



<http://dx.doi.org/10.23925/2237-9657.2020.v9i3p074-088>

## Uso do GeoGebra em Cálculo Diferencial e Integral: Um mapeamento sobre a aprendizagem de Limite

### Use of GeoGebra in Differential and Integral Calculus: A mapping on Limit Learning

MARCELO ALMEIDA BAIRRAL<sup>1</sup>

RAFAEL DIAS LOBO<sup>2</sup>

#### RESUMO

*No Brasil, a Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo tem sido um veículo importante de publicação e de busca por pesquisas e inovações, visando a melhoria do ensino e da aprendizagem com o uso do GeoGebra. Este artigo traz contribuições para o ensino de Limite da Função no ponto, com o uso deste ambiente dinâmico. Particularmente, mostra o mapeamento e a análise de 20 artigos publicados na Revista no período de 2012 a 2019. Foram localizados 6 estudos voltados para o Ensino Médio, 10 para o Ensino Superior e 4 destinados a formação continuada. A análise suscita reflexão sobre a inexistência de estudos voltados a essa temática, que é usualmente ensinada em cursos de Cálculo Diferencial e Integral. Indica também possibilidades de análises futuras sobre Limite que contribuam, principalmente, para a Licenciatura em Matemática.*

**Palavras-chave:** Limite; Cálculo Diferencial e Integral; GeoGebra.

#### ABSTRACT

*In Brazil, the Journal of GeoGebra Institute of São Paulo has been an important vehicle for publication and search for research and innovations aiming at improving teaching and learning with the use of GeoGebra. This article brings contributions to the teaching of Limit of Function on the point using this dynamic environment. In particular, it shows the mapping and analysis of 20 articles published in the Journal from 2012 to 2019. Were found 6 studies focused on High School, 10 on Undergraduates courses and 4 for in-service teacher programs. The analysis gives rise to a reflection on the lack of studies on this theme, which is usually taught in Differential and Integral Calculus courses. It also indicates possibilities for future analyzes on Limit that contribute mainly to Pre-service Mathematics Courses.*

**Keywords:** Limit; Differential and integral calculus; GeoGebra.

---

<sup>1</sup> UFRRJ, mbairral@ufrrj.br

<sup>2</sup> UFRRJ, rafaeldiaslobo@hotmail.com

## Introdução

Graduandos costumam apresentar dificuldades na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, e isso, geralmente, provoca reprovação ou evasão. Este artigo é fruto de um projeto de pesquisa<sup>3</sup> interessado no uso de ambientes móveis de geometria dinâmica nas práticas educativas, particularmente, no ensino de Limite de uma Função com o uso de GeoGebra. Apresentaremos um mapeamento realizado no *site* da *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, envolvendo o período de 2012 a 2019<sup>4</sup>.

O ensino de Limite tem ocorrido, em algumas escolas, no final do Ensino Médio e, na graduação, em disciplinas das áreas de Exatas (Matemática, Física etc.), de Ciências Sociais Aplicadas (Administração, Economia etc.) e de Engenharias. Em nossa Universidade, os graduandos possuem dificuldades em disciplinas que abordam esse tópico, as de Cálculo Diferencial e Integral. As causas são variadas e não podemos responsabilizar alunos ou professores por esse entrave. Braz e coautores (2019)<sup>5</sup>, mencionando Menezes (1996, 1998, 2000, 2001, 2004), apontam:

Várias causas para o insucesso no Cálculo por estudantes de graduação, desde a falta de base da formação anterior, metodologias do professor, aplicabilidade ao curso, até a própria mudança de contexto acadêmico. Menezes (1996; 1998; 2000; 2001; 2004) fez uma pesquisa sobre as dificuldades do ensino-aprendizagem nos cursos de graduação que constataram uma urgente necessidade de atualizar o ensino do cálculo, incluindo aplicações práticas e o uso de tecnologias mais familiares aos estudantes e à sociedade como um todo. (BRAZ et al., 2019).

Richit (2010) relaciona a insatisfação dos estudantes com as práticas tradicionais de ensino do Cálculo que, curiosamente, é a área da matemática bastante beneficiada pelo desenvolvimento de *softwares* que auxiliam na exploração de vários conceitos desse campo do conhecimento matemático. Se fizermos uma retrospectiva, de fato, o Derive<sup>6</sup>, o Maple<sup>7</sup> e o GraphMatica<sup>8</sup> são exemplos de programas que podem contribuir para o ensino de conteúdos referentes ao Cálculo.

Nesse artigo, capturamos estudos que utilizavam o GeoGebra para auxiliar o ensino ou a aprendizagem em Cálculo Diferencial e Integral, de modo a perceber, em especial, a situação do ensino de Limites. A escolha do GeoGebra como recurso principal em nosso estudo se deu por ser ele um

<sup>3</sup> Financiado pelo CNPq e com bolsa de iniciação científica concedida pela Pró-Reitoria de Assuntos Estudantis (PROAES) da UFRRJ.

<sup>4</sup> O primeiro volume da *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo* foi dedicado aos trabalhos apresentados na 1ª Conferência Latino Americana de GeoGebra, sendo os trabalhos publicados em 2012. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/IGISP> Acesso em: 30 nov. 2019.

