

ALGORITMOS GENÉTICOS EN LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIOFÁNTICAS LINEALES

CRISTIAN C. FORERO*

Recibido: 7 de agosto de 2013 / Aceptado: 20 de julio de 2013

RESUMEN

Este artículo busca presentar el desarrollo de un programa informático basado en un algoritmo genético para solucionar ecuaciones diofánticas lineales con dos incógnitas.

Múltiples problemas de diversos campos de la ciencia pueden solucionarse a través de estas ecuaciones.

Palabras clave: algoritmo genético, ecuación diofántica.

ABSTRACT

This article wants to present the deployment of an computer program based on a genetic algorithm to solve linear Diophantine equations with two unknowns. Many troubles in different science areas can be solved through these equations.

Keywords: genetic algorithm, diophantine equation.

1. INTRODUCCIÓN

El problema enfrentado en esta contribución busca desarrollar un algoritmo genético que permita solucionar ecuaciones diofánticas lineales con dos incógnitas, para tal fin se desarrollara un aplicativo de software en el lenguaje de programación PHP, dicho algoritmo se convertirá en una útil herramienta para la solución de múltiples problemas en diversas áreas del conocimiento como la física, la química, entre otras.

Se desarrolló un algoritmo en php cuya función de costo de ejemplo que fue:

$$30x + 12y = 1200$$

* Ingeniero Electrónico. Candidato a Magister en Ingeniería Industrial. Grupo de Investigación y Desarrollo en Ingeniería de Sistemas(GIDIS) de la Corporación Universitaria Republicana. Bogotá, Colombia. Correo electrónico: ingcamiloforero@urepublicana.edu.co

Se escogió una población inicial de 10 parejas (x,y) de números enteros que se generan aleatoriamente; de esta población, se seleccionan los 5 mejores y estos se reproducen para generar 5 descendientes, para completar la población se agregan 5 parejas de números aleatorios adicionales y se repite el proceso.

2. LAS ECUACIONES DIOFÁNTICAS LINEALES

Una ecuación es enunciado que establece que dos expresiones algebraicas son iguales algunas veces contiene valores desconocidos llamados incógnitas, una ecuación es diofántica cuando solo admite soluciones que pertenecen al conjunto de los números enteros y es lineal cuando involucra constantes y variables cuya potencia máxima es 1.

3. EL PROBLEMA QUE INSPIRO ESTE DESARROLLO

[1] Un hombre va a una tienda de ropa y compra 12 trajes, unos negros y otros grises, por 1200 •. Si los trajes negros valen 30 • más que los grises y ha comprado el mínimo posible de estos últimos, ¿cuántos trajes ha comprado de cada color?

Trajes negros: x

Trajes grises: $12 - x$

Precio de un traje gris: y

Precio de un traje Negro: $y + 30$

La ecuación queda: $x(y+30) + (12-x)y = 1200$

Reduciendo términos semejantes: $30x + 12y = 1200$

4. ALGORITMOS GENÉTICOS

Un algoritmo es un conjunto ordenado y finito de operaciones que permite ejecutar un procedimiento o resolver un problema, un algoritmo es genético cuando utiliza principios de la genética y la selección natural.

Los algoritmos genéticos ganaron popularidad a finales de la década de los 90's, debido en gran medida a las nuevas tecnologías en hardware y la reducción de costo de las computadoras que permite generar desarrollos de bajo costo³.

Los Algoritmos Genéticos trabajan sobre estructuras de cadena que son una representación de una posible solución al problema denominados

cromosomas, estos cromosomas evolucionan a través del tiempo de acuerdo a reglas de supervivencia que privilegian a los que presenten mejor desempeño frente a una función de costo dándoles una mayor probabilidad de a partir de ellos se cree la siguiente generación; adicionalmente pueden agregarse nuevos cromosomas generados aleatoriamente o a partir de una mutación.

En algunos casos para que un elemento de la población pueda pasar a través de la función de aptitud debe ser codificado, este proceso de codificación es clave para permitir que el algoritmo converja de manera más eficiente hacia la solución del problema planteado, en principio la codificación puede realizarse con cualquier alfabeto finito, sin embargo, no todas las codificaciones resultan ser computacionalmente eficientes, es deber del programador dependiendo de la plataforma de software o hardware que elija escoger que codificación resulte mas conveniente.

