

# ASPECTOS DINÁMICOS DE UN MODELO SOBRE COMPORTAMIENTOS SOCIALES

*M.<sup>a</sup> Dolores Soto Torres  
Ramón Fernández Lechón*

**RESUMEN.**— Este trabajo trata de ilustrar algunos aspectos dinámicos que aparecen en una versión de un modelo en tiempo continuo bidimensional, desarrollado por Sánchez Molinero. En particular, se determina una variedad central asociada a un punto fijo no hiperbólico y se analiza el comportamiento de las soluciones en ella. También se analiza la existencia de órbitas homocíclicas y heterocíclicas, demostrando la presencia de estas últimas, en una versión cuadrática del modelo, entre dos estados de reposo, uno es un punto de silla y el otro un sumidero.

## **1. Introducción**

La utilización de técnicas cualitativas para determinar el comportamiento de sistemas desarrollados en ciencias físicas, químicas y biológicas ocupan gran parte de las aplicaciones actuales en estos campos. La aplicación de estas técnicas a modelos obtenidos en ciencias sociales no es tan frecuente, aunque si es posible encontrar algunas aplicaciones como las realizadas por W. Zhang (1989), que analiza la presencia de una bifurcación de Hopf en un modelo de determinación de precios; los trabajos de W. A. Brock y A. G. Malliaris (1989) que analizan la estabilidad de diferentes modelos continuos; el trabajo, en el campo discreto, de J. M. Grandmont (1986) que analiza la presencia de órbitas periódicas en sistemas unidimensionales; los estudios, en este mismo tipo de sistemas, de M. J. Stutzer (1980) y G. Candela y A. Gardini (1986) que determinan la presencia de caos y las pequeñas aportaciones de los autores de este trabajo en el año 1989.

El objetivo de este trabajo, es tratar de ampliar el conjunto de técnicas dinámicas, que es posible aplicar, a modelos planteados en ciencias sociales. El modelo que vamos a tomar como referencia, es un modelo desarrollado por J. M. Sánchez Molinero (1988) donde se analiza el comportamiento interrelacionado de dos

variables: la fracción de individuos pertenecientes a una población que cree en un determinado conjunto de normas y la fracción de esa misma población que las cumple. Al análisis más particularizado del modelo nos ocupamos en la segunda parte del trabajo.

En la tercera parte del trabajo, nos centramos en la aplicación del teorema de la variedad central, demostrando previamente que dicha variedad central existe, lo que nos permitirá determinar la estabilidad de las trayectorias sobre ella. En la cuarta parte, estudiamos la posible presencia de órbitas homocíclicas y heterocíclicas y así delimitar diferentes comportamientos de las soluciones del modelo.

La metodología que se sigue es la planteada por Guckenheimer y Holmes (1983), que se caracteriza por su simplicidad y posibilidad de aplicación.

## 2. El modelo dinámico

En esta sección nos ocupamos del desarrollo del modelo propuesto por Sánchez Molinero, donde se determina la interconexión dinámica entre dos variables: la fracción de individuos pertenecientes a una población que «cree en un determinado conjunto de normas y la fracción de esa misma población que «cumple» dichas normas.

Designando por  $X(t)$  y  $V(t)$  los valores de dichas variables en  $t$ , el modelo de Sánchez establece las relaciones:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= a [X(t) - \bar{X}(t)] & , & & a < 0 \\ \dot{V} &= b [V(t) - \bar{V}(t)] & , & & b < 0\end{aligned}$$

donde  $\bar{X}(t)$  y  $\bar{V}(t)$  son los valores tendenciales de  $X(t)$  y  $V(t)$ . Por consiguiente, como indica el autor, si la diferencia entre el valor de una variable y su valor tendencial, en un instante de tiempo, es positiva, la variable comienza a decrecer y el efecto es contrario si la diferencia es negativa.

Los valores tendenciales de cada variable se suponen a su vez dependientes de diferentes factores. Así, el valor tendencial de las personas que creen en las normas depende por una parte de factores exógenos, entre estos tendremos por un lado, los beneficios sociales  $G$  que se esperan obtener a través del cumplimiento de las normas, de forma que cuando los beneficios sociales crecen también crece el número de personas que creen en las normas y, por otro lado, los incentivos tanto positivos como negativos que pueden inducir a las personas a infringir las normas. Entre los incentivos se incluyen los beneficios  $B$  asociados con la infracción de las normas, los costes  $C$  de la infracción y la probabilidad  $P$  de que las infracciones sean castigadas; siendo el valor tendencial  $\bar{X}(t)$  creciente con respecto a estos dos últimos incentivos y decreciente con respecto al primero.

