir la "verdadera información", a partir de una cadena de *bits* (0, 1), y del otro lado, la teoría de la información de Shannon, más específica que la de Kolmogorov. Se ocupa de las distribuciones particulares probabilísticas de ciertos conjuntos de estas cadenas. Aquí, se utiliza la noción de Turing, porque la medida o el valor del contenido de la información se obtiene por medio de una cierta hipótesis de distribución probabilística de las letras de la cadena, semejante a las investigaciones realizadas por él.

3.1 Entorno Lógico-matemático

El impulso dado a finales del siglo XIX a la lógica está marcado por los *fundamentos de matemáticas*, debido, en gran parte a los descubrimientos de *Cantor*[19] que tocan la comparación de colecciones (1874) y el desarrollo de la teoría de conjuntos, cuya originalidad radica en la interpretación del concepto de *infinito*. Teoría, cuyo conjunto de *infinitos no-enumerables* presenta antinomias o *paradojas*[20], ampliadas también por la deficiencia de los sistemas de deducción de la lógica clásica. Esta presuntamente, utilizaba objetos no totalmente razonados en los dominios finitos y por ende la noción de *infinito*, requería una petición de principio, porque se servía de la extrapolación de los razonamientos del campo del finito (aparentemente válidos) al del infinito de la noción de *sucesión*. En el campo del Infinito se contaba con la diferenciación del infinito *potencial* y el *actual*[21], sabiendo que solo lo *finito* podía ser accesible al razonamiento y es justamente lo que se muestra con el planteamiento de Cantor sobre los números *transfinitos,* porque establecía las reglas que permitían el manejo de los conjuntos que comprendían estos números (infinitos tratados de una forma finita), es decir las reglas que permitían el control de un *infinito actual*.

---

19 Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (San Petesburgo 1845-Halle 1918) fue un matemático, filósofo y físico alemán. Tuvo como profesores en el campo de las matemáticas a Ernst Kummer, Karl Weierstrass y Leopole Kronecker. Los primeros trabajos con las series de *Joseph Fourier*, lo llevaron al desarrollo de una teoría de los *números irracionales* y en 1874 apareció su primer trabajo sobre la *Teoría de Conjuntos*, que es la base de las Matemáticas Modernas. Estudia los *conjuntos infinitos*, considerado por su maestro *Kronecker* como una locura matemática y descubre los *conjuntos infinitos enumerables* (naturales, enteros positivos, …) y los *conjuntos infinitos no-enumerables* (no tienen correspondencia con los números naturales).

Sus estudios lo llevan a *formalizar* la noción de *infinito* bajo la forma de los *números transfinitos* (cardinales y ordinales). Este planteamiento supone un desafío para la religiosidad de Cantor. Trabaja en probar la *hipótesis del continuo,* cuya prueba se presenta como imposible, y tiene que ser aceptada (o rechazada) como axioma adicional de la teoría, lo que significó un salto cualitativo importante en el raciocinio lógico.

20 Paradojas, que parecían invalidar toda su teoría (*inconsistente* o *contradictoria,* en el sentido de que una cierta propiedad podría ser *a la vez cierta y falsa*). Por ejemplo: "el barbero de un pueblo rasura todas las personas que no se rasuran por sí mismas. Pregunta: ¿El barbero se rasura a sí mismo? El descubrimiento de las paradojas de la teoría cantoriana de conjuntos fue formalizada posteriormente por Gottlob Frege, así mismo propició los trabajos de Bertrand Russell, Ernst Zermelo, Abraham Fraenkel y otros estudiosos a principios del siglo XX.

21 Cantor, define el *infinito potencial* en contraposición al *infinito actual*, nociones que eran conocidas desde la antigüedad, por los griegos. *Anaximandro* (611-547? a. C.) consideraba el Infinito como potencialidad, lo indeterminado, ilimitado, es decir, lo continuo; *Platón* (427-347 a.C.), al contrario se refería al Infinito actual, describiendo la *forma, el número*, etc.; en el Medioevo, el infinito es potencial y hace referencia a Dios; y en los desarrollos contemporáneos se encuentran las dos corrientes, así:

- infinito potencial: Conjunto infinito N (naturales), no existe; Conjunto finito si existe N= {1, 2, ….} y es potencialmente infinito.
- infinito actual es exclusivamente para conjuntos operativamente cerrados:
- números naturales (constructivismo): para cada número natural es posible señalar un sucesor por tanto no hay fin: S0=1; SS0=2. Cada uno de estos números (por grande que sea) puede señalarse en forma completa, mientras que eso no es posible para el conjunto N.
- conjuntos que se pueden definir con base en procedimientos o algoritmos.

La problemática se desplaza hacia la legitimidad de los razonamientos no-constructivos o que no se pudieran establecer por un número finito de pasos y en consecuencia por el estatuto del infinito potencial, el actual y lo finito (objetos o razonamientos). Así, había escuelas que controlaban lo infinito (transfinito) por medios finitos, otros se dieron a la tarea de reinterpretar los medios no-constructivos adquiridos, por medios constructivos, es decir, en ambos casos, se trataba de componer una lógica en el campo de lo finito. La indagación de los lógicos se centra, entonces sobre lo que se puede entender por *razonamiento constructivo*, el cual era, en ese momento, el centro de interés de Turing ligado a sus investigaciones sobre la manera de realizar cálculos.

En el mismo sentido, David Hilbert, plantea una estrategia basada sobre una reformulación de la *axiomática*, que diferenciaba las proposiciones *ideales* de las *reales.* Desde la antigüedad (Euclides), la *Axiomática de la Geometría* estaba compuesta por un grupo de proposiciones (axiomas) que engendraban lógicamente todas las otras proposiciones de este campo y suponía que esta geometría era no-contradictoria. Así, para definir si un grupo de axiomas era legítimo (no-contradictorio), era necesario recurrir a una *representación* o *modelo* del grupo de axiomas estudiado. Por ejemplo, en axiomas no-euclidianos establecidos por Riemann para presentar la noción de curva del espacio, la *recta* puede ser interpretada como un *arco del círculo* de esa área. Consecuentemente, la lógica se asemejaría a un procedimiento de verificación y sus proposiciones serían ideales, que por naturaleza, no deberían ser interpretadas, lo cual lleva a las preguntas como: ¿Todas las geometrías son equivalentes? ¿Por qué la geometría euclidiana tenía un papel prioritario? Así, el infinito, concebido como ideal, no podía recibir interpretación en un modelo, lo que condenaba su uso y podía ser contradictorio, entonces, ¿cuál sería la manera de utilizarlo?