<sup>5</sup> O livro *Evidências científicas no ensino superior com o GeoGebra* foi acessado digitalmente em 10 out. 2019, e não havia marcação de páginas.

<sup>6</sup> <https://derive.br.uptodown.com/windows>. Acesso em: 26 de nov. 2020

<sup>7</sup> <https://maplesoft.com/products/Maple>. Acesso em: 26 de nov. 2020

<sup>8</sup> <https://graphmatica.br.uptodown.com/windows>. Acesso em: 26 de nov. 2020

ambiente gratuito, ter versões para computador e *smartphone*, possuir interface amigável, ser de fácil manuseio, ter *site*<sup>9</sup> oficial com materiais de apoio ao interessado e por permitir abordar Geometria, Álgebra e outros ramos da Matemática para diferentes séries e graus de complexidade.

## Um mapeamento de trabalhos publicados no site da *Revista do Instituto GeoGebra*

Em concordância com Fiorentini, Passos e de Lima (2016) valorizamos e reconhecemos o mapeamento da pesquisa como um:

Processo sistemático de levantamento e descrição de informações acerca das pesquisas produzidas sobre um campo específico de estudo, abrangendo um determinado espaço (lugar) e período de tempo. Essas informações dizem respeito aos aspectos físicos dessa produção (descrevendo onde, quando e quantos estudos foram produzidos ao longo do período e quem foram os autores e participantes dessa produção), bem como aos seus aspectos teórico-metodológicos e temáticos. (p. 18).

No site da *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*<sup>10</sup> foram coletados artigos (até 2019)<sup>11</sup> que utilizassem o *software* GeoGebra como ferramenta auxiliar da aprendizagem dos alunos, para promover e instigar a exploração dos conceitos matemáticos em trabalhos que abordassem algum conteúdo no âmbito da disciplina de Cálculo. Buscamos artigos que abordassem Limite, influenciassem no seu aprendizado ou que são temas de Cálculo Diferencial e Integral (Função, Limite, Derivada e Integral) e, neles, fosse possível identificar o conceito de Limite. As razões para o foco nesse conteúdo são: é uma temática introdutória e usualmente abordada em disciplinas de Cálculo em cursos de especialidades diversas; é um conteúdo que articula outros (números reais, intervalos, fatoração, equações, construção gráfica) e, assim, permite ao docente relembrar conteúdos da Educação Básica; e, ademais, é um tema que possibilita a construção de situações gráficas e de movimento, muito propícias de serem exploradas no GeoGebra.

### A captura: O estudo de Limite em artigos abordando conteúdos de Cálculo

Os artigos foram selecionados da seguinte forma: 1) busca pelas palavras-chave (Função<sup>12</sup>, Limite, Cálculo, Derivada e Integral); 2) leitura do resumo; e 3) leitura de cada artigo. Além de resultados ou de recomendações, na (re)leitura de cada texto foram identificados o objetivo, o ano de publicação, o contexto de formação, o objeto matemático abordado e, no caso de curso de graduação, a especialidade. Embora o levantamento tenha sido feito na busca por conteúdos de Cálculo, o nosso foco na captura dos artigos esteve voltado para Limite. Construído o Quadro 1, foi possível visualizar o mapeamento.

<sup>9</sup> Disponível em: <https://www.geogebra.org/>

<sup>10</sup> Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/IGISP>

<sup>11</sup> O primeiro número da Revista foi publicado em 2012.

<sup>12</sup> Somente no singular.

Na estruturação do Quadro 1 estão os 20 artigos capturados no *site* da Revista, 6 dentre eles voltados para o Ensino Médio, 10 para a Graduação e 4 destinados à formação continuada. Dos textos vinculados à graduação, somente 2 fazem referência ao curso de Licenciatura em Matemática. Também aparecem no levantamento cursos de Geologia, Sistemas de Informação e Tecnologias. Com 11 artigos, o ano de 2012 é aquele em que mais aparecem trabalhos que abordam Função, Limite, Derivada, Integral ou Análise Real. Além do *software* GeoGebra, as pesquisas de Rezende, Pesco e Bortolossi (2012) e de Oliveira, Guimarães e Andrade (2012) também usaram aplicativos gerados no programa.

<b>Autor(es)</b>	<b>Ano</b>	<b>Contexto</b>	<b>Objeto(s) matemático(s) abordado(s)</b>	<b>Curso</b>
Richit, Benites, Escher e Miskulin	2012	Graduação	Função, Limite, Derivadas e Integral	Geologia
Santos, Mota, Brito e Ferreira	2012	Graduação	Integral	Sistemas de Informação
Soares	2012	Ensino Médio	Funções	_13
Rezende, Pesco e Bortolossi	2012	Ensino Médio	Funções	-
Tramm e Cunha	2012	Ensino Médio	Função Quadrática	-
Baldini e Cyrino	2012	Formação continuada	Função seno	-
Oliveira, Guimarães e Andrade	2012	Graduação	Funções	Todos os cursos
Alvarenga e Sampaio	2012	Graduação	Função, Área e Perímetro	Licenciatura em Matemática
Alves	2012	Graduação	Cálculo	-

<sup>13</sup> Não especificado.

