UNA POLITICA OPTIMA CONJUNTA DE REPARACION Y DE REEMPLAZAMIENTO PREVENTIVO

Alfredo García Güemes

RESUMEN.— En este trabajo se considera un equipo para el cual se puede elegir la calidad de la reparación cuando se produce la avería. Bajo ciertas condiciones, se obtiene la esperanza matemática del coste medio a largo plazo, que se minimiza con la elección de una política de reparación y de reemplazamiento preventivo. Asimismo, se obtiene una condición suficiente para que exista un tiempo finito transcurrido el cual debe procederse a efectuar un reemplazamiento preventivo. Se finaliza ilustrando con un ejemplo los resultados anteriores.

1. INTRODUCCION

Sea un sistema que se avería estocásticamente, siendo su función de distribución de tiempo hasta la avería F(t) y f(t), su función de densidad. Frecuentemente, se establecen supuestos acerca de la distribución de tiempo hasta la avería (Kijima, M., 1989).

Supongamos que es posible elegir la calidad de las reparaciones que se efectúan tras la avería. Estas reparaciones pueden ir desde la reparación mínima, tras la cual el sistema queda tan viejo como momentos antes de que ocurriera la avería (Barlow, R. E. y Proschan, F., 1965) hasta la reparación perfecta, en la que el sistema queda tan bien como nuevo. Se puede considerar que en este caso lo que se efectúa es un reemplazamiento no preventivo.

Entre los extremos anteriores pueden efectuarse recuperaciones imperfectas (Brown, M. y Proschan, F., 1983; García Güemes, A., 1987), tras las que el sistema queda tan bien como nuevo con probabilidad p y tan mal como instantes antes de la avería con probabilidad q=1-p (Aven, T., 1980). Naturalmente, el coste de efectuar una reparación debe de ser una función creciente en p; $p \in [0, 1]$.

La regla de decisión que debe de adoptarse es la siguiente: «Por una parte, elegir la calidad de la reparación y por otra elegir el tiempo T que debe de transcurrir desde el último reemplazamiento preventivo o reparación perfecta, según sea lo último que haya ocurrido, para efectuar un reemplazamiento preventivo».

Para valorar esta política de reparación-reemplazamiento se va a utilizar como criterio la esperanza matemática del coste medio a largo plazo. Otro criterio muy utilizado es el de la esperanza del valor actual del coste total a largo plazo (Stadje, W. y Zuckerman, D., 1992).

Sean:

$\mathcal{F}(t)$: función de fiabilidad del sistema.

$R_i(p)$: tiempo transcurrido hasta la reparación perfecta, en el i-ésimo ciclo, dado que no se efectúa ningún reemplazamiento preventivo.

τ_i (T, p): amplitud del i-ésimo ciclo. τ_i (T, p)= min [R_i (p), T].

EC (T, p): esperanza matemática del coste medio a largo plazo.

EC_r (T, p): esperanza matemática del coste medio a largo plazo, debido a las reparaciones y reemplazamientos.

EC_{ri} (T, p): esperanza matemática del coste, debido a las reparaciones y posible reemplazamiento en un ciclo cualquiera.

$r_0(p)$: coste neto de una reparación.

r_1: coste neto de un reemplazamiento.

c: coste operativo del sistema por unidad de tiempo.

2. ESPERANZA MATEMATICA DEL COSTE MEDIO A LARGO PLAZO

Considerando un horizonte de planificación infinito se tiene que:

$$\left\{\tau_i(T,p)\right\}_{i=1}^{i=\infty}$$

genera un proceso de renovación, y por tanto denominando $E\tau$ (T, p), a la esperanza matemática de la longitud de un ciclo arbitrario, se tiene: (Ross, S. M., 1970, pág. 52).

$$EC(T,p) = c + EC_r(T,p) = c + \frac{EC_{ri}(T,p)}{E\tau(T,p)} \quad (1)$$

Sean:

$F_p(t)$: la función de distribución de tiempo hasta la reparación perfecta, comenzando con un sistema nuevo.