Hilbert, a su vez, quiere conservar al mismo tiempo la posibilidad de utilizar el infinito y controlar su uso de una manera finita, de manera que si la geometría estaba en el dominio de las matemáticas, el infinito también lo estaba. El planteamiento de Hilbert es el siguiente:

- *Precisar el estatuto de la geometría*: interpreta por medios algebraicos las axiomáticas de diferentes geometrías, pero no prueba que la geometría fuera más ideal que el álgebra y por lo tanto, no se necesita pasar por ella para probar cualquier geometría.

- *Probar la geometría por medios matemáticos más fundamentales*: de manera que, por ejemplo, la geometría cartesiana debería ser probada por la aritmética de los números enteros o reales.

- *Probar la consistencia absoluta de la matemática*: por ejemplo, a partir de la consistencia de los números enteros se deducirían todas las otras axiomáticas. Para hacerlo, transforma el concepto de axiomática y distingue dos clases de esta: de *contenido* y *formal*. La de contenido, comprende las proposiciones *finitistas* (se verifican por medios efectivos) e *ideales* (no se verifican por esos medios, como las transfinitas, las existenciales y universales). El objetivo era reducir estas últimas proposiciones a las de contenido, las cuales podían asegurar la no-contradicción, dejando solo las proposiciones sin posibilidad de interpretación, es decir, sin contenido, reguladas por procedimientos efectivos, que podrían responder directamente a la pregunta de la no-contradicción, en el caso de las dos axiomáticas.

- Asegurar el aspecto formal de las proposiciones de contenido: aquí lo más difícil era asegurar lo formal en las proposiciones transfinitas (control de la hipótesis de lo continuo).

- Asegurar que la deducción se opere de manera efectiva: es decir, en un número finito de etapas, *operada* fuera del sistema formal por el matemático, como disciplina del pensamiento[22] y que puede, por ende, controlar el *infinito.*

Anotaciones

Era sobre este sistema completamente formalizado (en la medida que no era interpretado) que se quería saber si las fórmulas o axiomas formaban un sistema no-contradictorio y para establecerlo, en el caso de la aritmética, consistía en producir una prueba de imposibilidad[23]. Así, por medio de esta prueba de imposibilidad, Turing y Gödel rechazan el planteamiento de Hilbert.

3.2. Planteamientos de Turing

Hilbert en su "Programa" presenta varias problemáticas de interés para los matemáticos y que concierne el estatuto de la *axiomática,* así:

- ¿Es *completa*, en el sentido que cada fórmula puede ser demostrada o rechazada?

22 Nuestro pensamiento sería *finitista* y funcionaría de manera *efectiva*, para Hilbert.

23 Se supone la existencia de una *contradicción* entre los axiomas del sistema formal y se demuestra que esta suposición es contradictoria.

- ¿Es *consistente*, en el sentido que cada fórmula contradictoria no puede ser generada a partir de sus axiomas?

- ¿Es *decidible*, en el sentido que requiere un método efectivo para decidir que una fórmula cualquiera puede ser verdadera o falsa?

Anotaciones

Esta última problemática es lo que se conoce como el *Entscheidungs problem* o *Problema de la Decisión y* es la base del trabajo de Turing. Las respuestas a las tres problemáticas fueron negativas, las dos primeras aportadas por Gödel y la última por Alan Turing, Emil Post, Alonzo Church y Stephen Kleene, entre otros, quienes se basan en el trabajo realizado por Gödel para plantear su negativa. Así mismo, se descubrieron fenómenos inesperados, creando un verdadero "laboratorio decidible", en donde el nacimiento de la informática ilustra concretamente estos fenómenos.

3.2.1. Respuesta de Gödel

La respuesta de Gödel al primer problema de la completitud (en 1931), prueba que hay una parte *restante* de la Aritmética que está por fuera de la Axiomática Formal, de manera que la demostración de una proposición no era estrictamente equivalente a su verdad porque un teorema (proposición verdadera) podía ser verdad sin ser deducible de sus axiomas: era, entonces, necesario disociar la deducción de naturaleza *sintáctica* (formal) *y* la de naturaleza *semántica* (contenido) dentro de la Axiomática Formal.

Anotaciones

Esto tenía una consecuencia desde el punto de vista *filosófico* porque al pasar del *finitismo* metamatemático al *finitismo* del pensamiento, hacía que se perdiera su carácter de *presupuesto necesario,* impuesto por Hilbert. Inclusive, para Gödel, era entonces la reticencia en utilizar razonamientos no-finitistas en el pensamiento que llevaba a la "consecuencia trivial" de teoremas como el de la *incompletitud* de 1931 (Wang, 1974, p. 8). En consecuencia, sería necesaria, una modificación profunda desde el punto de vista de la Axiomática, para solucionar los límites internos que tocaban su completitud y su consistencia, y posteriormente su decidibilidad.

3.2.1.1. Planteamientos y consecuencias

Gödel (1931) en su artículo: "Sobre las proposiciones formalmente indecidibles de los *Principia Mathematica* y los Sistemas emparentados I", introduce un sistema formal P construido a partir del sistema lógico de los *Principia Mathematica* de Russell y de los axiomas de los números enteros de *Peano*[24]. Demuestra que existe en el sistema, fórmulas o proposiciones verdaderas indecidibles que no pueden ser ni confirmadas, ni afirmadas. Precisamente, demuestra que la aritmética formal no puede ser probada sino al interior de su sistema axiomático.

Su desarrollo consiste en codificar todas las fórmulas del sistema P, así que sus demostraciones con números enteros: "una fórmula es una cadena de números naturales y una demostración es una cadena finita de cadenas finitas de números naturales"[25].

Explícitamente, presenta una descripción de un cálculo formalizado al interior del cual pueden ser expresadas las relaciones aritméticas corrientes. De esta manera, las fórmulas del cálculo (cadena de signos) elaboradas por un conjunto de signos elementales y según una demostración (cadena finita de fórmulas) son completamente codificadas por un número: el "Número de Gödel" distinguiendo el signo elemental, la fórmula y la demostración, lo que permite establecer un método con el fin de "aritmetizar" el cálculo formal, permitiendo una correspondencia biunívoca entre las expresiones del cálculo y un subconjunto de enteros. Así, si una expresión es dada, el número de Gödel correspondiente puede ser calculado y viceversa. Este método puede ser realizado mecánicamente por una máquina, definiendo claramente su estructura y su composición.

