

CONTEXTO Y ELEMENTOS DE UNA SINTAXIS DEL LENGUAJE LÓGICO

MAGDALENA PRADILLA RUEDA*

Recibido: 15 de junio de 2013 / Aceptado: 2 de agosto de 2013

RESUMEN

Los estudios sobre el *Lenguaje* y especialmente sobre el *Análisis del Lenguaje*, realizados por los lógicos de principios del siglo XX, dentro del desarrollo de la *Lógica Matemática*, sientan las bases de la estructuración de un Lenguaje Lógico. Uno de los ejes principales es la *sintaxis*, que determina el funcionamiento del lenguaje, a partir de la deducción formalizada, como la herramienta lógica más importante, la definición de las formas de anotación y las relaciones entre diferentes lenguajes.

Palabras clave: Lógica matemática, sintaxis lógica, lenguajes lógicos.

ABSTRACT

The studies on language and especially on the analysis of language, by the logicians of the twentieth century, within the development of the mathematical logic, present the foundations of the structure of a logical language. One of the main thoroughfares is the syntax that determines the operation of the language, the deduction as the most important logical tool, defining the forms of annotation and relations between different languages.

Keywords: Formal languages, mathematical logic, logic syntax.

1. INTRODUCCIÓN

La problemática correspondiente a la *Sintaxis Lógica*, conduce a preguntarse sobre el contexto de su desarrollo dentro de la *Lógica Matemática*, presentando las bases de esta lógica y su carácter propio con respecto a la *Lógica Clásica*, las características primeras y sus tendencias. Los grandes esfuerzos de los lógicos desde hace más de un siglo presentan varias corrientes, una de las cuales se ha orientado hacia la formalización rigurosa del pensamiento lógico y matemático, la cual cambia completamente la fisonomía de la lógica. Se muestra aquí, ese camino de investigación llevado hacia los *lenguajes formales*, donde Rudolf Carnap es uno de los grandes representantes, cuyo enfoque en la *sintaxis lógica*, presenta

* Doctora en Informática y Matemáticas Aplicadas a Ciencias Sociales, Universidad de Grenoble (Francia), 1983. Tesis: *Búsqueda de Descriptores en Indexación Automática*; Doctora en Filosofía, Universidad Paris 1- Panthéon Sorbonne, 2008. Tesis: *Hacia una Epistemología de la Teoría Informática*. Actualmente Investigadora en el Centro de Investigaciones de la Corporación Universitaria Republicana.

un *hito* dentro de las investigaciones relativas a este tema. En este sentido, a partir de los presupuestos y lineamientos de Carnap, se presentan las descripciones, principios generales y procedimientos de los *lenguajes formales*, en general y en particular de la *sintaxis* correspondiente. Así, tomando como base la existencia de la *deducción* de los sistemas de sintaxis, se muestran las propiedades, elementos, definiciones y relaciones con otras sintaxis. Igualmente se señalan las diferentes problemáticas y las soluciones que se han encontrado dentro del desarrollo de la lógica y los sistemas de sintaxis.

Metodológicamente se describen y analizan los conceptos de lógica matemática y del lenguaje, mostrando su construcción y señalando su estructuración y sus relaciones con otros conceptos. Se destacan conceptos más sólidos, base de núcleos epistémicos que conforman la base teórica de la sintaxis. Así mismo, se sitúa el contexto histórico, crítico y conceptual de estos núcleos epistémicos mostrando las rupturas conceptuales y sus soluciones.

2. SINTAXIS LÓGICA SEGÚN CARNAP

Rudolf Carnap¹ en sus estudios sobre *Análisis del Lenguaje* nos presenta el lenguaje como un “*sistema de actividades o de hábitos o disposiciones para ciertas actividades, sirviendo principalmente para los propósitos de comunicación y de coordinación de actividades entre los miembros de un grupo. Los elementos del lenguaje son signos: sonidos o marcas escritas, producidas por los miembros del grupo con el objeto de ser comprendidos por otros miembros a fin de influenciar en su comportamiento*” (Carnap, 1939, p. 3).

El plantea como disciplinas que conciernen al lenguaje: la pragmática, la semántica y la sintaxis. La *pragmática*, entendida como la acción, estado y ambiente de un hombre que habla u oye o dice una determinada palabra, es de tipo empírica; la *semántica*, tiene en cuenta solamente las expresiones del lenguaje y sus relaciones con aquello que ellas designan; la *sintaxis*, abstrae completamente aquello que designa y se enfoca en las propiedades formales de las expresiones y sus relaciones (*sintaxis lógica*).

Al ampliar el concepto de *pragmática* de un lenguaje dado, la presenta como el encuentro de las similitudes de este lenguaje con lenguajes que le son cercanos; es una disciplina empírica que observa con especial cuidado el comportamiento y el quehacer de los resultados de los diferentes lenguajes de la ciencia. Con esta observación, se descubren las equivalencias de palabras y formas de

1 Rudolf Carnap (1891-1970) uno de los fundadores del Positivismo Lógico y miembro del Círculo de Viena.

los lenguajes, la conexión entre palabras, los objetos a que hacen referencia las palabras, las preferencias en los diferentes lenguajes, grupos de edad o geográficos en la selección de palabras y el rol del lenguaje en las diversas relaciones sociales.

Así mismo, Carnap define la *semántica* como el estudio de las relaciones entre las expresiones del Lenguaje dado y sus *designata*², lo cual concierne un sistema de reglas que establecen tales relaciones, llamadas *reglas semánticas*, que deben ser sin ninguna ambigüedad. De esta manera, la pregunta de falso o verdadero va siempre a referirse a un sistema de reglas y que en sentido estricto van a referirse al lenguaje dado que puede llamarse el sistema semántico S. El lenguaje dado toca así el mundo de los hechos o fenómenos y sus propiedades. De manera que, el sistema S se construye a partir de las propiedades que se han establecido en las reglas: es una construcción reglada a partir del mundo de los hechos. Aquí se ve la relación de la pragmática con la semántica porque los hechos pertenecientes a la pragmática son la base de las reglas dadas en la semántica.

Por otro lado, los *signos* son los elementos del sistema semántico, pueden ser palabras o símbolos especiales. La secuencia de uno o varios signos se llama *expresión*. Los signos se pueden dividir en: descriptivos y lógicos. Descriptivos, los que designan cosas o propiedades de las cosas (también se puede pensar en las relaciones entre las cosas, funciones de cosas...), son los predicados y nombres. Los *signos lógicos* son los que hacen la conexión entre los signos descriptivos, son las variables y constantes (CARNAP, 1939, p. 8)³.

La dinámica del lenguaje se realiza por medio de reglas de formación que determinan cómo pueden ser construidas las diferentes clases de signos, de manera que una expresión de S se llama *frase o proposición* si corresponde a una forma determinada según las reglas, así:

- reglas de *designata* de signos descriptivos, para los nombres que designan cosas o para los predicados que designan propiedades de cosas.
- reglas de condiciones de verdad, que corresponden a los signos lógicos.

2 *Designata*, expresión entendida como los objetos designados o referidos por un determinado nombre o palabra.

3 "Semántica como disciplina exacta es bastante nueva; se encuentra una escuela contemporánea polonesa de lógicos muy fértil. Algunos de este grupo, especialmente Lesniewski y Ajdukiewicz, han estudiado las preguntas semánticas, Tarski en su tratado sobre la verdad, hace una primera investigación comprensiva y sistemática en este campo, dando fruto a importantes resultados".