$v_p(t)$: la función de intensidad de una reparación perfecta.
$\mathfrak{F}_p(t)$: la correspondiente función de fiabilidad.
Se demuestran los siguientes resultados: (Brown, M. and Proschan, F. lema 1)

$$\begin{aligned} v_p(t) &= pv(t) \\ \mathfrak{F}_p(t) &= \mathfrak{F}^p(t) \end{aligned} \qquad (2)$$

por tanto:

$$F_p(t) = 1 - \mathfrak{F}^p(t)$$

Sea G (t, p) la función de distribución de τ (T, p), que tomará la forma:

$$G(t, p) = \begin{matrix} F_p(t) \text{ si } t < T \\ 1 \text{ si } t \geq T \end{matrix} \qquad (3)$$

entonces, para un valor dado de p:

$$E\tau(T, p) = \int_0^\infty t\, dG(t, p) = \int_0^T t\, dG(t, p)$$

integrando por partes teniendo en consideración las relaciones (2) y (3):

$$\int_0^T t\, dG(t, p) = T - \int_0^T F_p(t)\, dt = \int_0^T \left[1 - F_p(t)\right] dt = \int_0^T \mathfrak{F}^p\, dt$$

así pues:

$$E\tau(T, p) = \int_0^T \mathfrak{F}^p\, dt$$

Por otra parte si p fuera cero (la reparación es siempre mínima), el número esperado de averías en el intervalo (0, t), para t < T, es: (Barlow, R. E. and Proschan, F., 1965, pág. 96)

$$EN(t) = \int_0^t v(s)\, ds$$

por lo que el número esperado de averías en un ciclo, para el caso en que $0 < p < 1$, será:

$$EN(T, p) = \int_0^\infty \int_0^t v(s)\, ds\, dG(t', p)$$

integrando por partes:

$$EN(T,p) = \int_0^T \int_0^t v(s)\, ds\, dG(t', p) =$$

$$= \left[G(t,p) \int_0^t v(s)\, ds \right]_0^T - \int_0^T G(s,p)\, v(s)\, ds = \int_0^T v(s)\, ds - \int_0^T F_p(s)\, v(s)\, ds =$$

$$= \int_0^T \left[1 - F_p(s)\right] v(s)\, ds = \int_0^T \mathfrak{F}^p(s) \frac{1}{p} \frac{f_p(t)}{\mathfrak{F}^p(s)}\, ds = \frac{1}{p} F_p(T)$$

donde $f_p(t)$ es la función de densidad del tiempo hasta la reparación perfecta.

Dado que la probabilidad de que el sistema haya alcanzado una edad T, sin que se haya producido una reparación perfecta, es $\mathfrak{F}^p$ (T), se puede escribir:

$$EC_{ri} = r_0(p)\, EN(T,p) + r_1 \mathfrak{F}^p(T)$$

resultando para la relación (1), la siguiente expresión:

$$EC(T,p) = c + \frac{r_0(p) \frac{1}{p} F_p(T) + r_1 \mathfrak{F}^p(T)}{\int_0^T \mathfrak{F}^p(t)\, dt} \qquad (4)$$

3. MINIMO DE LA ESPERANZA MATEMATICA DEL COSTE MEDIO A LARGO PLAZO

Teorema 1. Los límites siguientes:

$$a) \lim_{\substack{T \to 0 \\ p \to 0}} EC(T,p) \to \infty$$

$$b) \lim_{\substack{T \to 0 \\ p \to 1}} EC(T,p) \to \infty$$

$$c) \lim_{\substack{T \to \infty \\ p \to 0}} EC(T,p) = \begin{cases} \textit{existe si } v(t) \textit{ acotado} \\ \infty \text{ si } v(t) \to \infty \end{cases}$$

$$d) \lim_{t \to \infty} EC(T,p) = c + \frac{r_0}{\mu}$$

(μ es la esperanza del tiempo hasta la avería).

implican que la relación (4) tiene mínimo, que puede estar incluso para T=∞, es decir, adoptando la política de no efectuar jamás reemplazamientos preventivos.

Demostración. El cálculo de los límites a) y b) es inmediato y representan la esperanza del coste medio de un equipo en el que se están efectuando reemplazamientos preventivos continuamente, sin llegar a funcionar, de aquí que su valor sea infinito independientemente de la política de reparación que se adopte.