La etapa siguiente del método consiste en demostrar que todas las aserciones "metamatemáticas" (propiedades de las expresiones, entre otros) se pueden referir al cálculo mismo, con el fin de que estas puedan ser igualmente aritmetizadas.

Anotaciones

Vemos que el planteamiento de Gödel consiste en operar una aritmetización de la metamatemática. Si Hilbert propone una axiomática formal, Gödel pasa de esta a una aritmética formal. La pregunta aquí sería, si ¿no hay una vuelta atrás al *contenido o significado* de las proposiciones formales dadas de la axiomática

24 El se sirvió de esta adaptación de los "Principia Mathematica" y de los axiomas de Peano, pero cualquier cálculo que se refiera al sistema de los números cardinales, puede convenir.

25 Si Gödel tenía como objetivo responder al Programa de Hilbert, que se proponía (entre otros) la voluntad de traducir la aritmética por la lógica, es decir transformar los números por formulas, con esta propuesta, él acababa, en cierta medida, con el Programa de Hilbert porque Gödel desarrolla su contrario: codificó las formulas por los números enteros.

formal? Pero cómo se justifica la vuelta a la aritmética formal que en este caso sería una aritmética de contenido? Sabemos que en la metamatemática, la axiomática es formal solamente cuando está desprovista de cualquier contenido y en la aritmética formal propuesta por Gödel el símbolo es el *número*, es decir, que tiene significación.

De esta manera, lo que realiza Gödel es trabajar en los dos sentidos, la axiomática formal y la aritmética; o sea, que a la axiomática formal, se le "recodifica" rigurosamente con *números* porque justamente la axiomática no tiene ningún contenido, y la aritmética de los enteros sigue una doble transformación: se sustrae primero su contenido por medio de la axiomática sin contenido y se recodifican estos signos sin contenido, con números. De manera que, a cada signo sin contenido de la axiomática formal, puede atribuírsele un número único[26] y por lo tanto, todas las fórmulas o cadenas de fórmulas reciben un número específico propio, lo que hace posible codificar bajo una relación aritmética, las relaciones de inferencia entre axiomas, teoremas, … etc. Se superponen así dos interpretaciones: una interpretación metamatemática y una aritmética, de manera que con esta codificación la axiomática puede convertirse en el *cálculo formal* esperado.

Este punto nodal, en la argumentación de Gödel, va a ser utilizado por Turing para dar respuesta al problema de la decidibilidad o al de saber si existe o no un procedimiento efectivo capaz de decidir con antelación, si un axioma o proposición verdadera es un teorema o no.

3.2.2. Respuesta de Turing

Turing se propone aclarar la pregunta: "¿Cuáles son los procesos generales que se necesitan para calcular un número? Es decir, la búsqueda de un "proceso general" con el fin de determinar si un número dado *n* tiene una propiedad *G(n)* (n es la representación dada por Gödel de una fórmula demostrable) o en otras palabras: para calcular un número cuya *n-ésima* cifra es 1, se quiere saber, si *G(n)* es verdad y *0* si es falso. Se trata de precisar, específicamente, lo que se entiende por un *procedimiento efectivo* o por un *algoritmo* para realizar cálculos

26 Así, por ejemplo para la asignación del *Número de Gödel* a las constantes, tenemos:

Constantes	*Número de Gödel*	*Significado*
~	1	No
V	2	o
⊃	3	Si..., entonces
∃	4	Existe
=	5	Igual
S	6	Sucesor

(problema de la decisión); y de manera general sobre las propiedades lógicas y sus límites, es decir los problemas metamatemáticos planteados por Hilbert.

3.2.2.1. Puntos problemáticos

Antes de enseñar la solución de Turing, presentamos dos puntos problemáticos sobre los cuales él tenía que hacer aclaraciones:

- *Noción de cálculo*

Si bien la noción de cálculo que se utilizaba por los matemáticos desde siempre, parecía no tener problema, esta no había sido tema de estudio profundo y era catalogada como una *herramienta* en matemáticas pero no como *objeto*. En este sentido, el planteamiento de Hilbert pedía definir las herramientas matemáticas como objetos para resolver el *problema de la decisión*, es decir, caracterizar claramente la noción de cálculo en sí misma y sus relaciones con la noción de función y de procedimiento efectivo.

La noción de *cálculo*, en el siglo XVIII, fue asociada a la de *función* que, en parte se consideraba como un *procedimiento de cálculo*, en el que a un valor numérico de x, correspondía, por una transformación efectuada por la función f, un valor $f(x)$. Esta noción se precisa en el siglo XIX como una puesta en correspondencia entre un conjunto de partida y un conjunto de llegada, pero nada dice que se tengan los medios para describir por medio del cálculo, esta correspondencia. Así, se hacía necesario aclarar la relación entre función y cálculo, de manera que, por ejemplo, saber si para resolver una función de enteros existía un procedimiento de cálculo o no, y en el caso de que existiera, si el resultado del cálculo daría una *función calculable*. El límite de esta función era *indeterminado* porque dependía de encontrar el procedimiento efectivo de cálculo que produjera la función, lo que hacía difícil su definición formal.

En este sentido, la noción de procedimiento efectivo, puede asemejarse a aquella de *algoritmo* que es una noción técnica y no totalmente formal (no regulado por las normas de la Axiomática Formal). *Algoritmo*, entendido como una lista de instrucciones que se deben seguir para llegar a un resultado después de un número finito de etapas. Es un procedimiento general que responde a una clase de preguntas, por ejemplo: ¿si un número cualquiera pertenece a la clase de números primos? Inclusive si la clase de números primos es infinita, el número n se escoge entre el conjunto infinito de los números enteros. El número de casos para investigar debe ser finito, porque en su opuesto, este número de casos sería interminable y entonces el procedimiento o algoritmo no tendría fin.

En el caso de la Axiomática Formal, sabiendo que esta tiene la capacidad de representar el infinito de los números enteros, el procedimiento de decisión consiste en determinar si una fórmula o proposición es decidible de los axiomas de la axiomática formal[27].