Se dice en general que, un sistema de lenguaje, o un signo o una expresión, o una frase de un sistema de lenguaje, se *entiende o comprende*, si se conocen las reglas semánticas. Podemos decir que las reglas semánticas dan una interpretación del sistema de lenguaje.

Para Carnap, entonces, la *sintaxis*, llamada la *sintaxis lógica* (Carnap, 2001), corresponde a las expresiones del lenguaje diferentes a las actividades del hablar y escuchar de las personas (*pragmática y semántica*) y de las *designata* (*semántica*). En la *sintaxis* se toma en consideración solamente las expresiones, dejando de lado las propiedades, los objetos, estados o cualquier cosa que puede ser designado o referenciado por las expresiones. La relación de designación o referencia se tendrá en cuenta tangencialmente porque es la relación del sistema semántico (Carnap, 2001)⁴.

Igualmente, Carnap define una estructuración del lenguaje, de manera que comporta un *Lenguaje Objeto*, referido al lenguaje de estudio o investigación y el lenguaje en el cual se obtienen los resultados del estudio, llamado *Metalenguaje*. La teoría que concierne el *metalenguaje* muchas veces se puede llamar *Metateoría*.

La definición de un término en el *metalenguaje* se llama *formal* si se refiere solamente a las expresiones del *lenguaje-objeto* (o más exactamente, a las clases de signos y al orden en el cual ocurren las expresiones), no a los *objetos extralingüísticos*⁵, especialmente a los *designata* de los signos descriptivos del *lenguaje-objeto*. Un término definido por una *definición formal* se llama también *formal*, como son preguntas, pruebas, investigaciones, ..., en los cuales solo los términos formales ocurren. La *Sintaxis lógica* es entonces la *teoría formal* de un *lenguaje-objeto* (CARNAP, 2001)⁶, la cual incluye las reglas formales que gobier-

4 En el Prefacio (*Foreword* p. xvi) de la “*Logical Syntax of Language*”, Carnap nos presenta las fuentes de sus estudios en *Sintaxis*: “Para el desarrollo de las ideas en este libro, he recibido un gran estímulo de varios escritos, cartas y conversaciones sobre problemas lógicos. Menciono aquí los nombres más importantes [...] Tengo una gran deuda con los escritos y lecturas de Frege. A través de él mi atención se situó en el trabajo sobre *logística* [...], los *Principia Mathematica* de Whitehead y Russell. El punto de vista de la teoría formal del lenguaje (conocida como “*sintaxis*” en nuestra terminología) desarrollada en primera instancia por el matemático Hilbert y su “*Metamatemática*”, a la cual los lógicos poloneses, especialmente Ajdukiewicz, Lesniewski, Lukasiewicz y Tarski, le agregaron una “*Metalógica*”. Para esta teoría, Gödel crea su fructífero método de “*aritmetización*”. Así mismo, para el método de la *sintaxis*, he derivado invaluables sugerencias de conversaciones con Tarski y Gödel. Tengo que agradecer particularmente a Wittgenstein en mis reflexiones concernientes a las relaciones entre *sintaxis* y la *lógica de la ciencia*; ... Igualmente, he aprendido de los escritos de autores con los cuales no tenía enteramente una complacencia; ellos son, en primer lugar Weyl, Brouwer y Lewis”...

5 Los *Objetos Extralingüísticos*, son los objetos pertenecientes al *Mundo de los Hechos*, es decir fuera del lenguaje lógico.

6 Se distingue esta *sintaxis* de la parte de la lingüística, en la cual se conoce igualmente como *sintaxis* pero su uso no es restrictivo a términos formales.

nan el desarrollo de las expresiones del lenguaje; así una definición formal, término, análisis, etc., se llama *sintáctico*.

Por otro lado, el lógico en su quehacer determina la *estructura sintáctica lógica*⁷ basado en la principal tarea que es acordar las conclusiones a partir del diseño de premisas, las cuales (premisas y conclusiones) son expresiones del lenguaje (no juicios como contenido de pensamientos) definidas por medio de reglas. Esta estructura define, por ejemplo, si una frase es analítica (completamente aislada de la experiencia), sintética (resultado de la experiencia y de la aplicación de un procedimiento); o si es contradictoria; si es existencial o no, lo mismo que las relaciones lógicas entre las frases o expresiones (por ejemplo, si dos frases contradictorias son compatibles con otras; si una frase es lógicamente deducible de otra o no).

En sentido general, se puede decir que la sintaxis lógica se puede equiparar a la *construcción y manipulación de un cálculo* y es solamente porque los lenguajes desarrollan cálculos, aplicando las diferentes reglas, que los lenguajes evolucionan sintácticamente. En este sentido, la sintaxis puede ser llamada *sistema deductivo o sistema formal*, presentado como un sistema de reglas formales el cual determina ciertas propiedades formales y relaciones de frases, especialmente con el propósito de la deducción formal. El procedimiento más simple para la construcción de un cálculo consiste en seleccionar algunas frases como frases primitivas (algunas llamadas como postulados o axiomas) y algunas reglas de inferencia.

Las frases primitivas y reglas de inferencia son usadas con dos propósitos, para la construcción de pruebas y para la realización de derivaciones. Las frases en las cuales se realizan las pruebas de control se llaman las frases C-verdad (ellos son llamadas probables o teoremas de cálculo). Las derivaciones de las frases C-verdad, se llaman conclusivas. También se puede llamar a la conclusión C-implicada de las clases de premisas (algunas veces se puede llamar derivable o derivada o deducible de las premisas o una consecuencia formal de las premisas). Un cálculo podrá contener unas reglas que determinen ciertas frases que sean C-falsas. Si las reglas de un cálculo determinan alguna frase como C-verdad y C-falsa, el cálculo se llama inconsistente, de lo contrario es consistente.

Las reglas del cálculo determinan, en primer lugar, las condiciones bajo las cuales una expresión puede ser definida como perteneciente a una cierta categoría de expresiones (*reglas de formación*, por ejemplo: “una expresión de este

7 En la práctica, el lógico desde Aristóteles usa reglas que controlan y producen las expresiones o frases.

lenguaje se llama “frase” cuando consiste de símbolos de tal o tal clase, ocurridas en tal y tal orden”); y en segundo lugar, determinan bajo qué condiciones la transformación de una o más expresiones dentro de unas u otras pueden ser construidas (*reglas de transformación*, por ejemplo: “si una expresión es compuesta de símbolos combinados de cierta manera, y si otra se compone de símbolos combinados de otra manera, entonces la segunda puede ser deducida de la primera”). Así, el sistema de un lenguaje con su estructura formal puede considerarse como cálculo.

Carnap distingue entre sintaxis pura y descriptiva. La sintaxis pura concierne a las posibles estructuraciones de las expresiones del lenguaje, sin tener en cuenta la naturaleza de las cosas que constituyen los diferentes elementos de las expresiones. En la sintaxis pura solamente las definiciones son formuladas y se desarrollan las consecuencias de tales definiciones; es enteramente analítica, no tiene contenido y se presenta como un análisis combinatorio.

La sintaxis descriptiva concierne tanto las propiedades sintácticas como las relaciones con las expresiones empíricas dadas, por ejemplo, en las aplicaciones de geometría, es necesario introducir las llamadas definiciones correlativas entre las clases de objetos empíricos y sus correspondientes clases de elementos sintácticos. De esta manera, las expresiones de la sintaxis descriptiva podrían aclarar y designar las expresiones sintácticamente correctas.