Por otra parte, este valor tendencial depende del «grado de adecuación» entre el sistema de normas y los beneficios sociales que se pretenden lograr con el sistema, proceso que se recoge mediante una variable comprendida entre cero y uno que es una función creciente de  $V(t)$ , siendo a su vez el valor tendencial  $\bar{X}(t)$  creciente con respecto a la variable grado de adecuación  $g[V(t)]$ .

Considerando todos estos factores, el valor tendencial de las personas que creen, se expresa:

$$\bar{X}(t) = F[G, g[V(t)], B, C, P] \quad 0 \leq \bar{X}(t) \leq 1$$

donde

$$f'_G > 0; f'_g > 0; f'_B < 0; f'_C > 0; f'_P > 0; f'_V > 0$$

Por su parte, el valor tendencial de las personas que cumplen las normas se supone función lineal de las personas que creen en ellas y viene determinado por la expresión:

$$\bar{V}(t) = (\alpha - \beta) X(t) + \beta$$

donde  $\alpha$  representa la proporción de personas que cree en las normas y las cumple y  $\beta$  la proporción de personas que sin creer en las normas las cumple. Se consideran estos parámetros como valores tendenciales, ambos están comprendidos entre cero y uno y dependen de los parámetros exógenos B, C y P, siendo decrecientes respecto a B y crecientes respecto a los otros dos. Se supone además en el modelo que  $\alpha > \beta$ , supuesto intuitivo según explica Sánchez Molinero y que difieren en una constante.

Así pues, el sistema dinámico que recoge la evolución de las variables puede expresarse:

$$\dot{X} = a\{X - f[G, g(V), B, C, P]\}$$

$$\dot{V} = b[V - (\alpha - \beta) X - \beta]$$

En el análisis que nosotros pretendemos desarrollar vamos a suponer que la función  $f$  que aparece en la descripción del valor tendencial  $\bar{X}(t)$  puede descomponerse en dos funciones, una que recoge el grado de adecuación y la otra los factores exógenos, de modo que el efecto que recoge la función  $f$  se obtiene como efecto multiplicativo de las otras dos (el suponer que el efecto es aditivo, no modifica sustancialmente los resultados que se obtienen en las secciones siguientes), esto es:

$$f[G, g(V), B, C, P] = M[g(V)].N(G, B, C, P)$$

supondremos, así mismo, que el sistema dinámico que recoge la evolución de las variables es no lineal, esto es, la función  $M[g(V)]$  será no lineal, ya que el análisis del caso lineal no presenta nada más que características generales.

### 3. Análisis cualitativo del modelo. Estudio de un caso no hiperbólico

Teniendo en cuenta la última de las hipótesis considerada en el apartado anterior, la evolución del modelo vendrá descrita mediante el sistema:

$$\dot{X} = a\{X - M[g(V)] N(G, B, C, P)\} \quad , a < 0$$

$$\dot{V} = b[V - (\alpha - \beta) X - \beta] \quad , b < 0$$

así pues, sus posibles estados de equilibrio serán aquellos que verifiquen el sistema:

$$X = M[g(v)].N(G, B, C, P)$$

$$V = (\alpha - \beta) X + \beta$$

Supongamos que  $(X^*, V^*)$  es un estado de equilibrio, entonces la ecuación característica asociada a la matriz jacobiana en él,  $J(X^*, V^*)$ , será:

$$\mu^2 - (a + b)\mu + \{ab - (\alpha - \beta)abN M'_g[g(V^*)] g'_v(V^*)\} = 0$$

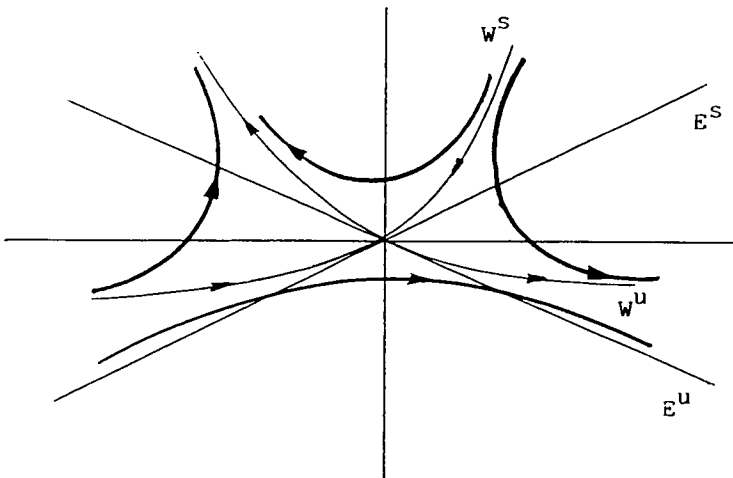
y el comportamiento cualitativo de este estado de equilibrio vendrá determinado por las raíces de esta ecuación característica, es decir, por los valores propios asociados a  $(X^*, V^*)$ <sup>1</sup>.

Mediante unos cálculos sencillos se observa, teniendo en cuenta las hipótesis que hemos hecho sobre los valores de los parámetros, que el punto  $(X^*, V^*)$  es un estado de equilibrio hiperbólico siempre que:

$$d = (\alpha - \beta) N M'_g[g(V^*)] g'_v(V^*)$$

sea distinto de la unidad, pues en este caso, el estado de equilibrio no admite valores propios con parte real nula<sup>2</sup>.

Si el estado de equilibrio es hiperbólico (estamos suponiendo que  $d \neq 1$ ) podemos aplicar el teorema de Hartman-Grobman<sup>3</sup> y entonces el comportamiento del sistema no lineal es homeomorfo, en un entorno del estado de equilibrio, al del sistema lineal con matriz  $J(X^*, V^*)$ . En particular, si el parámetro  $d$  supera la unidad,  $(X^*, V^*)$  será un punto de silla; pudiendo tener el siguiente comportamiento:



<sup>1</sup> Con esto queremos indicar los valores propios asociados a la matriz Jacobiana en el correspondiente estado de equilibrio  $J(X^*, V^*)$ .

<sup>2</sup> En el modelo hemos supuesto que  $\alpha > \beta$  pero el estado de equilibrio sería siempre hiperbólico, salvo en el caso  $d = 1$ , cualesquiera que sea la relación entre  $\alpha$  y  $\beta$ .

<sup>3</sup> Vid.: Guckenheimer J. y Holmes P. (1983), p. 13.

ya que la ecuación característica admite dos raíces reales negativas.

Si  $d$  es la unidad, el teorema de Hartman-Grobman no puede aplicarse y de la existencia de la variedad central, garantizada por el teorema de la variedad central<sup>4</sup>, no se puede deducir el comportamiento de las trayectorias sobre ella.

Analicemos este caso, y con objeto de obtener resultados más concretos, vamos a suponer que la función  $M[g(V)]$  es una función potencial, esto es:

$$M[g(V)] = v V^m \quad v > 0, m > 0, m \neq 1$$

En este caso, el sistema dinámico que expresa la evolución del modelo será:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= a(X - vNV^m) \\ \dot{V} &= b[V - (\alpha - \beta)X - \beta] \end{aligned} \quad (1)$$

y como pretendemos analizar un estado de equilibrio no hiperbólico supongamos que dicho estado existe, es decir, supongamos que:

$$X^* = \frac{q^{1/1-m} - \beta}{\alpha - \beta} \quad V^* = q^{1/(1-m)}$$

con  $q = vm(\alpha - \beta)N$ , satisface la ecuación de los estados de equilibrio, esto es,

$$N(G, B, C, P) = X^*/[v(V^*)^m]$$

es evidente que para que este estado de equilibrio tenga sentido en el modelo que estamos planteando se ha de verificar:

$$0 \leq X^* \leq 1 \quad , \quad 0 \leq V^* \leq 1$$

ello implicará determinadas condiciones sobre los parámetros, así, en particular, si  $m = 2$  estas condiciones equivalen:

$$q \beta \leq 1 \leq q \alpha$$

Puesto que nuestro propósito es analizar la estabilidad sobre la variedad central, vamos a determinar primeramente quien es dicha variedad central y para ello realizamos sucesivos cambios de coordenadas con objeto de facilitar dicho cálculo. En primer lugar, trasladamos el estado de equilibrio al origen de coordenadas, para lo cual realizamos el cambio de variable

$$Y = X - X^* \quad ; \quad U = V - V^*$$

con lo que el sistema (1) se transforma en el sistema equivalente:

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= a[Y - vN(U + V^*)^m + vN(V^*)^m] \\ \dot{U} &= b[U - (\alpha - \beta)Y] \end{aligned}$$

que podemos expresar, con una aproximación de tercer orden, como:

<sup>4</sup> Vid.: Anosov D. V. y Arnold V. I. (1988), p. 57.

$$\begin{pmatrix} \dot{Y} \\ \dot{U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -a/(\alpha - \beta) \\ -b(\alpha - \beta) & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ U \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} [-a(m-1)/2(\alpha - \beta)] q^{1/(m-1)} U^2 + 0(U^3) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

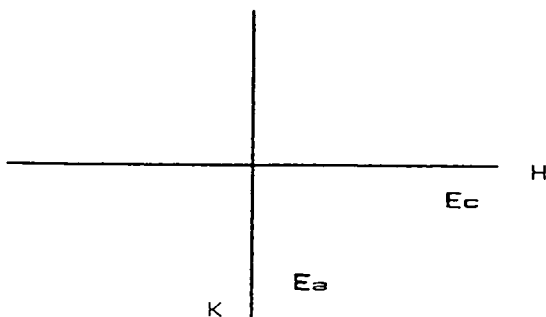
siendo la matriz asociada a la parte lineal  $J(X^*, V^*)$ . Si realizamos un nuevo cambio de variable:

$$(H, K)^t = P^{-1} (Y, U)^t$$

donde  $P^{-1}$  es la inversa de la matriz  $P$ , cuyas columnas son los vectores propios  $(1, \alpha - \beta)^t$  y  $(a, -b/(\alpha - \beta))^t$  que están asociados a los valores propios  $\mu = 0$  y  $\mu = a + b$  respectivamente, que son los que generan los subespacios estable y central, obtenemos el sistema equivalente en forma estándar:

$$\begin{pmatrix} \dot{H} \\ \dot{K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & H \\ 0 & a+b & K \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} [-ab(m-1)(\alpha - \beta)/2(a+b)] q^{1/m-1} (H-bK)^2 + 0(|H - bK|^3) \\ [-a(m-1)(\alpha - \beta)/2(a+b)] q^{1/m-1} (H - bK)^2 + 0(|H - bK|^3) \end{pmatrix} \quad (3)$$

Ahora, los subespacios estable y central coinciden con los ejes de coordenadas



y la búsqueda de la variedad central  $W^c$  la realizamos de forma aproximada. Entonces, si  $W^c$  viene determinada por el grafo de la función

$$W^c = \{(H, K) / K = s(H)\}$$

donde se ha de verificar  $s(0) = s'(0) = 0$ , pues  $E^c$  es el espacio tangente a  $W^c$  en el origen, y si definimos la función  $K = s(H)$  como:

$$K = s(H) = a_0 H^2 + a_1 H^3 + 0(H^4)$$

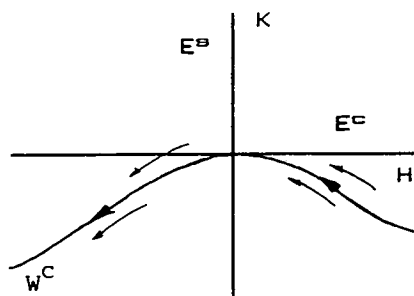
y la obligamos a que verifique el sistema (3), obtendremos los coeficientes indeterminados  $a_0$  y  $a_1$ , teniendo:

$$s(H) = [a(m-1)(\alpha-\beta)/2(a+b)^2] q^{1/m-1} H^2 - [a^2 b(m-1)^2 (\alpha-\beta)/(a+b)^4] q^{2/m-1} H^3 + 0(H^4)$$