Anotaciones

Turing al proponerse la tarea de definir formalmente la noción intuitiva de cálculo, necesitaba desarrollar una noción lo suficientemente amplia, que cubriera esta noción intuitiva, en su generalidad. En consecuencia, requería precisar a su vez, el contenido formal de la *función calculable*, cuyo comportamiento depende de un procedimiento efectivo o algorítmico.

- *Noción de función calculable*

Intuitivamente, se entiende por *calculable* el resultado de una operación que conduce a la determinación exacta de un número. Desde la antigüedad griega, el concepto de *calculable* se ha ido refinando y se despejaron tres casos:

. Corresponde a la intuición que se tiene de la noción de *calculable*, y consiste en encontrar, luego de una operación que comprende un número finito de etapas, un resultado exacto. Por ejemplo: “5 + 5”o v9, cuyo cálculo lleva a un resultado exacto después de la realización de la operación planteada.

. Consiste en encontrar, después de una operación que comprende un número finito de etapas, un resultado aproximado a un grado cualquiera de aproximación que se ha decidido con anterioridad. Por ejemplo, se puede calcular la expansión decimal de v2, que es infinita, aproximándola a 6 cifras.

. Corresponde a lo *incalculable*, en el cual no se tienen los medios para calcular un resultado exacto, después de una operación de un número de etapas finitas, o después de la aplicación de reglas de aproximación del resultado.

Para los dos primeros casos, en caso de conjuntos, se puede decir que, una función se llama *calculable* si su valor para cada número calculable en el conjunto de partida, es un número calculable.

27 Es interesante saber que la respuesta afirmativa que espera Hilbert sobre el *Entscheidungs problem* o Problema de la Decisión está basada en un lineamiento epistemológico que es el de *la solución de todo problema matemático*, el cual debe tener una forma tal que sea siempre posible resolverlo. Para él, no había “*ignorabimus en Matemática*”, de ahí la importancia dada a la búsqueda de solución del problema de la decisión para su filosofía matemática (Lassègue, 1998, p. 61-62).

Anotaciones

Desde un punto de vista general, el dominio de lo calculable es una parte mínima del desarrollo de las matemáticas, como se ve en los trabajos sobre *Teoría de Conjuntos*, pero es solamente al perfeccionar la noción de *función* que este hecho capital en matemáticas se aclaró.

Una de las tareas capitales de la investigación matemática consiste en encontrar la manera de aproximar, por medio del cálculo, un cierto número de funciones (*Análisis numérico);* se trata de encontrar métodos algorítmicos o efectivos que permitan encontrar los elementos característicos que hacen posible el cálculo aproximado de la función estudiada. Por ejemplo, en la función √x definida sobre el conjunto de los números reales, encontrar que a todo x en el conjunto de los números naturales le corresponda la raíz √x, descrita a cualquier nivel de aproximación decidido con anterioridad, es entonces una *función calculable.* Y esto porque siempre es posible exhibir el resultado único de la puesta en correspondencia entre x y √x.

El análisis numérico tiene entonces como campo de estudio los dos primeros casos de calculable y es en estos dos casos que Turing perfeccionó las técnicas efectivas y obtuvo un gran número de resultados, pero es en el tercer caso, aquel del *incalculable*, que su nombre tomó importancia en la historia de las matemáticas y de la informática.

3.2.2.2. Puntos de la solución de Turing

En el artículo de 1936, "sobre los números calculables, con una aplicación al Entscheidungs problem" (Turing, 1936-1937, pp. 48-104, versión francesa), él se centra en el problema de la decisión y establece cuatro aspectos importantes:

- *La idea intuitiva de calculabilidad*

A partir de la práctica de una persona que efectúa cálculos por medio de signos sobre una hoja de papel, Turing presenta una análisis minucioso de lo que hace un calculador humano, según los símbolos observados y su estado de "espíritu" a un momento dado[28], el quiere mostrar la característica formal

28 Turing, Alan (1936-1937, pp. 78, de la versión francesa): "El comportamiento de un hombre que calcula se determina a todo momento por los símbolos que observa, y por su "estado de espíritu" del momento. Se supone que este calculador observa un número máximo M de símbolos (o de casillas) a la vez en un momento dado. Si quiere observar más, debe hacer muchas observaciones sucesivas. Suponemos que no es necesario tener en cuenta sino un número finito de estados mentales, por una razón análoga a aquella que nos lleva a limitar el número de símbolos. En efecto, si se admite la existencia de una infinidad de estados mentales, algunos entre ellos serían "arbitrariamente cercanos" al punto de confundirse entre

del pensamiento cuando se realiza un cálculo formal, como base epistemológica presentada por Hilbert. Con este soporte, va a demostrar que no hay nada en el acto de calcular que no pueda ser realizado por un dispositivo mecánico simple.

- *Definición de una máquina abstracta para calcular*[29]

El equivalente formal dado por Turing a la noción intuitiva de cálculo por medio de un procedimiento de la manera de calcular, se puede llamar *algoritmo*, expresado así: "toda función a través de la cual se encuentra un algoritmo debe ser calculable por una máquina de Turing", lo que establece una correspondencia entre los algoritmos de un lado y las máquinas de Turing, de otro. De esa manera, las funciones calculables que le corresponden deben ser *Turing calculables* (por máquina de Turing), para las cuales utiliza la operación aritmética y da una representación formal codificada de un cálculo.

La representación del cálculo por una máquina se hace a través de una máquina abstracta, sobre papel, cuyo procedimiento decidible es un conjunto regulado de operaciones efectuadas para esta máquina sobre las cadenas de signos.

Esta caracterización, no es una definición totalmente formalizada, es más del ámbito de una *tesis* que puede nominarse *mecanicista*, pero que se supone va a formar parte de la órbita de estas definiciones.

- *Definición de Números y Funciones Calculables*

Para caracterizar la noción de cálculo, Turing quiere responder primero a la pregunta: ¿qué es un número real calculable? y luego a: ¿qué es una función calculable? En este sentido, define los números *calculables* como números reales cuya expresión decimal es calculable por medios finitos[30]. Los números reales se representan por una cadena infinita de cifras, operación que toma un tiempo infinito. Sin embargo, con el fin de volverlos calculables es necesario

ellos. Aquí, esta restricción no es de naturaleza para afectar seriamente el cálculo, porque estados mentales más complicados pueden evitarse escribiendo más símbolos en la cinta".