Alves	2012	Graduação	Cálculo e Análise Real	Matemática
Brunet, Leivas, Leyser e Franke	2012	Graduação	Funções	Licenciatura em Matemática
Alves e Lopes	2013	Graduação	Integral	-
Vieira	2013	Graduação	Cálculo	-
Grande e Vazquez	2014	Graduação	Derivada	Tecnologias
Tenório, Costa e Tenório	2014	Ensino Médio	Função polinomial do 1.º grau	-
Tenório, Rodrigues e Tenório	2015	Ensino Médio	Função polinomial do 1.º grau	-
Pereira, Freitas e Victor	2015	Formação continuada	Função Afim, Teorema de Tales e Ângulos	-
Cruz	2019	Formação continuada	Função, geometria e Integral	-
Oliveira	2019	Formação continuada	Derivada	-
Braz, Castro e Oliveira	2019	Ensino Médio	Função Trigonométrica	-

**Quadro 1: Mapeamento da Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**

A partir dos artigos selecionados vimos que o GeoGebra é utilizado para ensinar, desde Funções até conceitos relacionados à Análise Real, disciplina de importância na graduação (Licenciatura e Bacharelado) em Matemática. O objetivo geral e o(s) específico(s) de cada estudo estão listados no Quadro 2.

<b>Autor(es)</b>	<b>Objetivo geral</b>	<b>Objetivo(s) específico(s)</b>
Richit, Benites, Escher e Miskulin (2012)	Compreensão da produção de conhecimento dos alunos com a tecnologia.	Potencialidades do GeoGebra na introdução e na visualização de conceitos matemáticos.
Santos, Mota, Brito e Ferreira	Análise do uso do	Estudo da Integral definida.

(2012)	GeoGebra no processo de ensino e aprendizagem de Integral.	
Soares (2012)	Análise do uso do GeoGebra na aprendizagem de Funções.	Estudo das relações dos coeficientes e dos intervalos das Funções afim e quadrática.
Rezende, Pesco e Bortolossi (2012)	Uso do GeoGebra na exploração de Funções.	Estudo das Funções afim, quadrática e exponencial.
Alves (2012)	Exploração do GeoGebra na transição do Cálculo para a Análise Real.	Propriedades topológicas.
Brunet, Leivas, Leyser e Franke (2012)	Uso do GeoGebra no aprimoramento de conceitos sobre Função.	Estudo de Funções que têm duas sentenças como lei de formação.
Alves e Lopes (2013)	Uso do GeoGebra no ensino de Integral.	Identificação dos métodos de integração através de aspectos geométricos.
Tenório, Costa e Tenório (2014)	Uso do GeoGebra na resolução de exercícios e problemas de Função polinomial do 1.º grau.	Comparação entre os alunos que usaram e os que não usaram o GeoGebra para auxílio nos exercícios.
Tenório, Rodrigues e Tenório (2015)	Uso do GeoGebra e <i>blogs</i> como forma de abordagem.	Estudo de Funções polinomiais do 1.º grau, de forma a estimular a participação e a colaboração dos alunos.
Pereira, Freitas e Victor (2015)	Uso do GeoGebra no desenvolvimento de um produto educacional.	Investigação da Função afim, Teorema de Tales e ângulos.
Cruz (2019)	Estudo das Funções de duas variáveis.	Uso da geometria para introdução no <i>software</i> , representação gráfica e integração de Funções de duas variáveis.
Oliveira (2019)	Análise de modos de produção de significado no ensino da derivada.	Análise dos modos de produção de significado no ensino da derivada, percepções em diferentes campos semânticos.
Braz, Castro e Oliveira (2019)	Uso do GeoGebra no estudo de Funções trigonométricas.	Introduzir o estudo das Funções seno, cosseno e tangente.
Tramm e Cunha (2012)	Construção do logotipo do McDonald's usando o Geogebra.	Estudo da Função Quadrática, enfatizando a representação algébrica.
Baldini e Cyrino (2012)	Compreensão da Função seno.	As alterações no domínio, imagem e período que as mudanças dos parâmetros ( $a, b, c$ e $d$ ) implicam.

Oliveira, Guimarães e Andrade (2012)	Desenvolvimento de uma sequência didática composta por objetos de aprendizagem.	Estudo de Funções.
Alvarenga e Sampaio (2012)	Desenvolvimento do “espírito investigador” e da percepção de relações entre álgebra e geometria.	Existência de relações entre Área e perímetro, possíveis funções geradas.
Grande e Vazquez (2014)	Uso do GeoGebra como auxílio na resolução de problemas de otimização.	Estudo de derivada através da resolução de problemas de minimização de distâncias.
Alves (2012)	Estímulo à visualização e à apreensão perceptiva de propriedades de objetos matemáticos no espaço $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$	Relações conceituais entre representações algébricas e geométricas do Cálculo em uma variável real e no Cálculo a várias variáveis.
Vieira (2013)	Estudo de Funções definidas implicitamente por meio de equações.	Discussão sobre a utilização dos <i>softwares</i> no estudo do tema, proporcionando significado geométrico e propriedades gráficas.

**Quadro 2: Objetivos das pesquisas**

A seguir, apresentaremos parte da nossa leitura feita sobre os artigos dos Quadros 1 e 2. Embora um levantamento “se preocupe mais com os aspectos descritivos de um campo de estudo do que com seus resultados” (FIORENTINI et al., 2017, p. 18), pela especificidade de cada texto, optamos por trazer à tona aspectos que, segundo nossa interpretação, estão mais relacionados aos resultados ou a abordagens e recomendações dos estudos.

