OPTIMIZACIÓN MULTICRITERIO EN EL CONTEXTO DE LA PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA

Ramón Fernández Lechón
Mª Dolores Soto Torres
Juan José Garcillán García

RESUMEN.— A partir de los años 70 se han publicado numerosos artículos sobre optimización multicriterio. Nosotros, en este trabajo, presentamos un modelo general de programación multiobjetivo y, puesto que el concepto de solución óptima puede no existir en estos problemas, damos distintas definiciones de soluciones eficientes, que son las que hay que tratar de encontrar al resolver dichos programas.

Caracterizamos dichas soluciones mediante condiciones necesarias en programación diferenciable, que serán también suficientes para programas convexos. En programación no diferenciable, y a partir del concepto de punto de silla, establecemos condiciones suficientes de eficiencia. El planteamiento del problema dual de un programa multiobjetivo nos permite también establecer relaciones entre las soluciones eficientes de ambos programas. Finalmente planteamos algunos modelos económicos de aplicación de dichas técnicas.

1. Introducción

Una gran mayoría de los problemas que se plantean en las empresas se reducen, en última instancia, a la obtención de unos determinados objetivos. Estos objetivos vienen determinados por medio de relaciones o funciones que ligan distintas variables; si el objetivo es único el problema se resuelve con cierta facilidad, pero el problema se complica más cuando la función objetivo no es única. Los problemas complejos incluyen distintos objetivos que no pueden reducirse a un objetivo único. En esta multiplicidad de objetivos se presentan en general objetivos heterogéneos que no son comparables ya que no pueden reducirse a una misma unidad de evaluación, y además a veces surge el problema de la posible conflictividad entre unos y otros.

Ahora bien, esta pluralidad de objetivos no ha de confundirse con la pluralidad de decisores. Nosotros nos vamos a referir a problemas de programación multiobjetivo, con un único decisor, desde el punto de vista de la programación matemática, y no desde la metodología de la teoría de juegos, que analizaría el problema de la pluralidad de decisores.

Así pues, la programación multiobjetivo es una parte de la programación matemática, y puesto que son innumerables sus aplicaciones en diversos campos de toma de decisiones en el mundo real, se puede considerar hoy como un instrumento fundamental en el ámbito económico y empresarial.

Aunque la incorporación y desarrollo de dichas técnicas es reciente no se puede hablar, como ocurre en cualquier área de conocimiento, de una fecha exacta. Sin embargo, si puede afirmarse que es en la década de los sesenta cuando comienzan a aparecer diversos trabajos sobre programación multiobjetivo, alcanzando en la década siguiente un verdadero auge con la publicación de numerosos artículos y libros sobre el tema. Aún siendo su incorporación reciente, la programación multiobjetivo ha alcanzado una entidad propia utilizando conceptos nuevos con un significado característico.

Uno de los conceptos claves en programación multiobjetivo es el concepto de «óptimo de Pareto» que, aunque conocido y utilizado en la ciencia económica, comienza a aplicarse en el área de la Investigación Operativa a partir de 1951 como consecuencia de un trabajo de Koopmans. En ese mismo año Kuhn y Tucker publican un trabajo que puede considerarse que abrió el camino para posteriores desarrollos de la programación multiobjetivo.

A pesar de estas aportaciones y de las de Charnes y Cooper en 1961 proponiendo el método de programación por objetivos (goal programming) basado en la noción de distancia, que irá adquiriendo gran importancia, la programación multiobjetivo no fue considerada como una especialidad diferenciada hasta 1972, año en que se celebra una conferencia en Carolina del Sur. Es a partir de ese momento cuando comienzan a realizarse reuniones internacionales y se multiplican los trabajos y publicaciones sobre el tema en diversos campos científicos como la economía, la investigación operativa, la ingeniería, etc.

En el trabajo, realizamos un planteamiento general del problema a estudio, definimos los conceptos básicos de la programación multiobjetivo así como distintos tipos de soluciones eficientes que se pueden considerar. En la sección tercera caracterizamos dichas soluciones eficientes para programas diferenciables y no diferenciables, para estos últimos a través del concepto de punto de silla del lagrangiano, y finalizamos dicha sección planteando el problema dual de un problema general de programación multiobjetivo. Finalizamos el trabajo planteando cuatro modelos económicos, dos de ellos lineales, con un claro tratamiento de programación multiobjetivo.