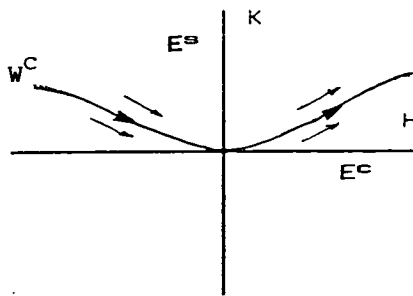
Aplicando ahora el teorema de Henry y Carr<sup>5</sup>, las soluciones de la ecuación

$$\dot{H} = [-ab(m-1)(\alpha-\beta)/2(a+b)] q^{1/m-1} \cdot \{H^2 - [ab(m-1)(\alpha-\beta)/(a+b)^2] q^{1/m-1} H^3\} + 0(H^4)$$

obtenida proyectando la función  $K = s(H)$  sobre  $E^c$  nos proporciona una buena aproximación del comportamiento de las soluciones en la variedad central. Así, en el espacio de fase, y en un entorno del origen, tendremos:



$m > 1$



$m < 1$

lo que implica inestabilidad sobre determinadas zonas de la variedad central, independientemente del valor de  $m$ .

Los distintos cambios de coordenadas que hemos realizado nos han conducido a determinar la estabilidad sobre la variedad central, pero no nos proporciona información sobre quien es la variedad estable  $W^s$ , al no ser el eje de las  $K$  invariante en el sistema (3). La estabilidad sobre la variedad estable está determinada y para establecer quien es, volvemos a considerar el sistema (2). Entonces, si representamos a  $W^s$  por el grafo de la función  $U = h(Y)$ :

$$W^s = \{(Y, U) / U = h(Y)\}$$

<sup>5</sup> Vid.: Guckenheimer J. y Holmes P., op. cit., p. 131.

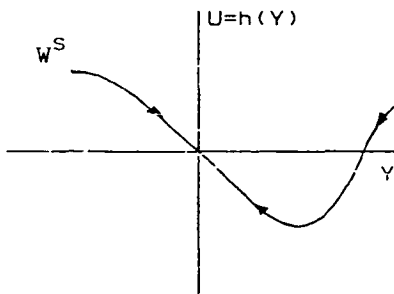
realizando la aproximación cuadrática:

$$U = h(Y) = a_0 Y + a_1 Y^2 + 0(Y^3)$$

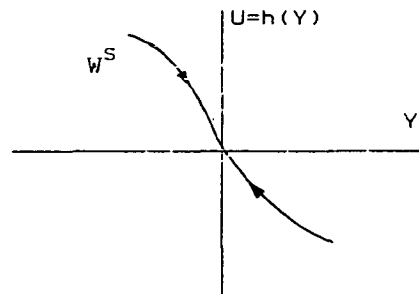
y obligándola a que verifique el sistema (2), obtenemos dos pares de coeficientes  $a_0$  y  $a_1$ . Ahora bien, como se tiene que verificar  $h(0) = 0$  y como además el espacio tangente a  $W^s$  en el origen es  $E^s$ , que está generado por el vector  $(a, -b(\alpha - \beta))^t$ , obtenemos que la función, cuyo grafo determina la variedad estable será:

$$h(Y) = [-b(\alpha - \beta)/a] Y + \{[b^3(\alpha - \beta)^3(m-1)]/4a^3[1 - (\alpha - \beta)]\} q^{1/m-1} Y^2 + 0(Y^3)$$

cuya representación gráfica es:

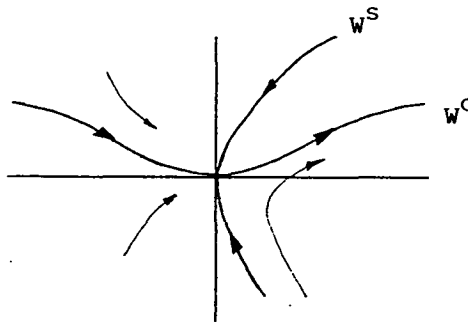


$a_1 > 0$



$a_1 < 0$

Si ahora trasladamos  $W^s$  a los ejes  $(H,K)$ , el comportamiento cualitativo del estado  $(0,0)$  equivalente a  $(X^*, V^*)$  en el eje  $(X, V)$  será en una aproximación de orden dos:



$a_1 < 0, m < 1$

de análoga forma se podrían representar las otras posibilidades.



#### 4. Órbitas heterocíclicas en un caso cuadrático

En esta sección, nos proponemos analizar la presencia de órbitas heterocíclicas, para un caso cuadrático del modelo de Sánchez Molinero en el que suponemos que los conjuntos invariantes son dos estados de equilibrio.