Soares (2012) utiliza-se do *software* para explorar os coeficientes da Função Afim e Quadrática com a ferramenta “habilitar rastro”, para que os alunos percebam as variações gráficas que os coeficientes “a” e “b” e, no caso da Função quadrática, o “c”, podem proporcionar à Função. Quando aborda a Função quadrática, o autor também procura destacar as variações do vértice da parábola. E faz um adendo com comentários dos alunos, para evidenciar a importância do manuseio do *software* por eles, que gostaram da atividade.

Pereira, Freitas e Victor (2015) também voltam seus estudos para os coeficientes da Função Afim, que aplicam numa turma de graduação em Matemática. Da mesma forma que Soares (2012), Rezende, Pesco e Bortolossi (2012) explanam sobre conceitos relacionados às Funções Afim e Quadrática e propõem o estudo da Função Exponencial, valendo-se de aplicativos do GeoGebra para realizar as atividades.

Em seu artigo, Brunet, Leivas, Leyser e Franke (2012), embora o tema continue em Função, não articulam suas atividades às interpretações a respeito dos coeficientes, mas buscam uma forma de

auxiliar alunos que apresentam dificuldade em compreender funções com duas sentenças como lei de formação. Para desenvolver as atividades, foram utilizados lápis e papel, além do *software*, pois eram “[...] atividades propostas pelos autores para que fossem utilizados lápis e papel nas representações. Também, fazer uso das ferramentas do GeoGebra a fim de provocar desequilíbrio na concepção de representação de gráficos entre os participantes” (p. 4). Os benefícios que o GeoGebra proporcionou fizeram com que a abordagem fosse considerada eficaz pelos pesquisadores, visto que “[...] foi um facilitador no processo visual de formação de conceito e na comunicação de imagens visuais [...]” (p. 11). O uso de lápis e caderno, articulado à tecnologia, mostra que uma ferramenta não precisa substituir a outra, podemos utilizar todas para melhorar a aprendizagem do aluno.

As atividades desenvolvidas por Alvarenga e Sampaio (2012) buscavam entrelaçar o estudo de álgebra e geometria, buscando relações entre área e perímetro, e identificar possíveis Funções que possam ser geradas dessas associações. O uso do GeoGebra e a sua possibilidade de visualizar algebricamente os gráficos e relacionar os comportamentos foi fundamental. Os autores indicam que o aprendizado, articulando área, perímetro e função tende a refletir positivamente na regência dos futuros professores de matemática.

Com o intuito de estimular os alunos em uma investigação sobre a Função Quadrática, Tramm e Cunha (2012, p. 2) utilizaram-se do logotipo do McDonald’s para despertar a curiosidade dos discentes. A proposta era “descobrir a matemática, aparentemente imperceptível, mas presente em um elemento visual que fizesse parte da realidade dos alunos”. A representação do logotipo no GeoGebra gerou entusiasmo e proporcionou um ambiente adequado para a representação algébrica.

Oliveira, Guimarães e Andrade (2012) usaram o GeoGebra explorando a visualização e a manipulação de gráficos e dados algébricos. Os alunos trabalharam inicialmente em atividades sobre a Função Quadrática, particularmente, analisando modificações que as alterações algébricas geravam nos gráficos. O estudo das Funções trigonométricas (seno, cosseno e tangente) se deu de modo separado; entretanto, quando abordada a relação do ciclo trigonométrico com as funções, todas foram representadas conjuntamente. Essa articulação foi positiva no aprendizado dos estudantes.

Tenório, Costa e Tenório (2014) compararam dois grupos de alunos, um dos quais resolveria problemas de Funções Afim sem o auxílio do GeoGebra e o outro utilizaria o *software* como ferramenta de resolução. Os alunos que tiveram ao seu dispor o GeoGebra responderam um questionário para avaliar a utilização dele. Por meio do questionário constatou-se que 80% dos alunos gostaram de usar o *software* na resolução dos problemas, 100% acharam que ele auxiliou na construção do conteúdo e 80% prefeririam utilizá-lo para resolver problemas futuros e gostariam de aprender outros conteúdos com ajuda do computador.

Tenório, Rodrigues e Tenório (2015) propuseram a criação de *blogs* e a utilização do GeoGebra para ajudar os alunos do 1.º ano do Ensino Médio a entender a Função Afim. Os *blogs* serviram para debater sobre resoluções de problemas propostos pelos próprios alunos. Os autores enfatizam que, apesar de dificuldades, o uso da tecnologia em aula promoveu mudança na rotina escolar e estimulou o interesse e o diálogo, efeitos similares aos descritos por Siqueira (2002). Nesse contexto, a aprendizagem foi inicialmente impulsionada pela curiosidade diante do “novo” e pelo propósito de



manifestar o pensamento matemático. Podemos perceber as mudanças que uma abordagem diferente pode proporcionar à relação de ensino e aprendizagem. A utilização das TIC propiciou o entusiasmo, pois os alunos nunca tinham utilizado a sala de informática e sentiram-se atraídos a explorar esse novo mundo.