2. Conceptos básicos

Un problema de programación multiobjetivo puede plantearse, de forma general, del siguiente modo:

$$\text{(PM)} \qquad \text{Opt } \bar{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_p(x))$$

sujeto a:

$$g_i(x) \leq 0 \qquad i = 1, \ldots, m$$
$$x \varepsilon R^n$$

Esta formulación dependerá de las características de las funciones objetivo y de las restricciones, ya que si todas ellas tienen un comportamiento lineal se tendría un problema de programación lineal multiobjetivo.

El conjunto de puntos que verifican las restricciones del problema le denotamos por X, es decir, X es el conjunto de oportunidades o conjunto de soluciones posibles.

Por tanto, como ya indicamos, la diferencia entre la programación multiobjetivo y la uniobjetivo está, en que ésta trata de optimizar una función escalar, mientras que aquella trata de optimizar una función vectorial. Esta diferencia resulta ser esencial, ya que si en programación uniobjetivo el concepto de solución óptima es obvio, esto mismo no puede decirse en programación multiobjetivo.

En efecto, en programación uniobjetivo, cualquier par de soluciones posibles puede compararse a través del valor que en ellas alcanza la función objetivo, puesto que son números reales, y la relación «mayor o igual» es un orden total para ellos. Sin embargo, esta relación en R^p no es un orden total, sino sólo parcial, por lo que no será, en general, posible comparar un par de soluciones posibles de un problema multiobjetivo.

Además en R^p se pueden considerar otras relaciones de orden, que tampoco tienen por qué tener la cualidad de ser órdenes totales, por esto, en programación multiobjetivo el concepto de solución óptima no tiene por qué existir. Por consiguiente, un concepto clave en programación multiobjetivo es el de solución eficiente, cuyo conjunto coincidirá con el de las soluciones óptimas si es que estas últimas existen. Definimos entonces este concepto en sus diferentes acepciones más usuales.

Diremos que una solución posible x^* es una solución eficiente (también llamada no inferior), si no existe otra solución posible x tal que $\bar{f}(x)$ $\bar{f}(x^*)$ donde es el orden establecido en el conjunto $Y = \bar{f}(X)$.

El concepto de solución eficiente también puede establecerse a través del conjunto de dominación. Para cada $y \varepsilon Y \subset R^p$ definimos el conjunto de dominación

$$D(y) = \{d \varepsilon R^p / \, y \succ y + d\} \cup \{0\}$$

D(y) puede considerarse como una aplicación de Y en R^p.

Con esta definición de conjunto de dominación podemos decir que x^* es una solución eficiente si no existe ningún $x \varepsilon X$ tal que $\bar{f}(x^*) \varepsilon \bar{f}(x) + D(\bar{f}(x))$ y $\bar{f}(x) \neq \bar{f}(x^*)$.

Un caso de especial interés se plantea cuando D(y) es constante para todo valor de y, esto es, D(y) = D. Notemos que si el orden establecido es $\leq$ entonces D es R^p_+, si esta relación es $<$ entonces $D = \mathring{R}^p_+ \cup \{0\}$; en estos casos el concepto de solución eficiente anteriormente establecido se denomina respectivamente solución eficiente y débilmente eficiente en sentido de Pareto, cuyas redefiniciones, para un problema de minimización [1] serían:

[1] En lo sucesivo supondremos que el problema PM está planteado en mínimos.

Una solución posible x^* es eficiente en sentido Pareto del problema PM si no existe ninguna otra solución posible x tal que $\bar{f}(x) \leq \bar{f}(x^*)$ con $\bar{f}(x) \neq \bar{f}(x^*)$ y sería débilmente eficiente en sentido de Pareto si no existe ninguna otra solución posible x tal que $\bar{f}(x) < \bar{f}(x^*)$.

Otras definiciones más restrictivas del concepto de eficiencia que pueden considerarse, son las denominadas soluciones propiamente eficientes. Así, se pueden definir soluciones propiamente eficientes en sentido de Borwein, en sentido de Benson y en sentido de Henig global y local que son esencialmente las mismas que las de Benson y Borwein respectivamente[2].