Luego de haber decidido que codificación usar una serie inicial de cadenas (población) es creada aleatoriamente. entonces una serie de operadores se aplica a la población para crear nuevas generaciones que se espera tengan mejor desempeño; una función de aptitud sirve para medir la calidad de cada cromosoma de la población.

La función objetivo es usada para dar una medida de como los individuos se desempeñan en el dominio del problema. En el caso de un problema de minimización, los individuos más aptos tendrán el menor valor numérico asociado a la función objetivo⁶.

$$30X + 12y = 1200$$

Figura 1. Función objetivo.

La función de aptitud transforma la función objetivo en un valor no negativo.

X	Y	$3*x + 5*y$	distancia
5	67	954	246

$$d = |1200 - (30x + 12y)|$$

Figura 2. Función de aptitud.

4.1. Operadores en Algoritmos Genéticos

Aunque no existe en la comunidad alrededor de la computación evolutiva una definición rigurosa de que es un algoritmo genético, se acepta que debe

tener una etapa en la que se genera la población inicial de manera aleatoria, una etapa de selección, una de cruce y una etapa de mutación².

4.1.1 Selección

Este operador se encarga de escoger cuales de los cromosomas de la población se reproducirán de acuerdo a su desempeño frente a la función de aptitud.

4.1.2. Cruce

Este operador toma los cromosomas padre y a partir de la información que contienen crea los cromosomas hijo utilizando diferentes técnicas.

4.1.3. Mutación

Este operador cambia alguno de los cromosomas de la población y lo modifica parcialmente por ejemplo la cadena 01001 puede ser mutada como 00001 cambiando la segunda posición de 1 a 0.

4.1.4. Copia

Es una reproducción de tipo asexual. Un número determinado de individuos pasa sin ninguna variación a la siguiente generación⁵.

5. ALGORITMO DISEÑADO

El algoritmo cuenta con el siguiente diagrama de flujo (ver figura 3).

5.1. La función de costo

El primer paso en el desarrollo del algoritmo consiste en definir la función de costo, para nuestro caso en particular la función que evalúa la aptitud es la ecuación de dos variables que buscamos resolver se reemplazan los valores de x y de y en la ecuación y la aptitud será la distancia al resultado.

5.2. Las restricciones

Con el fin de permitir que el algoritmo converja hacia la solución de una manera más rápida se restringe el valor de la variable x para que no sea mayor que doce, el valor de y para que no sea mayor que cien; los valores en

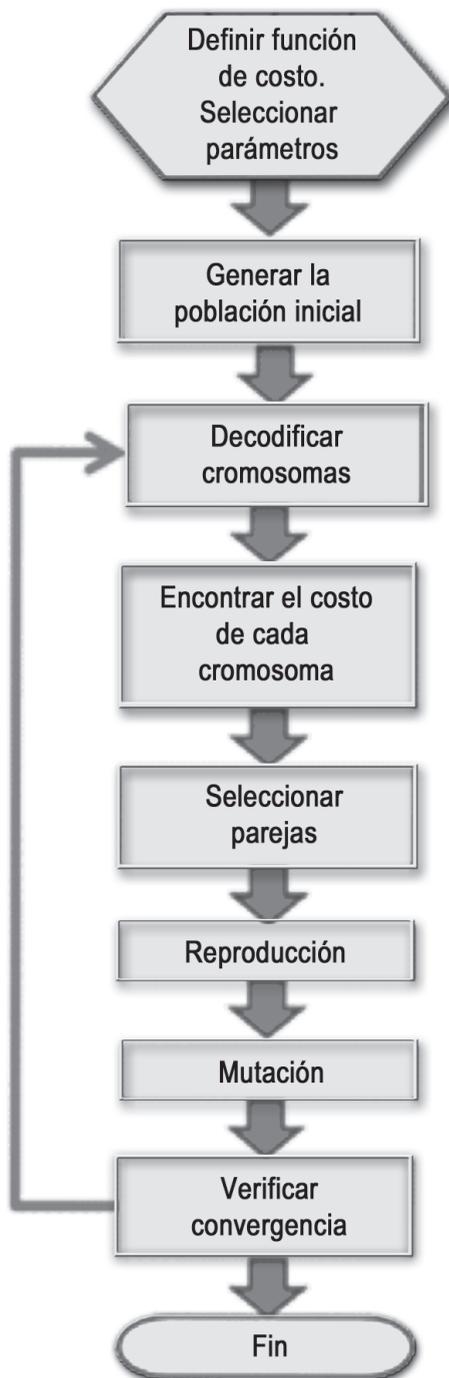


Figura 3. Diagrama de Flujo⁴

sí mismos deben ser enteros y se ajusta el algoritmo para que busque la mínima solución posible debido a que la ecuación en si misma tiene múltiples soluciones.