3. NOCIONES Y ELEMENTOS PRINCIPALES DE LA LÓGICA MATEMÁTICA

La presentación que realiza R. Carnap sobre el *Lenguaje*, las disciplinas que le corresponden, la estructuración y el lugar y elementos de la *sintaxis*, plantea de manera sintética los lineamientos, ejes y estructuraciones que trataremos en este artículo. De esta manera, estos planteamientos nos sitúan dentro del campo de la *Lógica Moderna* llamada *Lógica Matemática*, apelación que marca su carácter propio y su diferencia con respecto a la *Lógica Clásica*.

La *lógica Matemática* se presenta bajo dos formas sucesivas: el *álgebra lógica* de G. Boole y la *logística* creada por G. Frege. Esta separación no es muy neta debido a la relación estrecha que une la lógica y las matemáticas.

En el primer caso, Boole se propone construir un *órganon* lógico sobre el modelo de las matemáticas y aquí la matemática es un medio para resolver los problemas de lógica, es entonces una teoría matemática particular, que se pre-

señala bajo una forma deductiva, que presupone la validez de leyes lógicas de la deducción (Blanche-Dubucs, 1996 p. 302)⁸.

En el segundo caso, la lógica se interesa a las reglas de razonamiento deductivo y a las leyes que las justifican, es también producto de los matemáticos pero orientada de manera diferente: no hay un interés en la lógica como ciencia sino a la lógica en el desarrollo del discurso matemático, expresando la matemática bajo una forma lógicamente rigurosa: la lógica es auxiliar de la matemática y la teoría de la deducción es un medio para alcanzar una rigurosidad dentro de los desarrollos en las matemáticas (Blanche-Dubucs, 1996 p. 302)⁹.

La justificación está dada, en el sentido que el matemático, al demostrar un teorema, corrientemente no se preocupa si su demostración es válida, se confía de una *intuición lógica*, pero esta puede ser errónea, por lo cual es necesario precisar la materia sobre la cual se fundamenta para despejar y formular sus resultados, al lado de los principios propios de la teoría matemática. De ahí, la necesidad de organizar los principios lógicos en un sistema teórico.

Así mismo, en este caso, algunos seguidores de esta línea Frege (1999), Russell (Whitehead, Russell, 1910-1913) van más allá y pretenden asegurar la fundación de la matemática en la lógica, a partir de la forma deductiva lo cual permite derivar el conjunto de nociones y de verdades matemáticas a partir de las nociones y verdades propiamente lógicas. De manera que, al mismo tiempo que la lógica asegura el fundamento de la matemática, asegura también sus propios principios. Pero para que las bases sobre las cuales el lógico pretende soportarlas sean definitivas, es necesario que los términos primarios de la lógica tengan un sentido completo y claro, con el fin de que estas proposiciones sean verdades categóricas y que puedan comunicarse con aquellas de las matemáticas. Con esta condición, esta nueva lógica (*logística*¹⁰, Scholz, 1968, p. 91) puede presentarse como dogmática y absolutista lo que la impulsa a desarrollarse hacia otras perspectivas, así:

-
- 8 “...de ahí su posición bastante paradójica: las leyes lógicas, por medio de una interpretación conveniente, podrían encontrarse dentro de sus teoremas; sin embargo, no se puede decir que ella [la lógica] las demuestre, porque cualquier demostración presupone precisamente la validación de las leyes que regulan sus desarrollos; habría entonces un círculo vicioso”.
- 9 “Esta actitud es particularmente neta en Peano y en los matemáticos italianos agrupados alrededor de él. Ellos no se proponen expresamente, dice Couturat, un sistema lógico completo y coherente; inventaron la notación para poder escribir en símbolos las proposiciones matemáticas y desarrollaron sus algoritmos en la medida que tuvieron necesidad para analizar y verificar las demostraciones matemáticas”.
- 10 “La *Logística* es la primera lógica formal construida de manera estrictamente sintética [...] es la primera lógica que sube metódicamente de lo simple a lo complejo”. H. Scholz : *Abriss der Geschichte der Logik*, 1931. Traducción francesa: *Esquisse d'une histoire de la logique*. Paris, Aubier-Montaigne, 1968.

- Se extiende el dominio de la nueva lógica, de la matemática al conjunto de las ciencias (física, biología, psicología, fisiología, teoría de circuitos eléctricos...). De manera que, amplia y flexibiliza el instrumento lógico hacia nuevas lógicas. Enriquece el lenguaje con el fin de dar cabida a enunciados de tipo imperativo o normativo aparte de los declarativos. Esta lógica tiende entonces a ser una *lógica general* y no solamente un lenguaje para uso matemático¹¹.
- La nueva lógica se propone despejar y enunciar explícitamente las leyes de la deducción, presentándola bajo la forma de una teoría deductiva axiomatizada que es progresivamente impulsada hacia una *formalización*. Así, con la simbolización del discurso lógico y la introducción sistemática de los procedimientos de cálculo, en donde se pretende borrar cualquier llamado a la *evidencia*, se pasa así de una *axiomática ingenua*, intuitiva a una *axiomática completamente formalizada*, reduciendo la aplicación de las reglas de cálculo a signos. De esta manera se puede controlar objetivamente el proceso de desarrollo del lógico cuando sigue exactamente las reglas de juego propuestas, dejando fuera cualquier discusión sobre el valor mismo de ese sistema de reglas. Es así que, el desarrollo de la formalización ha obtenido un desarrollo inimaginable.
- Fuera del imperio axiomático, se prevé otros modos de concepción de la lógica, por ejemplo Wittgenstein y Post, para el cálculo de proposiciones, proponen las *tablas de verdad*, lo cual conduce a un procedimiento de decisión: se puede reconocer de manera directa si una fórmula dada de cálculo es o no una ley de lógica. Calcular, es entonces, una forma de actividad para lo cual se necesitan ciertos *preceptos* para su realización y no se necesitan los axiomas a la base de este cálculo, que se justificarían dentro de una concepción absolutista de la lógica. Gentzen, a su vez, construye un "cálculo de secuencias", de gran simplicidad y homogeneidad que tiene además la ventaja de ser un método de "deducción natural".
- Después de varios desarrollos diferentes a la tesis logicista, nos acercamos a una lógica más neutra con respecto a las tesis de fundamentación de las matemáticas, dejando, en parte, el absolutismo lógico. Wittgenstein, en el *Tractatus Logico-philosophicus*¹², vacía de cualquier substancia el con-

11 Carnap se propone dar las bases al Lenguaje de la Ciencia a partir de los presupuestos de su concepto de la lógica.

12 Publicada en los *Annalen des Naturphilosophie*, Leipzig 1921, luego en Londres por Kegan Paul, edición bilingüe, introducción de Russell, 1922. Traducción francesa de P. Klossowski, París, Gallimard, 1961.

tenido de la lógica y la reduce a la pura forma. Las proposiciones de la lógica son *tautologías*, privadas de cualquier contenido (Wiitgenstein, 1961, pr. 5.43):

“las proposiciones de la lógica dicen la misma cosa, a saber: nada”.

Igualmente surgen las primeras lógicas trivalentes y además múltiples lógicas nuevas, creando de esta forma una *revolución epistemológica*, sabiendo por ejemplo, que una tautología en un sistema lógico puede cesar de serlo en otro sistema. Por otro lado, con Hilbert (Hilbert, Bernays, 2002), la selección del sistema lógico es libre, cuya única condición es no caer en la contradicción (permitir a la vez demostrar una proposición y la misma proposición afectada por la negación).