Cuando $D = R^p_+$ dos nuevos conceptos de soluciones propiamente eficientes se pueden considerar, son los conceptos de soluciones propiamente eficientes según Geoffrion y según Kuhn-Tucker.

Una solución posible x^* se dice que es propiamente eficiente del problema PM según Geoffrion si es eficiente y si existe un número real $M > 0$ tal que para cada i y para cada solución posible x que satisfaga $f_i(x) < f_i(x^*)$ existe al menos un j tal que:

$$f_j(x^*) < f_j(x)$$

y además

$$\frac{f_i(x^*)-f_i(x)}{f_j(x)-f_j(x^*)} \leq M$$

así pues este tipo de soluciones propiamente eficientes constituyen un subconjunto de las soluciones eficientes de Pareto y ambos tipos de soluciones coinciden cuando el conjunto Y es un poliedro convexo[3].

Si el problema multiobjetivo es diferenciable entonces puede hablarse de soluciones propiamente eficientes según Kuhn-Tucker. Una solución posible x^* del programa PM es propiamente eficiente según Kuhn-Tucker si es eficiente y si no existe un vector h tal que

i) $< \nabla f_i(x^*), h > \leq 0$	$i = 1,2,\ldots,p$
ii) $< \nabla f_i(x^*), h > < 0$	para algún i.
iii) $< \nabla g_j(x^*), h > \leq 0$	para toda restricción j saturada.

Si el problema PM es convexo y x^* es propiamente eficiente según Kuhn-Tucker, también lo es según Geoffrion; para la recíproca no es necesario que el programa sea convexo sino que basta con que la solución propiamente eficiente de Geoffrion verifique la cualificación de las restricciones.

2 Estas definiciones así como las relaciones existentes entre ellas pueden encontrarse en Sawaragi Y., Nakayama, H. y Tanino T., págs. 37-40.

3 Vid.: Sawaragi Y., Nakayama H. y Tanino T., pág. 46.

3. Caracterización de las soluciones

La programación multiobjetivo como parte integrante de la programación matemática puede analizarse siguiendo los mismos pasos que en programación uniobjetivo. Así, y en el caso no lineal, podemos distinguir entre programación diferenciable y no diferenciable, programas convexos y programas no convexos.

Comenzamos con los programas diferenciables, en los que las condiciones de Kuhn-Tucker pueden establecerse de nuevo sólo como condiciones necesarias.

Las condiciones de Kuhn-Tucker, en este tipo de programas, pueden establecerse del siguiente modo:

Una condición necesaria para que x^* solución posible del programa PM sea eficiente según Kuhn-Tucker es que exista $\mu \in R^p$ y $\lambda \in R^m$ tal que

i) $\sum_{i=1}^{p} \mu_i \nabla f_i(x^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla g_j(x^*) = 0$

ii) $\sum_{i=1}^{m} \lambda_j g_j(x^*) = 0$

iii) $\mu > 0, \ \lambda \geq 0$

La demostración de esta condición se realiza teniendo en cuenta la definición de eficiencia según Kuhn-Tucker, establecida en la sección anterior y el teorema de alternativas de Tucker.

De acuerdo con la relación entre soluciones eficientes según Geoffrion y Kuhn-Tucker, las tres condiciones anteriores son también condiciones necesarias de eficiencia según Geoffrion si se impone además la condición de que la solución verifique las condiciones de cualificación de las restricciones de Kuhn-Tucker.

Puede establecerse también una condición necesaria para soluciones débilmente eficientes de Pareto, en efecto, una solución posible x^* del programa PM verificando las condiciones de cualificación de Kuhn-Tucker es débilmente eficiente si existen dos vectores $\mu \in R^p$ y $\lambda \in R^m$ tal que

i) $\sum_{i=1}^{p} \mu_1 \nabla f_i(x^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla g_j(x^*) = 0$

ii) $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x^*) = 0$

iii) $\mu \geq 0, \ \lambda \geq 0$

Notemos que la diferencia entre la condición necesaria para eficientes y débilmente eficientes radica en que en esta última se exige que el vector μ sea no negativo, mientras que en aquella debía ser positivo.