La relación c) también es fácil de demostrar; en el caso en que v(t) esté acotado:

$$\lim_{\substack{T\to\infty \\ p\to 0}} \left[c + \frac{\frac{r_0(p)}{p} F_p(T) + r_1 \mathfrak{F}^p(T)}{\int_0^T \mathfrak{F}^p(t)\, dt} \right] =$$

$$\lim_{\substack{T\to\infty \\ p\to 0}} \left[c + \frac{r_0(p) \int_0^T v(t)\, dt + r_1 \mathfrak{F}^p(T)}{\int_0^T \mathfrak{F}^p(t)\, dt} \right] < c + K\, r_0(0)$$

siendo K una cota superior de v(t).

Si v(t) no está acotado, el resultado es inmediato, y no podría ser de otro modo, pues expresa la esperanza del coste medio de un equipo que transcurrido un cierto tiempo se está reparando y averiando de forma instantánea, sin llegar a funcionar.

Para demostrar la relación d) bastará con recordar que en el caso en que p= 1, la esperanza del tiempo hasta la avería coincide con la esperanza del tiempo hasta la reparación perfecta y que es igual a:

$$\mu = \int_0^T F(t)\, dt$$

Estas relaciones indican que la esperanza del coste medio a largo plazo es decreciente en T al menos en algún intervalo, por lo que tendrá mínimo, que podría estar en el infinito, es decir, que la política óptima de reemplazamiento sea no reemplazar nunca, efectuando reparaciones con una probabilidad p* de reparación perfecta.

Derivando (4) con respecto a T y con respecto a p, e igualando a cero dichas derivadas se tiene:

$$\left[\frac{r_0(p)}{p} - r_1\right] v_p(T) = EC_r(T,p) \quad (5)$$

$$\frac{F_p(T)\left[\frac{r_0(p)}{p} - \frac{r_0(p)}{p^2}\right] + \left[r_1 - \frac{r_0(p)}{p}\right] \mathfrak{F}^p(T)\log \mathfrak{F}'(T)}{\int_0^T \mathfrak{F}^p(t)\log \mathfrak{F}(t)\,dt} = EC_r(T,p) \quad (6)$$

Tratar de obtener el punto (T*, p*), que minimiza la expresión (4), utilizando las relaciones (5) y (6), resulta más complicado que hacerlo directamente, haciendo uso de la derivabilidad que se ha supuesto en las funciones que intervienen en (4); sin embargo se puede tratar de encontrar algunas condiciones que aseguren la existencia de un valor finito para T*, es decir, que sea adecuado efectuar reemplazamientos preventivos.

Sea *a* (T, p), el primer miembro de la relación (5):

$$a(T,p) = \left[\frac{r_0(p)}{p} - r_1\right] v_p(t) = \left[r_0(p) - r_1 p\right] v(t)$$

Teorema 2.

a) Si se cumple:

$$\lim_{T\to\infty} a(T,p) > EC_r(\infty, p), \forall p$$

entonces existe al menos un T* finito y un p* que minimizan EC (T, p).

b) Si además *a* (T, p) es estrictamente creciente en T, dicho punto es único.

Demostración. Se observa de inmediato que el par (T*, p*), que minimiza EC_r (T, p), minimiza EC (T, p).

Derivemos (4) respecto a T:

$$\frac{d}{dT} EC(T,p) = \frac{\mathfrak{F}^p(T)\, a(T,p) \int_0^T \mathfrak{F}^p(t)\,dt - EC_{ri}(t,p)\,\mathfrak{F}^p(T)}{\left[\int_0^T \mathfrak{F}^p(t)\,dt\right]^2}$$

de donde:

$$si \quad \frac{d}{dT} EC(T,p) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad EC_r(T,p) = a(T,p)$$

$$si \quad \frac{d}{dT} EC(T,p) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad EC_r(T,p) < a(T,p)$$

$$si \quad \frac{d}{dT} EC(T,p) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad EC_r(T,p) > a(T,p)$$

La primera de estas relaciones (que es igual que la (5) indica que para un valor fijo de p, las funciones a (T, p) y EC (T, p), si se intersectan lo harán en los puntos extremos de esta última función.