En este sentido, Carnap presenta así el *principio de tolerancia de la sintaxis* (Carnap, 1937, pr. 17):

“Nuestro problema no está en proclamar las prohibiciones, sino llegar a convenciones ... en lógica no hay moral. Cada uno es libre de construir a su manera su propia lógica, es decir su propia forma de lenguaje”.

En consecuencia, el absolutismo y su fundamento realista cesan de imponerse al lógico como dogma, llegando a un equilibrio entre el razonamiento más o menos intuitivo de los primeros lógicos y del cálculo ciego sobre signos de los desarrollos posteriores.

Basados en estos desarrollos de la Lógica Matemática se distinguen varios ejes de estudio:

- El cálculo de proposiciones o enunciados, el cual estudia las proposiciones desde dos conceptos: la bivalencia (si la proposición es verdadera o falsa) y la verifuncionalidad (determinar el método o función de verdad que la valide). Aquí se van a despejar las leyes y propiedades fundamentales que permiten explicar el concepto de inferencia válida en virtud de la forma lógica, comprendiendo así la sintaxis y la semántica del lenguaje dado.
- El cálculo de predicados, toca la estructura de las proposiciones o enunciados elementales o atómicos. Este cálculo es más rico y complejo que el anterior pero conserva las principales propiedades, de manera que las proposiciones, consideradas como atómicas, es decir indivisibles, se analizan en un símbolo incompleto y una cadena de símbolos o argumentos que lo completan.

- Lógica modal y plurivalente, caracterizada esencialmente por el empleo de ciertos operadores y la admisión de otros valores diferentes al verdadero y falso.

4. NOCIÓN DE LENGUAJE

La lógica Matemática en su desarrollo vira hacia una disciplina altamente especializada y diversificada, en la cual la noción de *lenguaje* se vuelve central (como se ve en la presentación de Carnap), dando a la Lógica un esquema conductor para sus aplicaciones y una cierta unidad dentro de sus especialidades. Se admite así, que se le debe a Frege (1879, 1999), la primera empresa de construcción de un *lenguaje formalizado*, en donde la lógica matemática no es otra cosa que el estudio de la lógica que procede de la construcción de un lenguaje formalizado; es un *Lenguaje Artificial* con respecto al Lenguaje Natural u Ordinario, en el cual se presentan ambigüedades y lagunas no propias a un lenguaje lógico.

En su obra *Begriffsschrift* (Frege, 1879, 1999), presenta un *lenguaje* que expresa una representación lógica con la exigencia de explicitar lógicamente las relaciones de deducción y precisar los términos que tienen como objeto las definiciones precisas; así mismo que su dinámica determinada por reglas y operaciones explícitas, en donde las proposiciones son compuestas y derivadas.

De su lado, Wittgenstein en el *Tractatus*, busca los *límites del lenguaje*, marcando la diferencia entre lo “decible” (lógico) y lo “indecible” (lo que se muestra), que determina a su vez las márgenes de las expresiones con *sentido* y las expresiones *sin sentido*.

De esta manera, el *lenguaje* se presenta bajo diferentes connotaciones en el contexto de la lógica matemática, cuya terminología no está completamente fijada y muestra diferentes puntos de vista (Rivenc, 1989, pp. 36-37)¹³:

- Ciertos autores describen como *lenguaje*, lo que Church (1956) llama, *sistema logístico* o *cálculo no interpretado* (según Carnap, 1934), por ejemplo, el sistema formado por los símbolos primitivos dados y las reglas de formación y de transformación, sin ninguna consideración semántica.
- El Carnap (1939), presentado en este artículo, amplía la noción de lenguaje a elementos en vía de la realización de comunicación, incluyendo la interpretación o la semántica.

13 François Rivenc nos presenta estas connotaciones. *Introduction à la logique*. Paris, Payot, 1989; p. 36-37.

- El Lenguaje como un conjunto de símbolos con las reglas de formación de las formulas y sus interpretaciones; los axiomas y reglas de inferencia serían consideradas ulteriormente como parte de la “definición de lógica” para este lenguaje.
- El Lenguaje (formalizado) es el que exhibe, manifiesta o reproduce la estructura o la *forma lógica*, lo que no se puede realizar con un lenguaje ordinario. La formalización puede ser regulada por un “lenguaje lógicamente perfecto”, que reflejaría “como un espejo” la estructura lógica del mundo (punto de vista de Russell¹⁴ y Frege).
- Quine (1977, cap. V)¹⁵ pretende la simplificación de la teoría lógica con el fin de generalizar los artifices de la notación de la lógica moderna y poder extenderla a los enunciados particulares del lenguaje ordinario.

Estas diferentes connotaciones muestran los diferentes desarrollos de un lenguaje lógico formalizado, en el cual a nivel general (salvo en la primera) se puede aseverar las tres disciplinas que lo conforman, propuestas por el Carnap de 1939 (Sintaxis, Semántica y Pragmática).

Igualmente, dentro de estos desarrollos, a la pregunta sobre las condiciones de posibilidad y validez de este lenguaje, se pueden reconocer dos ejes principales del lenguaje de diversa naturaleza, presentados dentro del *Tractatus* de Wittgenstein (Hottois, G., 2002, pp. 138-139), así:

- a. La naturaleza proposicional y analítica, correspondiente a la sintaxis del lenguaje.
- b. La naturaleza representacional, correspondiente a la semántica del lenguaje.

Naturaleza Proposicional y Analítica

La *analicidad* del lenguaje corresponde a la posibilidad que tiene éste de descomponerse en elementos y en la existencia de *elementos últimos y estables*

14 Russell en *The Philosophy of Logical Atomism*, 1918 dice: “Un lenguaje lógicamente perfecto [...] sería completamente analítico y revelaría como un espejo la estructura lógica de los hechos afirmados o negados. El lenguaje construido en los *Principia Mathematica* es concebido como siendo un lenguaje de este tipo. Es constituido de una sintaxis y no contiene vocabulario; [pero] está concebido para que al agregarle un vocabulario se tendría un lenguaje lógicamente perfecto”. Citado por François Rivenc *Introduction à la logique*. Paris, Payot, 1989; p. 37.

15 QUINE, Willard van Orman: *Word & Object*, MIT Press, 1960; Traducción francesa: *Le Mot et la Chose*, par Dopp y Gochet; Paris, Flammarion, 1977; capítulo V.

que le dan al lenguaje su condición de existencia. Así mismo, el elemento constitutivo del lenguaje es la *proposición*, la cual no tiene *sentido* sino cuando es totalmente analizable: *comprender* una proposición es, en alguna medida, efectuar su análisis. Este corresponde a presentar una explicación radical (sin ninguna indeterminación), en donde el contenido de la proposición debe ser “presentada delante de nuestros ojos”.

Se puede distinguir varios tipos de *proposiciones*: la proposición *elemental o atómica* (“p”), la proposición *compuesta* (“p v q”) y dos tipos de proposiciones *especiales*: las *tautologías* y las *contradicciones*.

Una *tautología* es una proposición del cálculo de proposiciones cuyo valor es *Verdadero* siempre, en cualquier tipo de interpretación. Su verdad no depende de lo que pasa en el *mundo* inscrito porque es verdadera en cualquiera de los *mundos*. Una *contradicción o antilogía*, al contrario, su valor es *falso* siempre.