Si en el programa PM se añade la restricción de no negatividad de las variables las condiciones anteriores de eficiencia serían:

i) $\sum_{i=1}^{p} \mu_i \nabla f_i(x^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla g_j(x^*) \quad 0$

ii) $x^* (\sum_{i=1}^{p} \mu_i \nabla f_i(x^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla g_j(x^*)) = 0$

iii) $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x^*) = 0$

iv) $\mu > 0$ $(\mu \geq 0)$, $\lambda \geq 0$

Notemos que estas expresiones o las anteriores, todo dependerá del problema elegido, son similares a las que se enunciarían para un programa uniobjetivo del mismo tipo, si la función lagrangiana asociada al problema multiobjetivo fuera:

$$L(x,\lambda) = \sum_{i=1}^{p} \mu_i f_i(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x)$$

donde los λ_j $j = 1,2,\ldots,m$ son los multiplicadores asociados a las restricciones y los escalares μ_i, $i = 1,2,\ldots,p$ son unos coeficientes asignados a cada función objetivo; en particular si es un programa uniobjetivo el escalar asociado a la única función objetivo es $\mu = 1$.

Si además de ser el programa diferenciable es convexo, todas las condiciones anteriores son también suficientes.

Veamos que ocurriría para programas no diferenciables. Definimos primeramente la función lagrangiana asociada al problema PM de la siguiente forma:

$$L(x,\Lambda) = \bar{f}(x) + \Lambda\, \bar{g}(x)$$

donde Λ es una matriz del conjunto Ω de matrices pxm no negativas.

Ahora podemos introducir el concepto de punto de silla. Un par (x^*, Λ^*) decimos que es un punto de silla de la lagrangiana $L(x,\Lambda)$ si se verifica

$$L(x^*, \Lambda^*) \in \mathrm{Min}\{L(x,\Lambda^*),\ x \in R^n\} \cap \mathrm{Max}\{L(x^*,\Lambda),\ \Lambda \in \Omega\}$$

es decir, x^* es eficiente para mínimo de la lagrangiana fijado Λ^*, mientras que Λ^* es eficiente para máximo de la lagrangiana fijado x^*.

Puede establecerse una condición necesaria y suficiente para determinar cuando un par (x^*,Λ^*) es un punto de silla, y así podemos enunciar: El par (x^*, Λ^*) es un punto de silla si y sólo si se verifican las tres condiciones siguientes:

i) $L(x^*,\Lambda^*) \in \mathrm{Min}\{L(x,\Lambda^*),\ x \in R^n\}$

ii) $\bar{g}(x^*) \leq 0$

iii) $\Lambda^* \bar{g}(x^*) = 0$

La demostración de esta proposición no resulta difícil. Se han de tener en cuenta los conceptos anteriores de punto de silla y la función vectorial lagrangiana.

La existencia del punto de silla nos determina una condición suficiente para la resolución del programa multiobjetivo, en efecto: Si (x^*,Λ^*) es un punto de silla de la función vectorial lagrangiana entonces x^* es una solución eficiente del problema PM. La recíproca no es cierta en general, ahora bien, si el programa es convexo y el conjunto de oportunidades tiene interior no vacío, entonces si x^* es una solución propiamente eficiente del programa PM puede demostrarse la existencia de una matriz no negativa Λ^* tal que (x^*,Λ^*) es un punto de silla de la función vectorial lagrangiana de PM.

Notemos que al establecer el problema del punto de silla hemos tomado la función lagrangiana de forma vectorial, mientras que cuando establecíamos las condiciones de Kuhn-Tucker era escalar, una y otra están relacionadas ya que la matriz no negativa Λ de multiplicadores está relacionada con los multiplicadores de la lagrangiana escalar mediante la relación:

$$\Lambda^t \mu = \lambda$$

este hecho permite trasladar los resultados.

Al igual que en programación uniobjetivo se definía el problema dual de uno dado, también aquí puede realizarse un planteamiento similar.