O estudo de Baldini e Cyrino (2012) analisou como professores de matemática da Educação Básica compreendiam, em um curso de formação continuada, questões conceituais sobre a Função seno. As atividades baseavam-se na movimentação dos controles deslizantes referentes aos parâmetros da Função, para que os participantes pudessem discutir as mudanças no domínio, imagem e período. Os docentes enfatizaram que “é difícil fazer isso na mídia lápis e papel, pois seria um trabalho exaustivo para que os estudantes percebessem as regularidades” (p. 11). O contraste entre a importância do *software* e as restrições de recursos estáticos é um logro da pesquisa.

Braz, Castro e Oliveira (2019) pesquisaram a utilização do *software* no estudo das Funções Seno, Cosseno e Tangente. Junto com os alunos, desenvolveram a construção da Função Seno, Cosseno e Tangente através do círculo trigonométrico. Após esse momento foi entregue uma atividade em que deveriam responder perguntas referentes aos gráficos. Posteriormente, tiveram tempo para discutir suas conjecturas e respostas. A importância dos aprendizes manipularem a construção é enfatizada pelos autores: “O aluno aponta que a atividade o possibilitou fazer descobertas por si só, que lhe foi dado tempo para analisar, pensar, explorar as suas ideias e exprimi-las, posteriormente, a fim de verificar se ‘sua forma de entender’, ou seja, se suas conclusões estavam ou não corretas” (p. 82). O gráfico feito no caderno é único, estático, porém, quando usamos o GeoGebra, trazemos um aspecto de dinamicidade, pois o estudante pode modificar seu gráfico a qualquer momento e, assim, perceber suas variações.

As atividades elaboradas por Cruz (2019) foram realizadas com professores e, dos cinco envolvidos, apenas um já havia tido contato com o GeoGebra. A fim de promover uma familiarização, as primeiras fichas de trabalhos usadas resgataram conceitos de geometria euclidiana. Já no momento inicial, os participantes ressaltaram a importância do *software*: “A análise gráfica sustentada pelo *software GeoGebra* coadjuva sobremaneira a manipulação dos objetos no ‘quadro’, nomeadamente na questão da visualização da construção [...], sem a necessidade de redesenhar e/ou apagar as peças do tabuleiro” (p. 8). Os docentes também enfatizaram a possibilidade de visualizar as peças em todas as vistas possíveis e de analisar, simultaneamente, a tradução analítica do que se faz na geométrica.

A segunda fase da experiência aborda Funções de duas variáveis, tema principal do estudo. Essa etapa empregou tecnologia informática e recurso tradicional, porém, antes de usar o *software*, houve uma exposição teórica, com quadro e giz, de modo a revisar conceitos de funções de duas variáveis, pois apenas um dos participantes costumava lecionar temas do Ensino Superior. O GeoGebra foi utilizado para ilustrar dois exercícios que envolviam o tema e abordavam gráfico, domínio, curvas de nível e traços de Funções. O autor salienta a importância do *software* no rigor e na perfeição das criações em pouco tempo.

Na última parte da experiência, o tema foi Integral dupla, estudando o Volume de Sólidos por Integração Iterada, com emprego do GeoGebra para calcular volumes mediante recurso que proporciona a resolução de uma Integral dupla de forma mais dinâmica. Ao final das atividades, os participantes

relataram que o *software* apresenta benefícios, pois promove a aprendizagem e desenvolve o autoconhecimento em um ambiente instigante e motivador. Cruz (2019) conclui, enfatizando que recursos didáticos servem como pontes entre alunos e conteúdo.

Com atividades envolvendo os coeficientes da Função, visando familiarizar os alunos de uma turma de graduação em Geologia com o *software*, Richit, Benites, Escher e Miskulin (2012) propõem o estudo de conceitos relacionados a Cálculo Diferencial e Integral. Os acadêmicos foram divididos em duplas para realizar a atividade, pois trabalhos desenvolvidos em grupos aumentam a expectativa de aprendizagem, em razão da troca de conhecimento e experiências entre os integrantes. Como os graduandos nunca haviam tido contato com o *software*, os pesquisadores preferiram abordar um tema com grau de dificuldade menor, para mostrar as ferramentas do GeoGebra e para os estudantes aprenderem a utilizá-las.

Posteriormente, foram propostas explorações a respeito da continuidade de uma Função, deixando subentendida a ideia de Limite. A Função utilizada para estudo da continuidade tinha uma constante que a multiplicava e, em uma das perguntas que os graduandos tinham que responder, o coeficiente teria que variar. A possibilidade de variar a constante fez com que os graduandos não precisassem desenhar diversos gráficos para poder visualizar as modificações. Tal ocorrido gerou grande interesse nos alunos. O fato de a ideia de Limite não ser evidenciada desde o princípio da abordagem pode ser um fator importante para aprendizagem dos estudantes, visto que o assunto é de suma importância para a disciplina de Cálculo, muitos alunos têm dificuldade de compreender suas definições e entender as ideias, para posterior formalização do conteúdo, pode ser um caminho de abordagem.