Así, por ejemplo una proposición como “p v ¬p” es una tautología, que corresponde a la definición misma del conector “v”, se dice que las tautologías son verdaderas en virtud de su *forma lógica* y no por la interpretación sobre el mundo. Las tautologías expresan principios de la lógica, por ejemplo, algunas de ellas:

- p ≡ ¬¬p: principio de identidad proposicional.
- p v ¬p: principio del tercer excluido.
- ¬(p ∧ ¬p): principio de no- contradicción.
- (p v q) = (q v p): principio de conmutatividad de “v”.
- (p ∧ q) = (q ∧ p): principio de conmutatividad de “∧”.

Así mismo, Wittgenstein distingue dos tipos de análisis:

- A partir de signos simples, que son los *nombres (análisis nominal)*, la proposición presenta así un sentido perfectamente determinado. La proposición elemental o atómica es “verdadera” o “falsa” y no comporta partes “verdaderas” o “falsas” por sí solas.
- A partir de la noción de “verifuncionalidad” que une las proposiciones elementales.

El primer tipo responde a la noción esencial de articulación. Si los elementos constitutivos del lenguaje son proposiciones (eje proposicional), significa que las palabras aisladas, sin articulación, no son lenguaje por sí solas. La proposición analizada es la proposición expresada de tal manera, que la articulación del sentido aparezca en su estructura.

Por ejemplo, para dos proposiciones elementales: “p” (“está nevando”) y “q” (“hace sol”), las dos proposiciones verdaderas, la proposición compuesta “ $p \wedge q$ ” (“está nevando y hace sol”), está articulada y es verdadera, según el conector “ \wedge ”.

El segundo tipo responde a la función de verdad¹⁶ y la proposición se expresa, por ejemplo, según una *Tabla de Verdad*¹⁷ de proposiciones elementales. De esta manera, el lenguaje puede ser descompuesto en sus elementos, señalando que existen elementos últimos y estables y la proposición tiene sentido si es completamente analizable y comprenderla es efectuar este análisis integral, excluyendo toda ambigüedad.

Por ejemplo, la Tabla de Verdad de la proposición compuesta “ $p \wedge q$ ” corresponde a:

P	Q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Aquí, “ $p \wedge q$ ” es verdadera si y solamente si “p” y “q” son verdaderas y falso en todos los otros casos.

La analicidad exige un procedimiento legítimo para explicitar lo compuesto y la elementalidad, de manera que se presente una relación biunívoca entre los nombres y objetos representados: un nombre por un objeto y un objeto por un nombre. Lo “compuesto” posee dos propiedades: la función de verdad de las proposiciones elementales y la propiedad de “generalidad”¹⁸ que depende

16 La Función de Verdad se identifica a toda proposición compuesta de la Lógica de Proposiciones cuyos valores varían a partir de los valores de los enunciados simples que la componen. El cálculo de estas variaciones se puede hacer con la ayuda de una *Tabla de Verdad*.

17 *Tabla de Verdad* entendida como un procedimiento de decisión, permitiendo de una manera semimecánica, saber en qué caso una expresión es verdadera y en particular de decidir si la expresión es verdadera para todas las substituciones de valores de sus variables. Para tal uso, no se necesita ninguna utilización de la imaginación, como es el caso de la demostración.

18 La proposición “(para todo x) y x”.

de la manera como las variables se especifican, esta última se asegura por las proposiciones compuestas. La “elementaridad” asegura la finitud y la univocidad del análisis con las proposiciones elementales e igualmente define y estabiliza el sentido del lenguaje.

De esta manera, “Tener sentido” y “ser analítico” son equivalentes y en estos casos se distinguen el “sentido y la denotación” (según Wittgenstein):

*Sentido y denotación*¹⁹

El sentido de una proposición está dado por su estructura lógica, que presenta las condiciones de posibilidad de la proposición, de ser *verdadera o falsa*. Pertenece al campo de la sintaxis y *denota o reenvía* a los objetos extralingüísticos que son las referencias de los nombres, sin los cuales el lenguaje se quedaría sin referente, llevaría al infinito o a un círculo vicioso. Los objetos fijan la semántica del lenguaje. Es así que el sentido lleva a la *denotación* del objeto a través de un cálculo. El sentido y la denotación son contrarios en su orientación: el sentido es intralingüístico (está dentro del lenguaje lógico) y la denotación y por tanto la verificación de la verdad de la proposición es extralingüística poniendo en relación el lenguaje y la realidad

En esta perspectiva, toda proposición tiene un *sentido*; la *denotación* no se aplica sino a las expresiones simples (palabras), no a las proposiciones o enunciados (que sean simples o compuestos). Las expresiones que tienen una denotación se asimilan a nombres propios y los nombres propios no tienen un sentido, ellos designan o hacen referencia a una cosa, objeto o persona.

Técnicamente, comprender el sentido de una proposición es saber cómo el enunciado o proposición puede ser resuelto, de una manera transparente (“tabla de verdad”, un procedimiento de cálculo o un algoritmo), de manera que una proposición de la forma “ $p \wedge q$ ”, indique que no es verdadera sino en el caso que “ p ” y “ q ” son verdaderas simultáneamente.

¹⁹ Esta problemática del “sentido y denotación” (denotación entendida también como referencia) se ha presentado desde los desarrollos de la *Escolástica*, con la diferencia entre *vox* (signo, sonido) y el *sermo* (significado). G. Frege va a traer la problemática en 1892 (*Sinn und Bedeutung: “Ecrits Logiques et Philosophiques, Paris, Seuil, 1971, pp. 102-126*), al interrogarse sobre el límite exacto de la relación de identidad (Si “ $A=B$ ”, se refiere al significado del signo como tal o a lo que él representa?). La diferencia entre Wittgenstein y Frege, es que el primero concierne la articulación de los términos y solo los nombres tienen una denotación o una referencia y la proposición articulada tiene un sentido; y para Frege tanto las proposiciones como los nombres tienen sentido y referencia.

Naturaleza Representacional del Lenguaje

El lenguaje se refiere a la realidad extralingüística, así la proposición compuesta no se verifica inmediatamente, porque ella es el resultado de operaciones de cálculos o de combinaciones cuya efectuación es independiente de la inspección de los objetos reales. De manera que, la relación *lenguaje-realidad* se produce sobre la proposición elemental, donde existe el “hecho” que la proposición describe.

Se puede decir que estos lineamientos del lenguaje lógico, nos conducen a presentar las *Características del Lenguaje*, así:

- Explícito: la necesidad de presentar una anotación material, en donde el *sentido* de la proposición sea claramente expresado.
- Unívoco: sin ninguna ambigüedad, ni plurivocidad que pueden llevar a la confusión y a la indecisión: *a cada nombre corresponde un objeto*.
- Funcionalidad: es el complemento *operacionalista* de la exigencia de la unívoco: *a todo signo corresponde una función*.
- Distinción de niveles lógicos: debe ser claro si se está tratando de lo *real* (*hechos*) o del lenguaje lógico o *lenguaje objeto* (proposición atómica, proposición compuesta, nombre...), o del *metalenguaje*, lo que evitaría la *confusión de los tipos o categorías* del lenguaje (Russell²⁰, Ryle, ...). En esta última opción, debe precisarse a qué nivel *metalingüístico* pertenece. Una distinción importante es la del *nombre propio* y los *predicados*.