Así pues, definimos la función dual del programa PM del siguiente modo:

$$h(\Lambda) = \min_{x \varepsilon R^n} L\,(x,\Lambda)$$

la función dual h es una aplicación del conjunto de las matrices Ω en R^p que está definida en el conjunto H de matrices pxm no negativas para las cuales la lagrangiana alcanza soluciones eficientes.

$$H = \{\Lambda \; \varepsilon \; \Omega \; / \min_{x \varepsilon R^n} L\,(x,\Lambda) \text{ existe}\}$$

A partir de este concepto de función dual podemos definir un nuevo programa multiobjetivo

$$\max_{\Lambda \varepsilon H} U\, h(\Lambda)$$

que denominamos problema dual.

Se pueden demostrar determinadas proposiciones que relacionan las soluciones eficientes del problema primal y dual. Así, podemos enunciar la siguiente proposición: Si x^* es una solución posible del primal, Λ^* una solución posible del dual y $\bar{f}(x^*)\ \varepsilon\ h(\Lambda^*)$ entonces x^* es una solución eficiente del primal y Λ^* lo es del dual, además si x^* es una solución propiamente eficiente del primal y verifica la cualificación de Slater entonces

$$\bar{f}(x^*) \; \varepsilon \; \max_{\Lambda \varepsilon H} U\, h(\Lambda)$$

Otra relación que juega un papel fundamental entre ambos programas primal y dual viene dada por la siguiente proposición:

El par (x^*,Λ^*) es un punto de silla del lagrangiano vectorial si y sólo si ambas son soluciones posibles del primal y dual y $\bar{f}(x^*)\ \varepsilon\ h(\Lambda^*)$.

La definición de punto de silla, así como las relaciones y proposiciones establecidas para la lagrangiana vectorial, podrían haberse definido para la lagrangiana escalar; nótese que para este caso las relaciones no serían de pertenencia a conjuntos sino relaciones de desigualdad como ocurría en programación uniobjetivo.

4. Algunas aplicaciones de la programación multiobjetivo

Son muy abundantes los modelos económicos con un planteamiento multiobjetivo. Nosotros en esta sección vamos a tratar de plantear alguno de estos modelos a través del enfoque de la programación multiobjetivo.

El problema del transporte

Es perfectamente conocido el clásico problema del transporte, problema de programación lineal en el que la función objetivo consiste en minimizar el coste ocasionado al transportar mercancías desde m orígenes o almacenes a n destinos o puntos de venta.

Pero a la hora de buscar esa distribución óptima de mercancía no tiene por que ser el único criterio el del coste de transporte, ya que la empresa puede plantearse otros objetivos aunque a veces puedan resultar incompatibles entre sí, como por ejemplo rapidez en la entrega, minimización de costes de personal, minimización de costes de stocks, etc..

Obviamente al estudiar el problema desde el punto de vista multiobjetivo habrá que tener en cuenta que cada criterio que se tenga en consideración generará una función objetivo

$$z_k = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^k x_{ij}$$

donde c_{ij}^k representa el coeficiente de x_{ij} según el k-ésimo criterio.

Luego el problema del transporte multiobjetivo puede plantearse del siguiente modo:

$$\min Z = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_p)$$

sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad i = 1,2,\ldots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j = 1,2,\ldots,n$$

$$x_{ij} \quad 0$$

y verificando además $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

donde x_{ij} es la cantidad de mercancía enviada desde el origen i al destino j, a_i es la cantidad de mercancía disponible en el origen i y b_j la cantidad de mercancía demandada por el destino j.

Un problema similar a éste, y también lineal como el problema del transporte multiobjetivo, se podría plantear para el problema clásico de asignación óptima de recursos.

Un modelo de interconexión de sistemas

Describimos ahora, un modelo planteado por Haimes y Tarvainen (1981) en el que consideran un sistema constituido por k subsistemas interrelacionados. Para cada subsistema $i = 1,2,\dots,k$ se denota por:

y_i = vector de output del subsistema i.
x_i = vector de inputs del subsistema i desde los otros subsistemas.
m_i = vector de decisión del subsistema i.
f^i = $(f_1^{\,i}, f_2^{\,i}, \dots, f_{ni}^{\,i})$ vector de objetivos del subsistema i.
n_i = número de objetivos del subsistema i.