En el modelo de Sánchez Molinero, independientemente de la forma que adopte la función  $f$  en el planteamiento general, no existen órbitas cerradas ya que la traza del jacobiano asociado al modelo es negativa<sup>6</sup>, luego tampoco es posible la existencia de órbitas homocíclicas; por tanto, como el sistema es planar, en el espacio de fase sólo tendremos estados de equilibrio, por lo que podemos pensar que existe la posibilidad de que aparezcan órbitas heterocíclicas entre ellos.

De acuerdo con los resultados obtenidos en la sección anterior, los estados de equilibrio hiperbólicos del modelo pueden ser sumideros o bien puntos de silla y, como órbitas heterocíclicas no pueden existir considerando sólo sumideros, las posibles órbitas heterocíclicas sólo podrán aparecer si consideramos puntos de silla o bien, sumideros y puntos de silla.

Esta última posibilidad, aparece en el modelo de Sánchez Molinero, si consideramos que la función  $M$  utilizada en las secciones anteriores es cuadrática, esto es:

$$M[g(V)] = v V^2 \quad , \quad v > 0$$

En este caso, el modelo presenta dos estados de equilibrio, un punto de silla:

$$V_1 = (1 + \sqrt{w})/2p(\alpha - \beta) \quad , \quad X_1 = (V_1 - \beta)/(\alpha - \beta)$$

y un sumidero:

$$V_2 = (1 - \sqrt{w})/2p(\alpha - \beta) \quad , \quad X_2 = (V_2 - \beta)/(\alpha - \beta)$$

donde  $p = v N$ ,  $w = 1 - 4\beta(\alpha - \beta)p$ , que supondremos positivo, para garantizar la existencia de ambos estados de equilibrio. Además, para que estos estados tengan sentido dentro del modelo, se tendrá que verificar que los pares  $(X_1, V_1)$ ,  $(X_2, V_2)$  pertenezcan a  $[0,1] \times [0,1]$  y por consiguiente los parámetros verifican:

$$1 + \sqrt{w} \leq 2p \alpha (\alpha - \beta)$$

o lo que es equivalente  $p \alpha^2 \geq 1$ .

Realizando unos sencillos cálculos, podemos obtener, que el subespacio estable  $E^s$  asociado al valor propio  $\mu_1$  negativo del punto de silla  $(X_1, V_1)$  y el subespacio inestable  $E^u$  asociado el valor propio positivo  $\mu_2$ , son:

$$E^s = \{(X, V) / X = 1 \quad , \quad V = l(a - \mu_1)/2apV_1 \quad , \quad l \in \mathbb{R}\}$$

$$E^u = \{(X, V) / X = 1 \quad , \quad V = l(a - \mu_2)/2apV_1 \quad , \quad l \in \mathbb{R}\}$$

y por lo que respecta al sumidero, tendremos  $E^u = \{0\}$  y, la variedad estable local, será un entorno de él, en el plano de fase.

<sup>6</sup> Vid.: Guckenheimer J. y Holmes P., op. cit., p. 44.

Para encontrar, la variedad inestable del punto de silla, lo que necesitamos para determinar la órbita heterocíclica, realizamos un cambio de variable en el sistema:

$$Y = X - X_1 \quad ; \quad U = V - V_1$$

con lo que trasladamos el estado de equilibrio  $(X_1, V_1)$  al  $(0,0)$  y con el nuevo sistema, buscamos la variedad inestable como el grafo de la función  $U = r(Y)$ :

$$W^u = \{(Y, U) / U = r(Y)\}$$

Si ahora, aproximamos la función  $r$  a un polinomio hasta el tercer orden:

$$r(Y) = a_0 Y + a_1 Y^2 + a_2 Y^3 + 0(Y^4)$$

y la obligamos a que verifique la ecuación diferencial:

$$\dot{U} = r'_Y \cdot \dot{Y}$$

o equivalentemente:

$$b \{r(Y) - (\alpha - \beta) Y\} = r'_Y \cdot a[Y - p r^2(Y) - 2p V_1 r(Y)]$$

obtenemos los coeficientes indeterminados:

$$a_0 = (a - \mu_2) / 2apV_1$$

$$a_1 = -apa_0^3 / (b - 2a + 6paa_0V_1)$$

$$a_2 = \frac{-4pa_0^2a_1a - 4pV_1aa_1^2}{b - 3a + 8paa_0V_1}$$

que nos permiten identificar la variedad inestable del punto de silla.