El nombre propio designa un objeto (una referencia extralingüística), pertenece al *lenguaje de los objetos*, es decir un lenguaje inmediatamente referencial (directamente articulado al real extralingüístico).

El término predicativo describe una clase de objetos, es decir que se refiere a una colección de nombres propios²¹. El predicado pertenece, entonces, a un nivel “metalingüístico”: aquello que designa un predicado no es un objeto extralingüístico sino un constructo lingüístico (*la clase*). Las “casas son azules” pero “el azul” como cosa no existe. Así, dentro

20 RUSSELL, Bertrand (1910).

21 Para aclarar, veamos un ejemplo en lenguaje ordinario: para afirmar que “las casas son azules”, es necesario identificar ciertas cosas como “casas” y designarlas como siendo “casa”. La palabra “casa” funciona como un “nombre propio” del objeto designado.

de un lenguaje lógico la naturaleza o uso de un término debería expresarse claramente²².

5. ELEMENTOS DEL LENGUAJE FORMAL

A nivel general, se pueden discernir los elementos del lenguaje a partir de las nociones presentadas, se tiene: el *Metalinguaje y Lenguaje Objeto*, los *Símbolos y Signos* y las *Reglas*.

Metalinguaje y Lenguaje Objeto

La dinámica de una Lenguaje formal produce una cadena de símbolos contruidos y estructurados conforme a reglas y que pueden ser interpretados posteriormente, como por ejemplo:

Para "1+1=4" si y solamente si 1=2

Proposición elemental "p: 1+1=4"

Proposición elemental "q: 1=2"

Proposición compuesta, la cadena de símbolos construidos sería:

"(q ⊃ p) ∨ (p ⊃ q)" o "p ≡ q"

Según la presentación de Carnap, el lenguaje de la cadena de símbolos es el *Lenguaje Objeto*, pero la explicación de esta cadena de símbolos necesita un lenguaje, que puede ser el español corriente, eventualmente enriquecido de notaciones y de términos matemáticos cuyo uso será requerido, en ciertos casos; tal lenguaje se llama un *metalinguaje* o lenguaje del observador²³.

El *metalinguaje* debe disponer primeramente de los *nombres* de los símbolos, expresiones y formulas del lenguaje objeto; así mismo debe disponer de las *variables* que permiten hablar de manera general de símbolos o expresiones (las variables cuyos valores posibles son los símbolos o expresiones del lenguaje objeto); e igualmente las *constantes lógicas o conectores*²⁴. De esta manera permite la formación de proposiciones estructuradas según las reglas establecidas.

22 Gran parte de los errores lógicos vienen de esta falta de distinción que son corrientes en el lenguaje natural.

23 El prefijo *meta* marca la diferencia que separa el lenguaje objeto propiamente dicho y el discurso sobre el sistema.

24 Es posible utilizar la convención familiar según la cual se obtiene un nombre de una palabra o de un símbolo incluyendo las comillas (" ") en esa palabra o símbolo, que significa *mencionar* la palabra o símbolo encerrado en comillas. Según esta convención, se puede decir por ejemplo, a propósito de uno de los conectores del lenguaje objeto: "¬" es un símbolo lógico.

A nivel general, el *metalenguaje* hace parte de la estructuración de niveles lógicos que ha sido definido para corregir los problemas lógicos de autoreferencia o reflexibilidad e igualmente de indecidibilidad, de manera que no se pueda incluir en el conjunto E el nombre que permite designar este conjunto y el criterio o término que lo identifica, con el fin de que un nombre que designa los objetos, no sea utilizado para designarse a sí mismo como uno de los objetos; se diferencia entonces el conjunto “E” del término que permite identificar este conjunto, respetando así los diferentes niveles lógicos²⁵.

Símbolos y Signos

La lógica, por vocación, renuncia a presentar una teoría general del conocimiento simbólico, se preocupa solamente de construir su edificio propio sobre una base cuya solidez sea reconocida generalmente. Así, el *símbolo* es un ser abstracto, como el utilizado en matemáticas y los *signos* trazados en papel, pantalla de computador, tablero...etc, sirven solamente para evocarlo²⁶.

De esta manera se tienen como signos primitivos del lenguaje, por ejemplo, los siguientes:

Variables

- $p, q, r, s, p_1, q_1, r_1, s_1 \dots$: representan proposiciones atómicas o elementales.
- $A, B, C \dots$: representan variables metalingüísticas para representar cualquier tipo de proposición.

Constantes lógicas y conectores

Son instrumentos de articulación de las proposiciones, razón por la cual la proposición puede estructurarse como “función de verdad”; son considerados como signos puramente operatorios, no tienen sustancia propia, no representan nada y por consecuencia no tienen ninguna representación o referencia en el mundo de los hechos, ellos son, entre otros:

- \neg : no;
- \supset : implica;
- \vee : o (disyunción);
- \rightarrow : si...entonces (condicional);

25 El metalenguaje fue planteado por Russell en su *Teoría de Tipos* y en Hilbert con la presentación de la *Metamatemática*.

26 Es la misma situación del matemático que puede estudiar un círculo cuyo diámetro es igual a aquel del sol, trazando solamente una figura muy aproximada de ese círculo.

- \leftrightarrow : si y solamente si; \equiv : bajo la forma de equivalencia, se usa para definiciones.

6. SINTAXIS Y SUS ELEMENTOS

En síntesis y de acuerdo a los lineamientos aportados por Carnap y Wittgenstein, la sintaxis de un lenguaje puede ser vista como la que concierne su estructura y sus propiedades, fuera de toda referencia a una interpretación intuitiva de sus símbolos (Martín, 1964, p. 33). Martín nos presenta dos formas de ver sus elementos: en el lenguaje mismo y con respecto a otros lenguajes.

Lenguaje mismo

Una de las primeras tareas de la sintaxis es la de formalizar las convenciones de escritura, en la cual se introducen *abreviaciones* para aligerar la escritura o para definir ciertas propiedades del lenguaje. Se puede, por ejemplo, anotar " $A \vee B$ " la expresión " $\neg A \supset B$ ", en donde " A " y " B " son fórmulas, o " $A \& B$ " la expresión " $\neg(A \supset \neg B)$ ". En estas anotaciones los signos "&" y " \vee " pertenecen al "metalenguaje". El interés de estas abreviaciones se apreciará cuando se demuestre que ellas poseen ciertas propiedades, por ejemplo que " \vee " y "&" son conmutativos, en el sentido que " $(A \vee B) \supset (B \vee A)$ " y viceversa " $(B \vee A) \supset (A \vee B)$ ".

Además, la sintaxis permite presentar *definiciones* nuevas enunciadas en el metalenguaje, que posibilitan la introducción de nuevas nociones importantes para el desarrollo de la sintaxis. Una primera noción es la *deducción*, que generaliza la definición de *demostración*, y representa la tarea más importante de la sintaxis.

La *deducción* obedece, entonces, a las reglas usuales de la lógica, utilizando el principio de *recurrencia*; las *demostraciones* en sintaxis comportan elementos intuitivos y utilizan no solamente los recursos habituales de la lógica, sino también aquellas de las matemáticas. De ahí, una dificultad preliminar (que ya hemos mencionado): un círculo vicioso al emplear una forma de razonamiento típicamente matemático para estudiar un lenguaje lógico, cuando justamente se espera que este lenguaje dé luces sobre la naturaleza de la deducción lógica en general y particularmente de la deducción en matemáticas²⁷.