Los outputs de cada subsistema son función de sus inputs desde los otros subsistemas y de sus variables de decisión.

$$y_i = H_i\,(x_i, m_i) \qquad i = 1,2,\dots,k$$

Las restricciones de cada subsistema están dadas por una función vectorial g_i

$$g_i\,(x_i, m_i, y_i) \leq 0 \qquad i = 1,2,\dots,k$$

Las relaciones entre input y output de los subsistemas vienen dadas por las expresiones

$$x_i = \emptyset_i\,(y_1, y_2, \dots, y_k) \qquad i = 1,2,\dots,k$$

En el problema descrito por Haimes y Tarvainen se considera que estas relaciones son lineales; así como otras restricciones globales para todo el sistema.

Cada componente del vector de objetivos del subsistema i se considera que es función de los vectores input, output y de decisión del subsistema, esto es

$$f_j^{\,i} = f_j^{\,i}\,(x_i, m_i, y_i) \qquad i = 1,2,\dots,k \qquad j = 1,2,\dots,k$$

Se denota por $f = (f^1, f^2, \dots, f^k)$ el vector de objetivos de todos los subsistemas y por $F = (F_1(f), F_2(f), \dots, F_n(f))$ el vector objetivo del sistema, donde n es el número de objetivos del sistema.

Entonces el problema viene planteado como sigue:

$$\text{opt } F = (F_1(f), F_2(f), \dots, F_n(f))$$

sujeto a:

$$\begin{array}{ll} y_i = H_i\,(x_i, m_i) & i = 1,2,\dots,k \\ g_i\,(x_i, m_i, y_i) \leq 0 & i = 1,2,\dots,k \\ x_i = \emptyset_i\,(y_1, y_2, \dots, y_k) & i = 1,2,\dots,k \end{array}$$

La economía del Bienestar

El problema general de la Teoría del Bienestar, puede plantearse como un programa multiobjetivo. En efecto, si consideramos un sistema formado por p individuos en el que hay n bienes y m recursos, el problema podemos expresarle del siguiente modo

$$\max U = (U_1(q_1), U_2(q_2), U_p(q_p))$$

sujeto a:

$$\sum_{i=1}^{p} q_{ij} \leq Q_j \qquad j = 1,2,\ldots,n$$

$$v_{ik} \leq v_{ik}^{*}, \qquad \sum_{i=1}^{p} v_{ik}^{*} = V_k \qquad i = 1,\ldots,p$$

$$k = 1,\ldots,r$$

$$F(Q_1, Q_2,\ldots, Q_n, v_1, v_2,\ldots, v_p) = 0$$

$$q_{ij} \geq 0,\ v_{ij} \geq 0,\ Q_j \geq 0$$

donde q_{ij} es la cantidad que consume el individuo i del bien j y Q_j es la cantidad de producción del bien j. Entonces la primera restricción señala que los consumos por los p individuos del bien j no puede superar a la producción de este bien, y esto, para los n bienes que produce el sistema.

La segunda restricción indica que la cantidad del recurso k que es ofertado por la persona i, v_{ik}, no puede superar a la dotación inicial que de este recurso posee esa persona v_{ik}^{*}. En esta restricción, se supone además que los recursos que poseen los individuos del sistema es una cantidad fija V_k, $k = 1,2,\ldots, r$.

La transformación de los recursos en bienes de consumo, se recoge en la tercera restricción, que es simplemente una función de producción.

Por último, la cuarta restricción recoge la no negatividad de los consumos, producción y oferta de recursos.

Cada una de las soluciones posibles de este problema, nos determinará el conjunto de recursos ofertados y bienes consumidos por cada individuo.

La función objetivo del problema será la maximización de las utilidades de todos los individuos que constituyen el sistema, utilidades que se suponen funciones del vector de consumos de cada individuo, es decir:

$$q_i = (q_{i1}, q_{i2},\ldots, q_{in})$$

La consideración de distintas funciones objetivo en este problema es lo que ha dado lugar a distintos planteamientos, y por tanto, distintas soluciones, en el desarrollo de la Teoría del Bienestar.

Un modelo de producción

Veamos, por último, un modelo de producción lineal desarrollado por Wang y Duckstein (1983)[4] en el que se pretende determinar la cantidad de I artículos diferentes producidos por J procesos en T periodos de fabricación. La demanda es conocida por cada periodo y no hay pérdidas. La capacidad de cada proceso puede aumentarse por horas extraordinarias. La fuerza de trabajo puede ajustarse al comienzo del periodo y el total puede aumentarse por horas extraordinarias. Los artículos fabricados se inspeccionan y las unidades defectuosas se rechazan. El porcentaje de rechazo de cada artículo en cada proceso es conocido.