Si esta trayectoria, que se aleja del punto de silla, tiende al sumidero cuando el tiempo, crece, tendremos una órbita heterocíclica.

Determinar analíticamente dicha tendencia, presenta cierta dificultad debido a la diversidad de parámetro que aparecen. Entonces, para comprobar esta tendencia, realizamos unos cálculos numéricos dando valores a los parámetros para determinar si la diferencia entre  $V_2$  y el valor de  $V$  dado por la expresión:

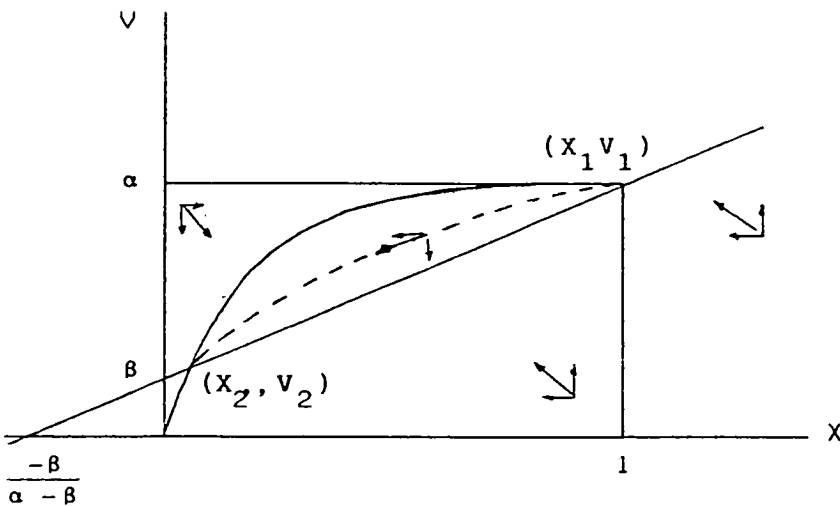
$$V = V_1 + a_0(X_2 - X_1)^2 + a_3(X_2 - X_1)^3$$

es de orden infinitesimal.

En la tabla siguiente recogemos algunos de estos resultados:

Parámetros	Estados de Equilibrio	$V - V_2$
$\beta = 0,1; \alpha = 0,8$ $p = 1/\alpha^2; a = -0,3; b = -2,5$	$V_1 = 0,8$ $V_2 = 0,114$	-0,01
$\beta = 0,1; \alpha = 0,8$ $p = 1/\alpha^2; a = -0,5; b = -2$	$V_1 = 0,8$ $V_2 = 0,114$	-0,04
$\beta = 0,2; \alpha = 0,8$ $p = (1/\alpha^2) + 0,1; a = -0,3; b = -2,5$	$V_1 = 0,74$ $V_2 = 0,11$	-0,01
$\beta = 0,2; \alpha = 0,8$ $p = (1/\alpha^2) + 0,1; a = -0,5; b = -2$	$V_1 = 0,74$ $V_2 = 0,11$	-0,04
$\beta = 0,2; \alpha = 0,5$ $p = (1/\alpha^2) + 1; a = -0,3; b = -0,5$	$V_1 = 0,45$ $V_2 = 0,35$	-0,001
$\beta = 0,2; \alpha = 0,5$ $p = (1/\alpha^2) + 1; a = -0,5; b = -2$	$V_1 = 0,45$ $V_2 = 0,35$	0,0004

Podemos, por tanto, concluir, que el comportamiento gráfico para estos valores de los parámetros, en el plano de fase, será:



### 5. Conclusiones

En el trabajo se han analizado algunos comportamientos cualitativos de un modelo que toma como base el que desarrolla J. M. Sánchez Molinero, y donde se recoge la interconexión dinámica entre dos variables, la fracción de individuos pertenecientes a una población que cree en un conjunto de normas y la fracción de la misma población que las cumple, las crea o no.

En primer lugar, y bajo unas hipótesis de ajuste de las funciones que definen el modelo original, hemos tratado de analizar las situaciones de reposo de las personas que creen y de las personas que cumplen las normas, y se ha obtenido, que el comportamiento de estas variables, partiendo de condiciones iniciales «próximas» a estos puntos de reposo, dependen del valor de un parámetro  $d$  determinado en el trabajo. Así, si este parámetro es distinto de la unidad, el comportamiento de las variables en relación con el tiempo puede obtenerse fácilmente y puede ser de dos formas distintas, o las variables tienden, independientemente de las condiciones iniciales, hacia las situaciones de reposo, o bien, salvo en situaciones muy concretas en las que la evolución sigue siendo de aproximación, la tendencia general de la evolución de las trayectorias es de alejamiento de las situaciones de reposo, quizá para seguir un comportamiento errante.