A pesquisa de Grande e Vazquez (2014) atrelou Derivada à otimização. Foi apresentado aos alunos um problema que buscou achar a menor distância possível. O primeiro passo foi permitir que os alunos conjecturassem sobre a questão, podendo verificá-la com o auxílio do GeoGebra. No desenvolver da atividade, os discentes trabalhavam primeiro associando os aspectos geométricos e gráficos para depois algebrizar a solução. De forma a direcionar a investigação dos alunos, os professores faziam perguntas para motivá-los a acharem um caminho. Segundo os autores, “essa coordenação simultânea dos registros gráficos e geométricos é um dos grandes recursos que o GeoGebra possui no estudo e modelagem de problemas desse tipo” (p. 9). Por fim, o GeoGebra ainda permitiu uma solução geométrica, baseada no princípio de Fermat.

Richit, Benites, Escher e Miskulin (2012) também propõem a investigação do conceito de Derivada a partir das retas tangentes, novamente usando os parâmetros para observar os aspectos geométricos por trás da definição. A última parte da abordagem procurou explorar o conceito de Integral através de uma sequência didática que fizesse com que o aluno visualizasse a “Soma de Riemann”.

Com o mesmo objetivo – abordar o estudo de Integral –, a investigação de Santos, Mota, Brito e Ferreira (2012) implementou suas atividades em uma turma de graduandos do curso de Sistemas de Informação, na aula de Cálculo Diferencial e Integral. Para auxiliar os alunos, juntamente com o exercício, foi disponibilizado um Quadro com orientações para as construções. Quando a metodologia foi aplicada, os alunos tiveram dúvidas em algumas partes, por não terem familiaridade com o *software*.

A visualização da “Soma de Riemann” fazia parte do objetivo das construções. Porém, apesar das dificuldades dos estudantes, os autores consideraram importante a utilização do GeoGebra.

Oliveira (2019) analisou os modos de produção de significados no ensino da Derivada. Nas nove dissertações<sup>14</sup> analisadas foram identificados os seguintes modos de significação para derivada: taxa de variação, coeficiente angular da reta tangente, limite e instrumento matemático para resolver problemas. Oliveira ressalta a importância destas percepções em planos distintos de significações (campos semânticos) e destaca também a relevância de alternativas diversas no ensino de derivada com o uso do GeoGebra. Das dissertações, somente duas não abordavam o estudo de Limite no contexto das derivadas.

O estudo de Alves e Lopes (2013) teve como objetivo ajudar os discentes a decidir qual o melhor método de integração, ao resolver uma questão de Integral. De acordo com os autores, a abordagem tradicional encontrada em livros didáticos consultados traz a ideia de que, resolvendo exercícios, o aluno começa a ter uma espécie de *feeling* matemático. O artigo traz particularidades geométricas, exploradas com o uso do GeoGebra, que auxiliam o aluno. Para ressaltar a importância do *software*, o seguinte trecho do trabalho afirma: “[...] a partir da exploração do GeoGebra, descrevemos um cenário de descobertas para o estudante, que envolve a identificação de padrões de natureza geométrica, topológica e, sobretudo, suas ligações com os padrões tradicionalmente exigidos no quadro algébrico” (p. 20).

Alves (2012) utilizou os *softwares* GeoGebra e *CAS Maple* para promover uma transição do Cálculo em uma variável real para o Cálculo a várias variáveis, analisando algébrica e geometricamente as funções. Foi possível analisar o valor de alguns resultados de Limites, visualizando através dos gráficos, integrais e Derivadas, que fizeram parte das explorações. O autor enfatizou que a compreensão e o estabelecimento de relações conceituais de um conjunto de definições e teoremas que, sem o uso dos *softwares*, demandariam um período de seis meses, com a sua utilização, se completariam em apenas uma fração de segundos.

Ainda sobre o GeoGebra e seu uso conjunto com o *CAS Maple*, Vieira (2013) explorou o estudo de equações definidas de modo implícito, visto que a abordagem nos livros tem foco algébrico. Nos livros didáticos, ressalta o autor, nenhum expediente de natureza gráfico-visual é recomendado. De acordo com Vieira, uma abordagem com teor visual e investigativo auxilia o desenvolvimento dos conceitos, e a utilização dos gráficos permite que os alunos tenham outro caminho para realizar as atividades.

Finalmente, Alves (2012) discutiu noções topológicas no contexto da mudança de Cálculo Diferencial e Integral para Análise Real, de modo a melhorar a interpretação pelos estudantes de Cálculo e de Análise. O autor afirma que o uso das tecnologias proporciona uma exploração visual gerando a produção de insights e, por fim, a apreensão cognitiva do sujeito em relação aos objetos no  $\mathbb{R}^2$  ou no  $\mathbb{R}^3$ .

---

<sup>14</sup> Disponíveis no repositório de dissertações do PROFMAT no mês de dezembro de 2018.

## No limite dos limites

De modo geral, os artigos catalogados fazem menção à importância do GeoGebra na compreensão da ideia de Função, Limite, Derivada e Integral. Os textos buscam inovação e ressaltam a importância do GeoGebra para a realização das atividades, e podemos perceber o interesse pelo uso do *software* como forma de aumentar a motivação pelo aprendizado. A utilização do GeoGebra traz dinamicidade ao processo, diferentemente de quando utilizamos apenas o caderno, no qual os gráficos são estáticos. A exploração dos aspectos geométricos é muito requerida nos trabalhos e manipular as ferramentas do *software* permite uma maior compreensão de tais características. Quando o professor deseja exibir uma quantidade maior de exemplos, é demandado bastante tempo de aula. Entretanto, o GeoGebra permite uma gama articulada de exemplos e conteúdos, sem requerer tanto tempo. Todavia, vale ressaltar que usar o GeoGebra não significa descartar o caderno e o lápis.