27 De esta manera, se define el alfabeto de un lenguaje lógico como un *conjunto* de símbolos, donde se distinguen *sub-conjuntos*. Las variables se han numerado, tales a_1, a_2, \dots , utilizando la cadena de *números enteros*. Pero si, para construir una lógica que permite formalizar las matemáticas, se debe recurrir a

De manera que, la tarea de la lógica en general y de la *deducción* en particular consiste en presentar y guiar un discurso coherente sobre las formas del discurso mismo, con el espíritu de conferir la *consistencia* y evidentemente se deben utilizar formas matemáticas elementales que no sean superiores a las formas lógicas, para romper el círculo vicioso anotado.

Así, una de las tareas de la sintaxis, en la deducción, es discernir el uso de razonamientos matemáticos y de caracterizar de manera precisa la matemática a la cual se pudiere recurrir, según el objetivo que se busque²⁸ (Martín, 1964, pp. 46-47). La deducción generaliza, entonces, la demostración, facilitando así la efectividad, el rigor y su posible mecanización de todo el sistema de la sintaxis lógica.

Para desarrollar una *deducción* efectiva se consideran tres propiedades definidas, así:

Consistencia: el resultado de la aplicación de reglas de la sintaxis no puede producir simultáneamente una proposición y su negativa; llamada no-contradicción por Hilbert (que “ p ” y “ $\neg p$ ” sean verdaderas).

Completitud: asegura la estructuración de la totalidad de las proposiciones verdaderas por medio de un conjunto de reglas que va a garantizar tanto la completitud como la consistencia, o bien los resultados de la aplicación de las reglas de sintaxis es no-completo y no-consistente.

Decidibilidad: si existe un procedimiento efectivo²⁹ que permite para toda fórmula arbitrariamente dada, decidir si es o no una tesis³⁰.

nociones específicamente matemáticas, se encuentra un problema que debe ser resuelto (objeción de Poincaré a los primeros trabajos de Hilbert).

28 Es la posición adoptada por Hilbert, que perseguía fundar las matemáticas por medio de la *formalización*, es decir reconstruirlas con máxima solidez, toma como instrumento metamatemática una *matemática débil* como la aritmética finitista. En esta *aritmética concreta*, los objetos y sus propiedades se toman con plena certeza. Una *cifra* se considera como una *abreviación* (para una cadena de “1”: 2 abrevia la cadena “1,1”...). Las operaciones de adición y de multiplicación se definen concretamente a partir de la noción de *cifra*. Sus propiedades se establecen por medio de una *inducción* completa apoyada en una *construcción efectiva* de la cadena de enteros. Aquí, hay una deducción que se basa en la construcción concreta de cifras.

En analogía a la designación de Hilbert, los lógicos de Warsaw (Lukasiewicz y otros) han hablado del “cálculo meta-proposicional”, de *metalógica*. Sin embargo la palabra “metalógica” es una designación para el subdominio de la sintaxis que utiliza frases lógicas en un sentido estricto.

29 *Procedimiento efectivo* es aquel que permite llegar a un resultado, al término de un número finito de etapas, en las cuales solo se utilizan operaciones definidas con anterioridad. Esta definición es un poco imprecisa, se vuelve más rigurosa, si se traduce a lenguaje matemático utilizando la teoría de las *funciones calculables* (funciones recursivas que incluyen los procedimientos efectivos).

30 Desgraciadamente, solo los sistemas bastante pobres en medios de expresión son decidibles.

Con estas propiedades se perfila una *sintaxis* como *cálculo* que nos ha presentado Carnap en su *sintaxis lógica*, en donde es la aplicación de reglas formales sobre *signos* desprovistos de contenido, que los lenguajes pueden desarrollar los cálculos aplicados a la deducción y por lo cual estos lenguajes evolucionan en su estructura sintáctica. Así, son estas reglas que retoman toda su importancia, porque son ellas que van a determinar la *formación* de las expresiones, especificando las propiedades, la relación de signos, las posibilidades de estructuración entre ellos, que proporcionan lo que se llama una “expresión bien formada” (EBF). Así, a partir de las *reglas de formación*, se puede tener:

- Toda variable es una “EBF”.
- Si “p” es una “EBF”, entonces “ $\neg p$ ” es una “EBF”.
- Si “p” y “q” son “EBF”, entonces “ $p \vee q$ ” es una “EBF”.

Así mismo, las reglas sintácticas aseguran la *transformación* de las expresiones en una deducción, donde se está en el dominio de lo operativo, del cálculo en sí mismo, y que en este caso del cálculo es un procedimiento efectivo, casi mecánico, que proporciona los resultados de la deducción. El procedimiento más simple para la construcción de un cálculo consiste en seleccionar algunas frases como frases primitivas (algunas llamadas como postulados o axiomas) y algunas reglas de inferencia.

Las *Reglas de Transformación* muestran qué “manipulaciones” son toleradas y cuáles no, es decir las reglas que no alteran la validez dada como punto de partida; por ejemplo, la condición para que una regla de sustitución, que puede reemplazar en una proposición válida una variable por una “EBF” y que puede producir una nueva proposición válida.

El uso de estos dos tipos de reglas asegura la presentación del esquema deductivo, como:

Una cadena de “EBF”, las cuales pueden ser: un axioma, la consecuente de tal esquema, en donde el antecedente precede el consecuente, la última proposición del esquema es un teorema (objeto de la demostración y constituye una “EBF” muchas veces con el mismo título de los axiomas, puede ser reutilizado en otra demostración y puede ser una proposición refutable cuya negación se deriva del sistema).

Sintaxis en las relaciones con otros lenguajes

En este caso, la *sintaxis* puede ser considerada según las relaciones entre dos o más lenguajes, provistos de léxicos, y de reglas de formación y de trans-

formación semejantes; se pueden presentar, por ejemplo, dos lenguajes donde uno de los dos es más *fuerte* que el otro (S y S^1 -mas fuerte-), de manera que toda formula demostrable en S es demostrable en S^1 , pero ciertas formulas demostrables en S^1 no pueden ser demostrables en S. El interés de contar con este tipo de sintaxis surge del hecho que es posible demostrar ciertas propiedades de un sistema en relación con un sistema más débil, por ejemplo, la aritmética elemental en relación con la teoría de conjuntos³¹.

Esta sintaxis de relaciones, proporciona dos propiedades importantes del lenguaje: la *fuerza* y la *consistencia relativa*. Martin (1964, pp. 40-51) presenta estas propiedades como la posibilidad de demostrar y de traducir un lenguaje en otro. Así, la *fuerza* es comparable al número y a la cualidad de los medios de expresión del lenguaje, de ahí el interés de distinguir netamente en la sintaxis del lenguaje, lo que es del recurso de una teoría débil o de expresiones elementales y lo que exige una teoría fuerte o expresiones fuertes.

7. CONCLUSIONES

A lo largo de este estudio se ha puesto el acento sobre el *lenguaje formal*, donde se considera la *formalización*, como herramienta para la construcción de este tipo de lenguaje, dando a la *deducción* y por lo tanto a la *sintaxis* el rigor y la precisión necesaria para fundamentar el desarrollo y la dinámica de un lenguaje formal. Una de las preguntas que resulta de esta formalización es el alcance de esta, es decir su *límite*, o la pregunta ¿hasta dónde se llega con la formalización en un lenguaje, en general y de la síntesis en particular?