Ahora bien, cuando el valor del parámetro  $d$  es la unidad, el comportamiento de las variables es necesario realizarlo de una forma más particular, y puesto que en el modelo las funciones estaban planteadas de una forma general, realizamos un nuevo ajuste con objeto de ganar operatividad.

Condiserando un ajuste potencial se analiza un estado de reposo concreto, y se obtiene que el comportamiento de las variables que parten de condiciones iniciales «próximas» a este punto de reposo, hecho que se constata con la ayuda de técnicas de aproximación, tiende generalmente a alejarse, salvo en situaciones de partida específicas que corresponden precisamente a situaciones iniciales sobre la curva  $W^s$  y la  $W^c$ , aunque en esta última podemos considerar dos ramas separadas por el estado de reposo, siendo en una rama la tendencia de aproximación y en la otra de alejamiento. La posición de la curva y de sus ramas depende de la función elegida para el ajuste.

Demostrados que si las variables asociadas al modelo alcanzaban unos valores nunca volvían a alcanzarles, esto es, no existe posibilidad de soluciones periódicas. Entonces el comportamiento de trayectorias que comenzaban en entornos de puntos de reposo era de dos tipos, o bien se aproximaban a puntos de reposo, o se alejaban de ellos, y en este último caso no tendría por que ocurrir que el comportamiento fuese siempre errático. Entonces pensamos que podría existir la posibilidad de que trayectorias que se alejasen de un estado de reposo evolucionasen hacia otro. Para probar esto, y en aras de operatividad, se ajustó el modelo a una función cuadrática. Para determinar esta tendencia fue necesario acudir al cálculo de valores numéricos dando valores a los parámetros del modelo y se obtuvieron resultados satisfactorias ya que en distintas simulaciones las aproximaciones eran inferiores a una centésima.

Somos conscientes de que para la operatividad del modelo se han ido considerando sucesivas funciones de ajuste, así como, suponer, a partir del modelo original, que era posible el desglose de los efectos de las variables exógenas del modelo y de las variables internas, lo que ha supuesto una pérdida de generalidad del modelo. Otros tipos de ajuste y otras consideraciones sobre el posible comportamiento de las funciones pueden dar lugar a comportamientos diferentes de los aquí obtenidos, aunque un ajuste del mismo tipo pero con un efecto acumulativo de las funciones produciría unos resultados semejantes.

## 6. Referencias bibliográficas

- Anosov, D. V. y Arnold, V. I. (1988): *Dynamical Systems I*. Springer-Verlag, Berlin.
- Brock, W. A. y Malliaris, A. G. (1989): *Differential Equations, Stability and Chaos in Dynamic Economics*. North-Holland, Amsterdam.
- Candela, G. y Gardini, A. (1986): «Estimation of a non-linear Discrete-time Macro-model». *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 10. núm. 1 y 2, págs. 249-254.
- Grandmont, J. M. (1986): «Periodic and Aperiodic Behaviour in Discrete One-dimensional Dynamical Systems», en *Contributions to Mathematical Economics*. (Hildenbrand, W. y Mas-Colell, A., Ed.), North-Holland, Amsterdam.
- Guckenheimer, J. y Holmes, P. (1986): *Non linear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag, New York.
- Sánchez Molinero, J. M. (1988): «Interacción entre las creencias y la observancia de las normas en los grupos sociales. Una teoría formal». *Anales de Estudios Económicos y Empresariales*, núm. 3, págs. 9-18.
- Soto Torres, M. D. y Fernández Lechón, R. (1989): «Presencia de Caos en un modelo de expectativas de precios». *III Reunión Anual de ASEPELT-ESPAÑA*, Sevilla, julio 1989.
- Stutzer, M. J. (1980): «Chaotic Dynamics and Bifurcation». *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 2, núm. 4, págs. 353-377.
- Zhang, W. (1989): «Oscillations in the Rodriguez Model of Entry and Price Dynamics». *Journal of Economic Dynamic and Control*, vol. 13, núm. 3, págs. 485-497.