Las funciones objetivo que se consideran sobre los periodos de producción son las cinco siguientes: Coste total de producción y almacenaje, pérdidas totales por artículos rechazados, fluctuación total de la fuerza de trabajo, horas extraordinarias de trabajo, capacidad en horas no utilizadas regularmente.

El modelo trata de determinar la cantidad de cada artículo fabricada en cada proceso y cada periodo tal que se satisfagan los objetivos mencionados.

Las variables de decisión del modelo son:

X_{ijt} = cantidad del artículo i producida regularmente por el proceso j en el periodo t.

Y_{ijt} = cantidad del artículo i producida por el proceso j en las horas extraordinarias en el periodo t.

I_{it} = stock del artículo i al final del periodo t.

H_t = trabajadores contratados en el periodo t.

L_t = trabajadores despedidos en el periodo t.

W_t = trabajadores empleados en el periodo t.

P_{jt} = horas no utilizadas regularmente en el periodo t por el proceso j.

Los parámetros del modelo vienen dados por:

a_{ij} = tiempo de mano de obra para cada unidad del artículo i producida en el proceso j.

b_{ij} = tiempo de proceso para cada unidad del artículo i producida en el proceso j.

c_{ij} = coste unitario de producción excluyendo costes de mano de obra para el artículo i producido por el proceso j.

d_{it} = demanda del artículo i en el periodo t.

e_t = coste de mano de obra en horas extraordinarias para el periodo t.

r_j = coste de fabricación del proceso j en horas extraordinarias.

h_i = coste por unidad almacenada del artículo i en cada periodo.

k_t = coste de mano de obra regular en el periodo t.

[4] Vid.: Tabucanon M.T. pág. 196.

m_{jt} = capacidad en horas regulares para el proceso j en el periodo t.

μ = horas de mano de obra regulares por hombre y día.

g_{jt} = porcentaje del tiempo del proceso regular utilizable para horas extraordinarias por el proceso j en el periodo t.

f_t = porcentaje de mano de obra regular utilizable para horas extraordinarias durante el periodo t.

q_{ij} = porcentaje rechazado del artículo i producido por el proceso j.

s_i = precio de venta del artículo i.

El problema consistirá en minimizar las siguientes funciones objetivo:

$$\min \sum_{i\varepsilon I} \sum_{j\varepsilon J} \sum_{t\varepsilon T} c_{ij} (X_{ijt} + Y_{ijt}) + \sum_{t\varepsilon T} k_t W_t + \\ + \sum_{i\varepsilon I} \sum_{j\varepsilon J} \sum_{t\varepsilon T} e_t(a_{ij} Y_{ijt}) + \sum_{i\varepsilon I} \sum_{j\varepsilon J} \sum_{t\varepsilon T} r_i(b_{ij} Y_{ijt}) + \\ + \sum_{i\varepsilon I} \sum_{t\varepsilon T} h_i I_{it}$$

expresión que engloba los costes totales de producción y almacenaje.

$$\min \sum_{i\varepsilon i} \sum_{j\varepsilon J} \sum_{t\varepsilon T} s_i q_{ij} (X_{ijt} + Y_{ijt})$$

expresión que indica las pérdidas totales por los artículos rechazados.

$$\min \sum_{t\varepsilon T} (H_t + L_t)$$

expresión que nos indica la fluctuación o movilidad de la fuerza de trabajo.

$$\min \sum_{i\varepsilon I} \sum_{j\varepsilon J} \sum_{t\varepsilon T} a_{ij} Y_{ijt}$$

expresión que recoge el número de horas de mano de obra extraordinarias:

$$\min \sum_{j\varepsilon J} \sum_{t\varepsilon T} P_{jt}$$

que indica el total de horas no utilizadas regularmente.