A partir desse mapeamento, cabe destacar alguns resultados:

- Apenas uma das pesquisas (RICHIT; BENITES, V.; ESCHER, M.; MISKULIN, R., 2012) faz menção à utilização do *software* para estudar Limite. Nela, a ideia ficava subentendida nas atividades propostas, ou seja, abordar o tema de Limite não era o principal objetivo dos autores.
- É importante ambientar os alunos com o *software* ou aplicativo utilizado. No estudo de Santos, Mota, Brito e Ferreira (2012) podemos perceber que os graduandos sentiram dificuldade devido ao fato de não terem sido ambientados com o *software*, o que gerou dúvidas no momento de construção das atividades.
- Por estar a atenção mais voltada para a algebrização, os estudos procuraram valorizar também a visualização, aspecto potencializado pelas ferramentas do *software*.
- As tarefas com características de investigação são potencializadas pelo GeoGebra, uma vez que suas ferramentas possibilitam que o aluno explore uma grande quantidade de exemplos.
- Através do relato de um aluno, na pesquisa de Braz, Castro e Oliveira. (2019) podemos constatar a importância do estudante estar envolvido no processo de aprendizagem, ter seu momento de reflexão e poder conjecturar e analisar possibilidades.
- No âmbito das Funções, podemos perceber a importância dada à compreensão dos coeficientes, ou seja, os estudos basicamente são direcionados à sua variação, fazendo com que o aluno entenda a particularidade de cada coeficiente.
- No estudo de Integral, o *software* auxilia na visualização de somas parciais da Soma de Riemann, além de fornecer ajuda na hora de reconhecer qual método de resolução será mais eficiente.
- O uso do GeoGebra também pode fazer com que o ensino de Limite vá além de explorações restritas a noções intuitivas e exploradas apenas como pré-requisito para derivada.

## Considerações finais

O ensino de Limite ocorre, na graduação, usualmente em disciplinas de Cálculo ou similares. Algumas escolas do Ensino Médio ainda possuem essa temática em seu currículo. Apesar de ser ensinada, curiosamente, nosso mapeamento mostrou que pesquisas ou inovações sobre essa temática mostraram-se escassas nas publicações da Revista. Não se trata de atribuir nenhum tipo de culpa ou

limitação ao periódico. Esse não é, de forma alguma, nosso propósito. Até porque sua demanda de submissões é contínua, avaliada por pares e nem sempre é temática. Por conseguinte, uma cartografia como a que apresentamos é elucidativa para inspirar novos estudos, inovações e publicações, particularmente, para uma temática tão presente em aulas de Cálculo. Esse mapeamento nos instiga a uma pergunta ainda sem respostas: O que se ensina e se inova – com ou sem uso do GeoGebra – sobre Limite da Função no ponto?

O estudo de Limite desenvolve processos importantes do pensamento matemático, tais como a delimitação e o estudo de intervalos, a análise de máximos e de mínimos, a identificação do ponto de acumulação, a aproximação e a lateralidade. Esses processos ficam enriquecidos e mais articulados com a dinamicidade do GeoGebra. Todavia, o que muda, em termos conceituais, didáticos (na elaboração de tarefas, por exemplo) e de aprendizagem, quando as atividades integram o GeoGebra?

A análise ilustrada neste artigo suscita reflexão a respeito da pouca (ou nenhuma) atenção a essa temática nos artigos. Caberia realizar mapeamentos similares em outros periódicos de Educação Matemática, de modo a contrastar mais a análise e os resultados. Para a Licenciatura em Matemática, esse tipo de cartografia é de suma importância. É possível que a abordagem de Limite esteja no escopo de outros conteúdos. Quais seriam? Por quê? Cabe investigar mais sobre essas abordagens.

O uso do GeoGebra com atividades devidamente planejadas para a aprendizagem de Limite pode diminuir os índices de reprovação ou de aversão ao Cálculo na graduação. A possibilidade de construção e de movimentação pode, inclusive, minimizar dificuldades relacionadas à compreensão da definição de Limite, das nomenclaturas e dos símbolos envolvidos no seu ensino. Fica aqui mais uma sugestão: a de uso do GeoGebra para potencializar a aprendizagem de Limite e de conteúdos correlatos.

## Referências

ALVARENGA, K.; SAMPAIO, M. GeoGebra: um trabalho concatenado entre a álgebra e a geometria no ensino superior. In: CONFERÊNCIA LATINO-AMERICANA DE GEOGEBRA, 1., 13 a 15 de novembro de 2011. **Anais...** 2012. p. CXCI - CCIV 2012

ALVES, F. Exploração de noções topológicas na transição do Cálculo para a Análise Real com o GeoGebra. In: CONFERÊNCIA LATINO-AMERICANA DE GEOGEBRA, 1., 13 a 15 de novembro de 2011. **Anais...** 2012. p. 165-179.

ALVES, F. Discussão do uso do GeoGebra no contexto do Cálculo a várias variáveis. **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, São Paulo, v.1, n.1, p. 05-19, 2012.

ALVES, F.; LOPES, M. Métodos de Integração: uma discussão do seu ensino com apoio no software GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, São Paulo, v. 2, n.1, p. 05-21, 2013.