5.3. La codificación

Para el presente algoritmo no se utilizó codificación binaria ni de ningún tipo debido a que los valores de las parejas enteras (x,y) aleatoriamente generadas pertenecientes a la población pueden evaluarse directamente en la función de aptitud

5.4. Selección

El algoritmo escoge de cada población de 10 elementos los 5 mejores y estos los cruza para generar 5 descendientes para completar los 10 elementos de la segunda generación se agregan 5 parejas aleatorias.

5.5. Cruce

Debido a que el algoritmo evalúa cantidades enteras que no han pasado por ningún proceso de codificación se utilizó como método de cruce el promedio de las dos cantidades enteras, como este promedio no siempre corresponde a una cantidad entera, si el resultado era decimal, se redondeaba a la cantidad entera más cercana.

5.6. Mutación

En el presente algoritmo no se utilizó la mutación para los elementos de la población.

6. RESULTADOS

En el presente ejemplo se tomaron cuatro generaciones y se evidencia como el promedio de las mismas tiende hacia cero que es el valor objetivo (ver figura 4).

En la cuarta generación el promedio de los 10 elementos de la población corresponde al valor de 121.2 (ver tabla 1).

De la anterior imagen vale la pena resaltar los dos elementos resaltados debido a que corresponden a un clon uno del otro por ende al pasar a través de la función de aptitud se obtiene para ambos el mismo resultado.

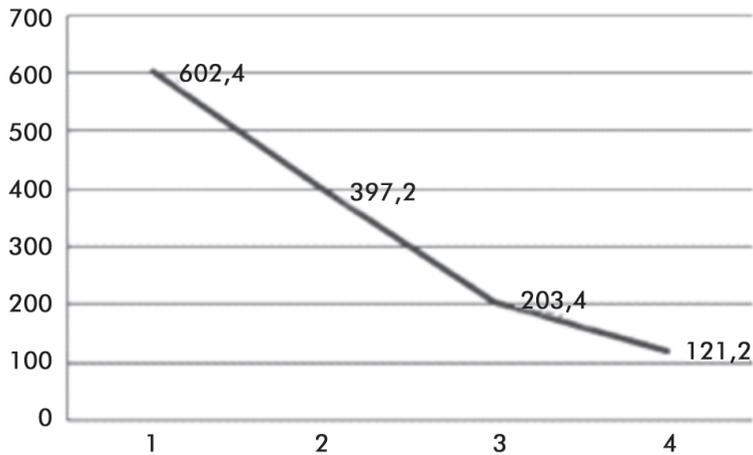


Figura 4. Evolución del Promedio en las primeras cuatro generaciones.

Tabla 1. Parejas con su respectivo valor de aptitud.

X	Y	Posición	Distancia
4	89	0	12
4	86	5	48
4	84	1	72
4	80	2	120
4	78	6	144
4	78	8	144
4	77	7	156
8	66	4	168
4	76	3	168
4	75	9	180
			121,2

Como solución luego de 14 generaciones se obtuvo que el hombre compró 2 trajes grises y 10 trajes negros cada traje gris costo 75• y cada traje negro costo 105•.

7. CONCLUSIÓN

Los algoritmos genéticos se constituyen en una valiosa herramienta para solucionar ecuaciones con múltiples variables y específicamente ecuaciones diofánticas, en este documento se presentó una metodología y sus resultados experimentales.

8. REFERENCIAS

1. <http://gaussianos.com/como-resolver-ecuaciones-diofanticas/>
2. MELANIE, M. *An introduction to genetic Algorithms*, 1999.
3. GN BELIGIANNIS, C MOSHOPOULOS, SD LITKOTHANASSIS. *A genetic algorithm approach to school timetabling*. In: *Journal of the Operational Research Society*, 2009.
4. RANDY L. HAUPT, SUE ELLEN HAUPT. *Practical Genetic Algorithms*, 2004.
5. M. GESTAL POSTE. *Introducción a los Algoritmos Genéticos*.
6. A. CHIPPERFIELD, P. FLEMMING, H. POHLHEIM, C. FONSECA, *Genetic Algorithm Toolbox User's Manual*, 1994.