29 Turing, Alan (1936-1937, pp. 80, de la versión francesa): "Se puede construir ahora, una máquina para efectuar el trabajo del calculador. A cada estado de espíritu del calculador corresponde una "m-configuración" de la máquina. La máquina examina B casillas correspondientes a las B casillas observadas por el calculador. A cada paso, la máquina puede cambiar cualquiera de las casillas examinadas por otra casilla distinta de al menos L casillas de uno de las casillas examinadas. El cambio que se efectúa, y la configuración que resulta, son determinadas por el símbolo examinado y la m –configuración".

30 Ibíd, p. 49 de la traducción francesa.

medios finitos. El conjunto de los números calculables es inmenso, comparable al de los reales, no obstante es enumerable.

Con la definición de *números calculables*, Turing expone una *teoría de funciones de una variable real,* en la perspectiva de la *Calculabilidad*, en la cual establece que un número es calculable si su representación decimal puede ser escrita por una máquina. Esta definición, era hasta aquí informal porque la naturaleza de los medios susceptibles de ser utilizados no había sido formalmente explícita, en consecuencia la tesis de Turing o la representación mecánica por una máquina volverá la definición formalizada.

De esta manera para una máquina de Turing, el resultado de un cálculo representa el valor de una función, inscrita al principio sobre la cinta de la máquina (ver parágrafo siguiente: Composición de la máquina), si hay resultado. Lo cual nos lleva a decir, que una función numérica es calculable, si existe una máquina de Turing que sea un procedimiento de decisión para esta función; así mismo él extiende el cálculo a cadenas de signos cualquieras (simbólicas) y a todos los procedimientos de cálculo usuales, lo que confiere un carácter general a su tesis. Esto hace posible la pregunta: ¿existe una máquina de Turing capaz de calcular una función x?

- *Composición de la máquina de Turing*

Sabemos que la máquina es de "papel" o abstracta, especie de "caja negra", donde se tienen en cuenta solamente los datos de entrada y los datos de salida transformados. La estructura de la máquina es muy simple:

- una banda infinita dividida en casillas, semejante a una memoria rudimentaria, con una capacidad de almacenamiento infinita; cada símbolo está almacenado en una casilla *S(i)*, quiere decir que en la casilla *S* está inscrito el símbolo *i*.

- una cabeza de lectura-escritura, capaz de observar el contenido de una casilla de la banda, en un tiempo *t,* de desplazarse a lo largo de la banda en cualquier sentido, de pararse sobre una casilla observada y de borrar el símbolo de la casilla.

- un conjunto finito de estados (q_1 , q_2 , … , q_n) que distinguen los comportamientos de la máquina. Con el símbolo observado *S(i)* en una casilla y un en estado de la máquina se tiene la configuración de la máquina: (q_n , *S(i)*); es esta configuración que determina la evolución de la máquina, como inscripción de un nuevo símbolo de la casilla *S(i).*

- una tabla de instrucciones que controla cada acción de la máquina.

Se puede representar la *máquina de Turing*, como sigue:

Cabeza de Lectura-escritura

1	0		0	1	0			

De esta manera, cualquier algoritmo o procedimiento de decisión puede ser simulado por una máquina de Turing. El mecanismo es muy simple: en función del símbolo *S(i)* que la cabeza está leyendo y de acuerdo a su estado q_i, ella escribe un nuevo símbolo S(i‘) en la casilla, pasa a un nuevo estado q_n; y efectúa un desplazamiento de al menos una casilla: a la derecha, a la izquierda o se queda en la casilla.

- *Máquina Universal de Turing*

Hemos visto que cada cálculo exige su máquina de Turing, desde un punto de vista *psicológico* el calculador humano busca el algoritmo y construye la máquina de Turing que necesita y hace la relación entre un algoritmo o problema dado y la máquina que le corresponde. Esta consonancia puede ser el objeto de un procedimiento general, que a su vez (dicho procedimiento) puede ser controlado por una máquina. Se puede, entonces, concebir máquinas de Turing universales, para operar cualquier algoritmo. Es entonces, su capacidad de amoldarse o imitar, parecida a la del calculador humano, a cualquier algoritmo planteado (instrucciones) que hace su importancia y capacidad. Es posible obtener un conjunto enumerable de todas las máquinas de Turing, y concebir una relación funcional entre la máquina de Turing individual y la máquina que imita, es decir, que sea posible cualquier *función calculable.* Esta universalidad de la máquina delimita el campo de lo *calculable.*

Así mismo, con el planteamiento de esta máquina universal, el presenta una apuesta metodológica y de estructuración para la deducción, de manera que las instrucciones deben ser reutilizadas por cualquier máquina que sea necesaria, si se trata de combinar las instrucciones, entonces estas se pueden reducir a elementos más simples y los cálculos lo serían también: cálculos simples que formarían parte de cálculos más vastos. El propósito de Turing es el de reducir los cálculos, pero también lo infinito de los cálculos llevarlo a lo finito.

- *Problema de la Parada*

La solución al problema de la decisión supone que sea comprendida en un sentido general, a saber que: "todo procedimiento decidible" cualquiera que sea, pueda ser efectuado por una máquina de Turing, o que toda función para la cual existe un procedimiento decidible sea igualmente calculable por una máquina de Turing[31]. Sin embargo, este concepto no permite determinar con antelación la relación entre los problemas del infinito de los cálculos y la obligatoriedad de lo finito de las tablas de configuraciones e instrucciones. Para precisarlo, Turing presenta un problema que le compete a todas las máquinas de Turing, que se llama el "problema de la parada".

En este sentido, la pregunta sobre la decidibilidad de carácter general planteada por Turing, se logra sintetizar así: ¿se puede saber con antelación si todo cálculo tendrá o no un fin? Es decir: ¿si se puede saber de manera general, sin haber realizado el cálculo, que la máquina va a parar o no? Lo que nos llevaría a preguntarnos sobre la existencia de una máquina de Turing que sería capaz de resolver el problema de la parada sobre un dato de entrada. Por ejemplo, si una máquina de Turing cualquiera *T*, posee una cadena de signos *C* escrita sobre su banda, ¿se para en un tiempo finito, teniendo escrito sobre su banda, por ejemplo *0* si *T* no se para en el dato inicial *C*, y *1* en el caso contrario? Esta máquina no existe, sería una máquina de decisión, capaz de conocer globalmente el comportamiento de cada máquina de Turing (es decir, el resultado del cálculo, su parada o su ausencia) a partir de la simple observación de su tabla de instrucciones. Ninguna máquina u algoritmo permite ver, con anterioridad, el resultado del cálculo, es decir su parada o no.