BALDINI, L; CYRINO, M. Função seno – uma experiência com o *software* GeoGebra na formação de professores de matemática. **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, São Paulo, v.1, n.1, p. 150-164, 2012.

- BRAZ, L.; CASTRO, G.; OLIVEIRA, P. O GeoGebra no estudo das funções trigonométricas: uma experiência em um minicurso com alunos do 2.º ano do Ensino Médio. **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, São Paulo, v. 8, n. 1, p. 70-84, 2019.
- BRAZ, R.; SOARES, A.; SILVA, A.; ALVES, E.; CAMPELO, I.; MEZZOMO, I.; MENEZES, J. (Orgs.). **Evidências científicas no ensino superior com o GeoGebra**. 1. ed. Curitiba: CRV, 2019.
- BRUNET, A.; LEIVAS, J.; LEYSER, M.; FRANKE, R. Provocação de situações de aprendizagem em cálculo com o apoio do GeoGebra. In: CONFERÊNCIA LATINO-AMERICANA DE GEOGEBRA, 1., 13 a 15 de novembro de 2011. **Anais...** 2012. p. CCCXXIII-CCCXXXV.
- CRUZ, J. M. F. C. Funções de duas variáveis, representação gráfica e integração. **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, São Paulo, v. 8, n. 2, p. 47-70, 2019. doi: 10.23925/2237-9657.2019.v8i1p047-070
- FIORENTINI, D.; PASSOS, C. L. B.; de LIMA, R. C. R. **Mapeamento da pesquisa acadêmica brasileira sobre o professor que ensina matemática: período 2001-2012**. Campinas: FE/Unicamp, 2016.
- GRANDE, A.; VAZQUEZ, V. Resolução de problemas de otimização com o auxílio do *software* GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, São Paulo, v.3, n.1, p. 23-34, 2014.
- OLIVEIRA, R. A. de. Modos de produção de significados no ensino da derivada: um olhar para as dissertações do PROFMAT. **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, São Paulo, v. 8, n. 2, p. 3-25, 2019. doi:10.23925/2237-965. 2019. v8i2p003-025
- OLIVEIRA, I.; GUIMARÃES, S; ANDRADE, J. As potencialidades do GeoGebra em processos de investigação matemática: uma análise do desenvolvimento de objetos de aprendizagem da EaD no ensino presencial. **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, São Paulo, v.1, n.1, p. 265-279, 2012.
- PEREIRA, R.; FREITAS, A.; VICTER, E. Integrações tecnológicas com o GeoGebra: uma proposta para professores que ensinam Matemática. **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, São Paulo, v. 4, n.1, p. 29-44, 2015.
- REZENDE, W.; PESCO, D.; BORTOLOSSI, H. Explorando aspectos dinâmicos no ensino de funções reais com recursos do GeoGebra. In: CONFERÊNCIA LATINO-AMERICANA DE GEOGEBRA, 1., 13 a 15 de novembro de 2011. **Anais...**, 2012. p. 74-89.
- RICHIT, A. **Aspectos conceituais e instrumentais do conhecimento da prática do professor de cálculo diferencial e integral no contexto das tecnologias digitais**. 244. Dissertação (Mestrado em Ensino e Aprendizagem de Matemática e seus Fundamentos Filosóficos-Científicos) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas (IGCE), UNESP, Rio Claro, 2010.
- RICHIT, A.; BENITES, V.; ESCHER, M.; MISKULIN, R. Contribuições do software GeoGebra no estudo de cálculo diferencial e integral: uma experiência com alunos do curso de geologia. In: CONFERÊNCIA LATINO-AMERICANA DE GEOGEBRA, 1., 13 a 15 de novembro de 2011. **Anais...** 2012. p. 90-99.
- SANTOS, E.; MOTA, J.; BRITO, A.; FERREIRA, R. A utilização do GeoGebra no processo de ensino e aprendizagem da integral: uma articulação entre a pesquisa e a docência. In: CONFERÊNCIA LATINO-AMERICANA DE GEOGEBRA, 1., 13 a 15 de novembro de 2011. **Anais...** 2012. p.129-143.

SOARES, L. Tecnologia computacional no ensino de matemática: o uso do GeoGebra no estudo de funções. In: CONFERÊNCIA LATINO-AMERICANA DE GEOGEBRA, 1., 13 a 15 de novembro de 2011. **Anais...** 2012. p. LXVI – LXXX.

TENÓRIO, A.; COSTA, Z.; TENÓRIO, T. Resolução de exercícios e problemas de Função polinomial do 1.º grau com e sem o GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, São Paulo, v. 3, n. 2, p.104-119, 2014.

TENÓRIO, A.; RODRIGUES, S.; TENÓRIO, T. Estudo de funções polinomiais do 1º grau com o software GeoGebra e blogs. **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, São Paulo, v.4, n.2, p. 122-137, 2015.

TRAMM, E.; CUNHA, J. A matemática por trás do logotipo do McDonald's. **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, São Paulo, v.1, n.2, p. 49-64, 2012.

VIEIRA, F. Funções definidas implicitamente por meio de equações: uma discussão sobre o uso dos *softwares* Geogebra e *CAS Maple*. **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, São Paulo, v.2. n.2, p. 123-141, 2013.