Las restricciones vienen dadas por:

a) $I_{it} = I_{i,t-1} + \sum_{j\varepsilon J} X_{ijt}(1-q_{ij}) + \sum_{j\varepsilon J} Y_{ijt}(1-q_{ij}) - d_{it}$ $\quad i \varepsilon I, t \varepsilon T$

b) $\sum_{i\varepsilon i} b_{ij} X_{ijt} + P_{ij} = m_{jt}$ $\quad j \varepsilon J, t \varepsilon T$

$\sum_{i\varepsilon I} b_{ij} Y_{ijt} \leq g_{gt} m_{jt}$ $\quad j \varepsilon J, t \varepsilon T$

c) $W_t = W_{t-1} + H_t - L_t$ $\quad t \varepsilon T$

$\sum_{i\varepsilon I} \sum_{j\varepsilon J} a_{ij} X_{ijt} \leq \mu W_t$ $\quad t \varepsilon T$

$\sum_{i\varepsilon I} \sum_{j\varepsilon J} a_{ij} Y_{ijt} \leq \mu f_t W_t$ $\quad t \varepsilon T$

d) $I_{it} \geq 0 \quad X_{ijt} \geq 0 \quad Y_{ijt} \geq 0 \quad P_{jt} \geq 0$

$H_t \geq 0 \quad L_t \geq 0 \quad W_t \geq 0$

La restricción a) relaciona el stock de un periodo con el del anterior, la producción de dicho periodo y la demanda; las restricciones b) son de capacidad del proceso productivo, la primera relativa a las horas de producción normales o regulares y la segunda relativa a las horas extraordinarias; las restricciones c) son restricciones de mano de obra, la primera relaciona los trabajadores empleados en un periodo con los empleados en el periodo anterior y los que se contratan y despiden en dicho periodo, la segunda hace referencia a las horas de mano de obra normales para cada periodo y la tercera a las extraordinarias; el conjunto de las restricciones d) es el correspondiente a la no negatividad de las variables de decisión.

El problema formulado contiene $T(2IJ + I + J + 3)$ variables de decisión y $T(I + 2J + 3)$ restricciones todas ellas lineales y se han planteado cinco funciones objetivo medidas en distintas unidades. Se podrían haber planteado otras restricciones sobre capacidad de almacenamiento, sobre limitaciones de recursos o de personal; incluir estas u otras restricciones no presenta ninguna dificultad.

Es obvio, y no pretendemos otra cosa en esta sección, observar la importancia que la programación multiobjetivo tiene en la toma de decisiones empresariales; ha contribuido en gran medida a la resolución de numerosos problemas planteados en el ámbito económico y empresarial de tal modo que la contribución ha sido mutua, pues esta necesidad de resolver determinados problemas ha hecho que se desarrolle dicha teoría y sus diversos métodos y algoritmos de resolución de los distintos modelos.

Bibliografía

Bitran, G.R., y Magnanti, T.L. (1979): «The Structure of Admissible Points with Respect to Cone Dominance». *Journal of Optimization Theory and Applications,* vol. 29, núm. 4, págs. 573-614.

Ecker, J.G. y Kouada, I.A. (1978): «Finding all Efficient Extreme Points for Multiple Objective Linear Programs». *Mathematical Programming,* vol. 14, núm. 2, págs. 249-261.

Charner, A., y Cooper, W. (1961): *Management Models and Industrial Applications of Linear Programing.* John Wiley and Sons, New York.

Cohon, J.L. (1978): *Multiobjective Programming and Planning.* Academic Press, New York.

Guerras Martin, L.A. (1989): *Gestión de Empresas y Programación Multicriterio.* ESIC, Madrid.

Haimes, Y.Y., y Tarvainen, K. (1981): «Hierarchical-Multiobjective Framework for Large Scale Systems» en *Multiple Criteria Analysis* (Nijkamp P. y Spronk, J., Ed.), Gower, England.

Sawaragi, Y., Nakayama, H., y Tanino, T. (1985): *Theory of Multiobjective Optimization.* Academic Press, Florida.

Seo, F., y Sakawa, M. (1988): *Multiple Criteria Decision Analysis in Regional Planning.* Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland.

Tabucanon, M.T. (1988): *Multiple Criteria Decision Marking in Industry.* Elsevier, Amsterdam.

Yu, P.L., y Zeleny, M. (1975): «The Set of All Nondominated Solutions in Linear Cases and a Multicriteria Simplex Method». *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* vol. 49, págs. 430-468.