Estas mismas relaciones indican que si se intersectan las funciones EC (T, p) y a (T, p), ésta última cruzará a EC (T, p) de abajo hacia arriba, en caso de mínimo y en sentido contrario en caso de máximo.

Como quiera que se cumple:

$$\lim_{T \to 0} a(T,p) < EC(0,p) \quad \forall\ p$$

si se cumple la hipótesis del apartado a) del teorema es obvio, por la continuidad de las funciones que intervienen, que las funciones *a* (T, p) y EC (T, p) se intersectarán al menos por un mínimo de esta última.

Para demostrar el apartado b) es suficiente argumentar de la siguiente manera: si se intersectaran por más de un mínimo de EC (T, p), también tendría que hacerlo al menos por un máximo, en cuyo caso la función *a* (T, p) tendría que ir de arriba hacia abajo, lo cual contradice la hipótesis de b). c. q. d.

La condición necesaria y suficiente para que la función *a* (T, p) sea creciente es que lo sea v(t), es decir, que F(T), sea una función IFR (increasing failure rate). Además, las funciones IFR más usuales en fiabilidad tienen un tanto de avería no acotado, por lo que se cumplirá en estos casos que *a* (∞, p) > EC (∞, p); (p>0), lo que aseguraría la existencia de un único mínimo.

Ahora bien, si p=0, nos encontramos ante un modelo de reparación mínima. Una condición suficiente para que este modelo tenga solución única es que F sea IFR (Barlow, R. E. and Proschan, F., 1965, pág. 97).

4. EJEMPLO

Sea un equipo cuyo tiempo transcurrido hasta la avería sigue una distribución de Weibull, con parámetros λ= 1 y α= 2; por tanto:

$$F(t) = 1 - e^{-t^2}; \qquad \mathfrak{F}(t) = e^{-t^2}; \qquad v(t) = 2t$$

$$\mathfrak{F}_p(t) = \mathfrak{F}^p(t) = e^{-pt^2}; \qquad F_p(t) = 1 - e^{-pt^2}$$

Sean los costes de reparación, reemplazamiento preventivo y coste operativo, respectivamente:

$$r_0(p)=3p^2+1;\ r_1=3;\ c=0{,}5$$

Se observa directamente que la función F(t) es IFR y por tanto se cumplirá el teorema 2. En efecto:

$$a(T,p)=2\,T\,[3p^2+1-3p]$$

por lo que se ve inmediatamente que:

$$EC_r(\infty,p)=\frac{\frac{3p^2+1}{p}}{\int_0^\infty e^{-t^2p}dt}=\frac{\frac{3p^2+1}{p}}{\frac{1}{2\sqrt{p}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{6p^2+2}{\sqrt{p\pi}}$$

y por tanto la función EC (T, p) tendrá un único mínimo.

$$\lim_{T\to\infty} a(T,p)>EC_r(\infty,p)\ \ \forall\ p$$

cuyo mínimo se produce para: **T*= 1,8; p*= 0,28.**

$$EC(T,p)=0,5+\frac{\frac{3p^2+1}{p}\left(1-e^{-t^2p}\right)+e^{-t^2p}}{\int_0^T e^{-t^2p}dt}$$

BIBLIOGRAFIA

Aven, T. (1980): *Optimal replacement policies for a multiestate system.* University of Oslo.

Barlow, R. E. y Proschan, F. (1965): *Mathematical theory of reliability.* John Wiley and sons, Inc. N. Y.

Brown, M. y Proschan, F. (1983): «Imperfect Repair». J. *Appl. Prob.* 20, pp. 851-859.

García Güemes, A. (1987): «Modelos multiestado de reemplazamiento con reparación imperfecta». *Trabajos de Investigación Operativa.* Vol. 2. Núm. 1, pp. 21-30.

Kijima, M. (1989): «Some results for repairable systems with general repair». *J. Appl. Prob.* 26, pp. 80-102.

Ross, S. M. (1970): *Applied probability models with optimization applications.* Holden-day, Inc. San Francisco.

Stadje, W. y Zuckerman, D. (1992): «Optimal repair policies with general degree of repair in two maintenance models». *Operations Research Letters* 11, pp. 77-80.