Turing al establecer una correspondencia entre la solución del problema de la decisión y el problema de la parada de la máquina, ha necesitado resolver el problema de la parada de la máquina, pero como resultado de la tesis de Turing, ninguna máquina de Turing puede resolver el problema de la parada, entonces, el problema es insoluble, y por consecuencia la solución al problema de la decisión es igualmente insoluble. Así, en términos de lógica, lo que una máquina de Turing no puede hacer es determinar con antelación y de manera efectiva si una proposición dada es un teorema o no, de la misma manera que no sabe prever si un cálculo cualquiera, llegará a un resultado en un tiempo finito. Como consecuencia importante de su tesis es la correspondencia entre el cálculo y la demostración; correspondencia que enfatiza, a su vez, el presupuesto sobre la universalidad de la máquina de Turing.

Anotaciones

Turing al hacer la correspondencia entre la insolubilidad del problema de la decisión y el problema de la parada, presenta tres aspectos importantes de

31 Existe una cantidad de *funciones numéricas* (teoría de conjuntos, por ejemplo) y *simbólicas* que no pueden ser calculadas por las máquinas de Turing por el hecho del carácter enteramente finito de estas máquinas.

la teoría de la calculabilidad y por ende de la informática: la correspondencia entre el cálculo por una máquina y la demostración de una fórmula en un sistema lógico; la síntesis de elementos numéricos y simbólicos del cálculo, ampliando el campo de las formas de representación de este; y la caracterización de funciones calculables.

4. Conclusiones

Se puede resumir el *cientificismo* de principios del siglo XX, encarnado por Hilbert en la expresión: "todos los problemas tienen una solución", dado que existen problemas que comprenden las bases del razonamiento por demostraciones de consistencia y otros que se refieren a los procedimientos generales para llegar a la solución, o a encontrar un *algoritmo* que resuelva un cierto número de problemas. Hasta aquí, las soluciones encontradas eran abstractas y por lo tanto la noción de la *calculabilidad* era abstracta, hasta la solución *mecanicista,* dada por Turing. Solución concreta y formalizada, pero que sin embargo, concierne una *máquina abstracta*; planteamiento que rompe con la tradición de las máquinas *físicas o materiales*, generando una manera particular de mostrar una *máquina,* cuya originalidad reside en la utilización de procedimientos lógicos para su funcionamiento. Así, las máquinas materiales pierden su carácter pragmático en la resolución de problemas de cálculo y se vuelve esencialmente lógico y teórico, según las exigencias metodológicas del *formalismo*.

Vemos como Turing y en general, los lógicos de los años treinta, incitados por estas exigencias generan verdaderos laboratorios de lo *calculable efectivo*, el cual conformaría la *Teoría de la Calculabilidad*. Esta define los límites de lo calculable, mostrando problemas que no son calculables y por lo tanto no-decidibles, para lo cual la *máquina de Turing* es ejemplarizante. En cierto sentido, la noción abstracta de máquina se *inserta* en la demostración matemática e igualmente en aplicaciones prácticas, transforma el imaginario científico, lo mismo que nuestra concepción de lo natural e inmediato, desde entonces se puede concebir preguntas centrales de la lógica vía la noción de la calculabilidad *mecánica*.

Igualmente, la correspondencia del problema de la decisión al problema de la parada de la máquina de Turing cuando realiza un cálculo, demostrado como insoluble, marca uno de los límites de la decidibilidad y por lo tanto de la *Calculabilidad*. Así mismo, para el funcionamiento del procedimiento efectivo o máquina, se requería el planteamiento y precisión de un tipo de funciones que era necesario *matematizar* o formalizar para llegar a la noción de *función calculable*, con *propiedad decidible*. Funciones, que pueden ser resueltas por un *si* o *no* (verdadero o falso; 1 o 0), es decir, aquellas de estilo *x å A*. Estas funciones son enteramente calculables porque después de un cálculo, una parada de la máquina de Turing es previsible, es decir, que un cálculo efectivo, solamente puede realizarse con este tipo de funciones, las cuales marcan los límites de lo decidible, lo calculable y posteriormente de la informática.

Bibliografía

Aho, A. V.; Hopcroft, J. E.; Ullman, J. D. (1983). "Data Structures and Algorithms". Addison-Wesley Publishing Company.

Anderson, A. R. (Direction), Guieze, G. (Présentation) (1983). "Pensée et Machine". Ed. Champ Vallon.

Bernays, P. (1930). "La philosophie des mathématiques et la théorie de la démonstration de Hilbert". Dans: "Philosophie des Mathématiques". Introduction et traduction de Hourya Sinaceur. Paris: Librarie Philosophique J. Vrin, 2003. (Mathesis: Michel Blay- Hourya Sinaceur), p. 80- 81.

(2004). "The blackwell guide to the philosophy of computing and information". Ed. by Luciano Floridi. Blackwell Publishing Ltda.

Blanché, R. "L'Axiomatique" (1990). Paris: Quadrige PUF (1ère édition, 1955).

Blanché, R. et Dubucs, J. (1996). "La Logique et son histoire", Paris: Armand Colin (Collection "U", série Philosophie).

Boniface, J. (2004). "Hilbert et la notion d'existence en mathématiques". Paris: Librairie Philosophique J. Vrin (Mathesis: Michel Blay- Hourya Sinaceur).

Booker, A.R. (2006). "Turing and the Riemann hypothesis". Notices Amer. Math. Soc., 53(10): 1208-1211.

Bretón, P. (1990). "Une Histoire de l'Informatique". Paris: Eds. La Découverte.

Chabert, Jean-Luc; Barbin, Evelyn; Guillemot, Michel; Pajus, Anne Michel; Borrowczyk, Jacques; Djebbar, Ahmed; Martzloff, Jean Claude (1994). "Histoire d'Algorithmes. Du caillou à la puce". Paris: Editions Belin.