En este sentido, se conocen ciertos límites trazados históricamente: el teorema de Lowenheim (1915) y sus etapas de generalización de Skolem (1920-1925), el teorema de Gödel (1931), o los límites presentados por los lógicos de los años 36 (Turing, Post, Church, Kleene). Límites que son alertados desde las llamadas *paradojas*, como la de "El Mentiroso"³² planteada por Bertrand Russell, "cadenas de números en cadenas de letras" por Richard, "la clase de clases" de B. Russell...etc. Paradojas que son el índice de una carencia fundamental de la lógica confrontada a enunciados indecidibles, donde no se tienen aún soluciones completas. Lo que es interesante, en el planteamiento de estos límites, es la

31 En este sentido Gödel demostró en 1939, su teorema, presentando la noción de consistencia relativa donde un sistema $S1$ es consistente con respecto a un sistema S, si la consistencia de $S1$ contiene la consistencia de S.

32 El poeta cretense, Epiménedis (VII siglo, a.c.) afirma: "todos los cretenses son mentirosos" (p). Cómo decidir de la valor de verdad de "p"? Si "p" es verdad, como Epiménedis es cretense y entonces mentiroso, "p" debe ser falso. Se necesitaría que "p" sea falso para poder ser verdadera, lo que es absurdo.

estructuración de problemas, que van a desarrollarse y que tienen como punto de partida el *teorema de limitación*, de Gödel³³. Él va a demostrar que existen lenguajes formalizados de una cierta potencia que contienen proposiciones que corresponden a enunciados verdaderos pero, sin embargo son indecidibles o sin procedimiento de demostración.

Las problemáticas tratadas a partir de Gödel, corresponden, en la mayoría, a los procedimientos decidibles referidos a la metamatemática y a la decidibilidad en sí misma, como aplicabilidad de estos procedimientos. Se plantea de un lado, la necesidad de una metamatemática estrictamente finitista, lo contrario llevaría a una regresión al infinito. De otro lado, se requiere una metamatemática totalmente operacional. Aquí, se presenta un límite fundamental a la decidibilidad y a la formalización, en la cual el conjunto de las matemáticas no podría fundamentarse enteramente sobre procedimientos decidibles.

De esta manera, lo que enseña esta lógica y su sintaxis es “la delimitación del campo de lo que se puede formalizar y de lo que no se puede formalizar”, sacando a la luz la existencia de una matemática aceptada como formalizada, pero también la importancia de certezas lógicas inductivamente adquiridas pero que ha sido imposible de transformar en teoremas y de formalizar completamente (Tesis Turing-Church); mostrando en los dos casos, la complejidad de los desarrollos introducidos por la formalización de la sintaxis y la riqueza de una ciencia lógica muy viva.

Igualmente, estos desarrollos de formalización ampliaron, de alguna forma la imaginación abstracta de los lógicos, matemáticos y filósofos, produciendo herramientas e hipótesis innumerables, aplicables al análisis de casi cualquier hecho complejo, mostrando el género de problemas susceptibles de recibir una solución o aquellos que deben ser dejados porque van más allá de cualquier solución.

8. BIBLIOGRAFÍA

BLANCHÉ, Robert – DUBUCS, Jacques. «La Logique et son Histoire». Paris, Armand Colin, 1996.

BLOOMFIELD, LEONARD. “Linguistic aspects of Science”. CHICAGO, Illinois, The University of Chicago Press, 1939; 3th. ed. 1946. En: International Encyclopedia of Unified Science. Vol. I. Number 4. p. 1-57.

33 “Sur les propositions formellement indécidables des *Principia Mathematica* et des systèmes apparentés I” 1931.

- CARNAP, Rudolf. "Formalization of logic". Cambridge, Massachusetts, Harvard University Press, 1943. 159 p.
- _____. "Introduction to Semantics". Cambridge, Massachusetts, Harvard University Press, 1948. 252 p.
- _____. "Logical syntax of language". First published, Kegan Paul, Trench, Trubner & Co. Ltd. Reprinted 2000, Routledge, London. Reprinted 2001, Routledge, London.
- _____. "Foundations of logic and mathematics". Chicago, University of Chicago Press, May 1939; 4th. ed. 1947. En: *International Encyclopedia of Unified Science*: vol. 1. Number 3. pp. 1-71.
- FREGE, G. «Idéographie». traduction, préface, notes et index par Corine Besson. Postface de J. Barnes. Paris, Librairie Philosophique J. Vrin, 1999.
- HILBERT, David y BEERNAYS, P. «Fondements des Mathématiques 1», traduction de l'ouvrage «Grundlagen der Mathematik 1» (Springer), 2a. ed. 1968. Paris, Ed. l'Harmattan, 2002, 2 vols.
- HOTTOIS, Gilbert. «Penser la Logique ; une introduction technique et théorique a la philosophie de la logique et du langage», 2eme, ed. Bruxelles, De Boeck Université, 2002.
- GÖDEL, Kurt. «Sur les propositions formellement indécidables des Principia Mathematica et des systèmes apparentés I». 1931. Dans «NAGEL, E.-NEWMAN, J. R.- GODEL, K.- GIRARD, J. I. Le Théorème de Gödel». Paris, Ed. Seuil, 1989.
- LARGEAULT, Jean. «La logiqu». Paris, PUF, 1993.
- KLEENE, Stephen C. "Logique Mathématique". Traduction de Jean Largeault. Paris, Librairie Armand Colin, 1971.
- LEPAGE, François. "Eléments de Logique Contemporaine". Montréal, Les Presses de l'Université de Montréal.
- MARTIN, Roger. «Logique contemporaine et formalisation». Paris, PUF, 1964.
- MORRIS, Charles: "Foundations of the Theory of Signs". CHICAGO, Illinois, The University of Chicago Press, 1938. En: *International Encyclopedia of Unified Science*. Vol. I. Number 2. p. 1-59.
- NEURATH, Otto; BOHR, Niels; DEWEY, John; RUSSELL, Bertrand, CARNAP, Rudolf, MORRIS, Charles W. "Encyclopedia and Unified Science". CHICAGO, Illinois, The University of Chicago Press, 1938; En: *International Encyclopedia of Unified Science*. Vol. I. Number 1. p. 1-75.

- PRADILLA RUEDA, Magdalena. "Vers une Epistémologie de la Théorie Informatique". Paris, Université Paris 1-Panthéon Sorbonne, 2008. Thèse Docteur en Philosophie.
- QUINE, Willard van Orman. *Word & Object*, MIT Press, 1960; Traducción francesa: *Le Mot et la Chose*, par Dopp y Gochet; Paris, Flammarion, 1977.
- ROUILHAN, Philippe de. "Frege: les Paradoxes de la Représentation". Paris, Editions de Minuit, 1988.
- SCHOLZ, Heinrich. "Esquisse d'une Histoire de la Logique". Paris, Ed. Aubier-Montaigne, 1968.
- WHITEHEAD, Alfred North, y Bertrand RUSSELL. *Principia Mathematica*. 3 vols. Cambridge, University Press, 1910-1913. 2a. ed. 1925-1927.
- WITTGENSTEIN, Ludwig. «Tractatus Logico-Philosophicus», trad. de G.G. Granger, Gallimard, 1993. «Tractatus Logico-Philosophicus, suivi de Investigations Philosophiques», trad. de l'allemand par Pierre Klossowski. Paris, Gallimard, 1961.