Chaitin, G. J. (1987). "Information, Randomness and Incompleteness: Papers on Algorithmic Information Theory". Singapore: World Scientific.

Davis, Martín (1988). "Influences of Mathematical Logic on Computers Science". Dans: *The Universal Turing Machine. A half-century survey*. Ed. Par Rolf Herken, pp. 315-326.

Davis, M. (1988). "Mathematical Logic and the Origin of Modern Computers". Dans: *The Universal Turing Machine. A half-century survey*, ed. par Rolf Herken, pp. 149-174.

Delahaye, J. P. (1999). "Information, complexité et hasard". 2nd. éd. revue. Paris: Hermes.

Dellesert, A. (2000). "Gödel: une révolution en Mathématiques", essai sur les conséquences scientifiques et philosophiques des théorèmes gödeliens. Lausanne, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes.

Dreyfus, H. (1984). "L'Intelligence Artificielle: Mythes et Limites". Paris: Flammarion.

Dupuy, J. P. (1994). "Aux Origines des Sciences Cognitives". Paris: Editions La Découverte.

Durand, B., et Zvonkin, A. (2004). "Complexité de Kolmogorov". Dans: L'héritage de Kolmogorov en mathématiques": Eric Charpentier, Annick Lesne, Nikolai Nikolski. Paris: Belin.

Floridi, Luciano (2004). "Information". Dans: "The Blackwell Guide to the Philosophy of Computing and Information". Ed. by Luciano Floridi. Blackwell Publishing Ltda., pp. 40-61.

Gandy, Robin O. (1998). "The confluence of ideas in 1936", dans *The Universal Turing Machine. A half-century survey*.

Gauthier, Yon (1997). "Logique et Fondements des Mathématiques". Diderot Eds. Arts & Science.

Gödel, Kurt (1965). "On undecidable propositions of formal mathematical systems". Polycopie d'un cours de 1934 à l'Institut des Etudes Avancées de Princeton, dans: "The Undecidable", ed. Martín Davis, Raven Press, pp. 39-71.

Gödel, K. (1989). "Sur les propositions formellement indécidables des Principia mathematica et des systèmes apparentés I". 1931. Dans: "Nagel, Ernest; Newman, James R.; Gödel, Kurt; Girard, Jean Yves: "Le Théorème de Gödel". Traductions de l'anglais et de l'allemand par Jean Baptiste Scherrer. Paris: Editions du Seuil.

Guillaumaud, J. (1971). "Norbert Wiener". *Savants du monde entier.* Editions Seghrs.

Gunderson, K. (1983). "Le Jeu de l'Imitation". Dans: *Pensée et Machine*. Ed. Champ Vallon.

Herken, R. éd. (1988). "The Universal Turing Machine. A half-century survey". Oxford University Press (1er. éd.). Wien, New York, Springer-Verlag, 1994-1995 (2d. éd.).

Hilbert, D. (1900). "Conférence 1900: sur les problèmes futurs des mathématiques; compte rendu du 2ème". Paris: Congrès International des Mathématiciens.

Hilbert, D. et Bernays, P. (1934). “Fondements des Mathématiques 1”. Traduction de l’ouvrage “Grundlagen der Mathematik 1” (Springer) 2ème. éd. (1968) avec les passages parallèles de la 1ère. édition. Traduction de l’allemand par F. Gaillard et M. Guillaume. Ed. L’Harmattan, 2002, 2 vols.

Hilbert D. (1925). “Sur l’infini”; traduit par André Weil. Über das unendliche: conférence prononcée le 4 Juin 1925 à l’occasion d’un congrès des mathématiciens organisé à Munster i. w. par la Société Mathématique de Wesphalie en l’honneur de la mémoire de Weierstrass. L’original de cette traduction a paru en allemand dans les Math. Ann. t. 95.

Hodges, Andrew (1988). “Alan Turing ou l’énigme de l’intelligence”. Paris: Eds. Payot.

Hottois, G. (2002). “Penser la Logique: une introduction technique et théorique à la philosophie de la logique et langage”. 2ème ed. Bruxelles, De Boeck Université.

__________ (1996). “Introduction Algorithmique Générale et Numérique”. Paris: Masson.

__________ (1952). Kleene, Stephen C.: “Introduction to Metamathematics”. Amsterdam North Holland.

Kleene, S. C. (1971). “Logique Mathématique”. Traduction de Jean Largeault. Paris: Lib. Armand Collin.

Kleene, S. C. (1988). “Turing´s Anaysis of Computers and Major Applications”. Dans: *The Universal Turing Machine. A half-century survey*, ed. par Rolf Herken, pp.17-53.

Kolmogorov, A. N. (1965). “The approach to the definition of the concept of “quantity of information” (en russe: Problemy Peredachi informatsii), 1(1):3-11.

Ladriere, J. (1957). “Les Limitations Internes des Formalismes: Etude sur la signification du théorème de Gödel et des théorèmes apparentés dans la théorie des fondements des mathématiques”. Paris: GAUTHIER-VILLARS Ed. “Collection de Logique Mathématique”. Série B. Monographies réunies par M.R. Feys (Louvain).

Lalement, R. (1990). “Logique, Réduction, Résolution”. Paris: Masson.

Largeult, J. (1993). “La Logique”, Paris: PUF, 2ème éd. corrigée.

Lassegue, J. (1998). “Turing”. Paris, Les Belles Lettres.

Levy, P. (1990). “Les Technologies de l´Intelligence: l´avenir de la pensée à l´ère informatique”. La Découverte.

Mackdy, D.M. (1969). “Information, mechanism and maching”. Cambridge: MIT Press.

Martín, B. (2004). “Codage, Cryptologie et Applications”. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes (PPUR), Avril. Série: Technique scientifique Télécom-France.

Markov, A. A. (1961). “La théorie des algorithmes”, Tr. Math. Inst. Steklov. Vol. 38 (en russe); trad. Angl.: AMS Translation 15.

Martín, R. (1964). “Logique Contemporaine et Formalisation”. Paris: PUF.

McCulloch, W. S. (1949). “The Brain as a Computing Machine”, dans *Electrical Engineering,* June, LXVIII, pp. 492-497. Traduction Française: “Du cerveau comme calculateur”, dans “Sciences Cognitives. Textes Fondateurs (1943-1950)”, ibid. pp. 189-214.

McCulloch, Warren. S. (1953). “Une comparaison entre les machines à calculer et le cerveau” dans “Les Machines à penser”, colloque janvier 1951. Paris: CNRS, pp. 425-443.

Minsky, M.L. (1967). “Computation: Finite and Infinite Machines”. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey. (Series in Automatic Computation, George Forsythe, éd.).

Mosconi, J. (1998). “Calculabilité et Formalisation”. pp. 47-65. Dans “Le Formalisme en Question: Le tournant des années trente”. Edité par Frédéric Nef et Denis Vernant. Paris, Vrin. (Problèmes et Controverses: Directeur Jean François Courtine).

Mosconi, J. (1989). “La Constitution de la Théorie des Automates”. Thèse de Doctorat Histoire et Philosophie des Sciences, préparée sous la direction de Suzanne Bachelard). 2 volumen.

Nagel, E.; Newman, J. R.; Gödel, K.; Girard, J. Y. (1989). “Le Théorème de Gödel”. Traductions de l’anglais et de l’allemand par Jean Baptiste Scherrer. Paris: Editions du Seuil.

Piguet, Ch.; Hugli, H. (2004). ”Du zéro à l´ordinateur. Une brève histoire du calcul” Lausanne, Presses polytechniques et universitaires romandes.

Poincaré, H. (1968). “La Science et l´Hypothèse”. Paris: Flammarion.

Pradilla Rueda, M. (2008). “Vers une epistémologie de la théorie informatique”. Paris: Université Paris 1 - Panthéon Sorbonne. Thèse Docteur en Philosophie.

Putnam, H. (1983). “Minds and machines”, Dimensions of Mind: A symposium, Sydney Hook Ed., New York, University Press, New York, 1960. Trad. Française, “Pensée et Machine”, Anderson A.R., éd. Seyssel: Editions du Champ Vallon, pp. 110-134.

Rabin, M. O.; Scott, D. (1959). “Finite automata and their decision problems”. IBM, Dans: *Journal of Research and Development*. Avril, 3(2):114 -125.

Robinson, J.A. (1965). “A machine oriented logic based on the resolution principle”. Dans: J. ACM 12: 1, 23: 41.

Rivenc, F.; Rouilhan, P. de (1992). "Logique et Fondements des Mathématiques. Anthologie (1850-1914)", Paris: Payot.

Rossenblueth, A., Wiener, N., Bigelow, J. (1995). "Comportement, But et Téléologie". Dans: *Sciences Cognitives. Textes Fondateurs (1943-1950)*. Compilation de Aline Pélisser et Alain Tête. Paris: PUF.

Rouilhan, P. de (1988). "Frege les paradoxes de la représentation". Paris: Les Editions de Minuit.

Scholz, H. (1968). "Esquisse d´une Histoire de la Logique". Traduit de l´allemand par E. Coumet, Fr. de Laur, J. Sebestik. Paris: Aubier-Montagne.

Schuhl, A. (2004). "Les ordinateurs de demain". Cité de Sciences et de l'Industrie: Editions Le Pommier.

Wiener, Rosenblueth, Bigelow, McCulloch, Pitts, von Neumann, Hebb, Weaver, Shannon Turing (1995). Sciences cognitives: textes fondateurs (1943- 1950). Rassemblés et traduits par Aline Pélissier. Présentés et annotés par Alain Tête. Paris: PUF.

Searle, J. (1980). "Minds, Brains and Programs". Dans: Behavioral and Brains Sciences, 3(3):417- 458.

Sieg, W.; Byrnes, J. (1998). "Gödel, Turing, and K-Graph Machines". To appear in: *Logic in Florence*. Edited by A. Cantini, E.Casari, P. Minari; Kluwer Academic Publishers.

Sinaceur, H.; Bourguinon, J. P. (1993). "David Hilbert et les Mathématiques du XX ième siècle". Dans: *La Recherche*, 257, sep., vol. 24. Traduction en espagnol dans: "*Mundo Científico*". 3(140) :936-943.

Shannon, C. E., Mccarthy, J. (1956). "Automata Studies", Princeton: Princeton University Press.

Shannon, C. E. (1993). "Collected Papers". Eds. N. J. A. Slone and A. D. Wyner. Los Alamos, C.A.: IEEE Computer Society Press.

Stern, J. (1990). "Fondements Mathématiques de l'Informatique". Paris: Ed. Science Internationale.

Turing, A. M. (1952). "The chemical basis of morphogenesis". En: *Phil. Tran. Roy. Soc.* B 237, pp. 37-52.

Turing, A. M. (1995). "Computing Machinery and Intelligence". Dans: *Mind*, vol. 59, no. 236, 1950. Trad. française dans: "Sciences Cognitives. Textes Fondateurs (1943-1950)". Paris: PUF.

Turing, A. M. (1995). "On computable numbers, with in application to the Entscheidungsproblem" aparece originalmente en los Proceedings of the

Mathematical Society, serie 2 vol. 42 (1936-1937), p. 230-265.; traducido al francés por Julien Basch y Patrice Blanchard en: Jean Yves Girard et Alan Turing, "La Machine de Turing", Paris: Editions du Seuil, pp.47-104.

Turing, A. M.; Girard, J. I. (1995). "La machine de Turing". Paris: Eds. du Seuil.

Vernant, D. (1986). "Introduction à la Philosophie de la Logique". Bruxelles: Pierre Mardaga Editeur.

Von Neumann, J. (1992). "The Computer and Brain". Traduction française: "L´ordinateur et le cerveau", traduit de l´américain par Pascal Engel, suivi de "Les machines molles de von Neumann" par Dominique Pignon. Paris: Editions La Découverte.

Wagner, P. (1998). "La Machine en Logique". Paris, PUF, (*Science Histoire et Société)*.

Wang, H. (1975). "From mathematics to philosophy". London: Routledge & Kegan Paul.

Watier, G. (2001). "Le calcul confié aux machines". Paris: Ellipses Editions Marketing.

Wiener, N. (1995). "Cybernetics or control and communication in the animal and the machine", MIT Press, 1961. Traduction française "La Cybernétique ou le contrôle et la Communication chez l'Animal et la Machine". Dans: "Sciences Cognitives. Textes Fondateurs (1943-1950)". Compilation de Aline Pélisser et Alain Tête. Paris: PUF.

Wiener, N. (1962). "Cybernétique et Société". Paris: éditions Deux-Rives.