DETERMINACION DE LA POLITICA OPTIMA DE PEDIDO EN UN SISTEMA DE STOCKS CON RESTRICCION EN LA REALIZACION DEL PEDIDO

R. Fernández Lechón

RESUMEN.— En el trabajo se analiza un sistema de stocks con demanda estocástica utilizando el método de revisión periódica y suponiendo que la razón de entrega es infinita.

Imponemos una restricción a la hora de realizar el pedido, de forma que no se podrá realizar éste hasta que transcurra un cierto tiempo que dependerá de la cantidad de mercancía últimamente aprovisionada.

Determinamos, en un modelo con un artículo primero y después con dos artículos cómo es la política de pedido si se utiliza la política (s,S) y suponiendo que las demandas son vectores aleatorios independientes e idénticamente distribuidos, siendo además en cada uno de los periodos la demanda de un artículo independiente del otro.

1. Introducción

Utilizando el método de revisión periódica y suponiendo que la razón de entrega es infinita, determinaremos la política óptima de pedido para un sistema de stocks con costes fijos de pedido. Al final del ciclo es cuando se realizará o no el pedido, siempre que el tiempo transcurrido desde el pedido anterior t verifique $t \geqslant \alpha z$ siendo z la última cantidad de mercancía aprovisionada y α el coeficiente de tiempo requerido para servir una unidad de mercancía.

Analizamos primero un modelo con un sólo artículo utilizando la política (s,S) y posteriormente, un modelo con dos artículos, donde la demanda de cada artículo es independiente del otro. Determinamos cómo es la política óptima de pedido en cada uno de los períodos.

2. Modelo con un artículo

Las demandas D_i, $i = 1, 2, \ldots$ en los sucesivos períodos de tiempo son variables aleatorias continuas, positivas, independientes e idénticamente distribuidas. Sea $\Phi(\xi)$, $\xi \varepsilon [o, \infty]$ y $\varphi(\xi)$ las funciones de distribución y densidad respectivamente.

Al comienzo del período es cuando se realizará el pedido. Denotemos por

x_i = nivel de stocks, al comienzo del período i, antes de adoptar la decisión de pedir; x_i puede ser positivo o negativo; lo último nos indicará déficit de mercancía.

y_i = nivel de stocks, al comienzo del periodo, después de adoptada la decisión de pedir. Si se realiza un pedido, el nivel de stocks y_i es siempre positivo.

z_i = cantidad aprovisionada al comienzo del i-ésimo periodo.

Las relaciones que ligan estas variables son:

$$x_{i+1} = v(y_i, D_i) = y_i - D_i$$

$$y_i = x_i + z_i$$

$$y_{i+1} = y_i - D_i + z_{i+1}$$

Puesto que utilizamos la política (s,S) los valores de y_i serán:

$$y_{i+1} = \begin{cases} S & \text{si } x_{i+1} \leqslant s,\ z_i \neq 0,\ z_i \leqslant 1/\alpha \\ S & \text{si } x_{i+1} \leqslant s,\ z_i = 0,\ z_{i-1} \neq 0,\ z_{i-1} \leqslant 2/\alpha \\ S & \text{si } x_{i+1} \leqslant s,\ z_i = z_{i-1} = 0,\ z_{i-2} \neq 0,\ z_{i-2} \leqslant 3/\alpha \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ y_i - D_i & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

donde α es el tiempo en períodos requerido para poder servir una unidad de mercancía.

Supondremos que los costes de posesión y escasez les medimos al final del periodo, siendo éstos proporcionales al nivel de stocks al final del periodo.

Denotamos por:

$H_i(D_i, y_i)$ = stocks disponible al final del i-ésimo periodo, si el nivel de stocks al comienzo es y_i y la demanda del periodo D_i.

$P_i\ (D_i,\ y_i)$ = pedidos pendientes de servir a los clientes al final del i-ésimo periodo siendo el nivel de stocks al comienzo, después de adoptada la decisión de pedir o no, y_i y la demanda D_i.

Tenemos por consiguiente que:

$$H_i\ (D_i,\ y_i) = \begin{cases} y_i - D_i & \text{si} \quad D_i < y_i \\ 0 & \text{si} \quad y_i \nless D_i \end{cases}$$

$$P_i\ (D_i,\ y_i) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad D_i < y_i \\ D_i - y_i & \text{si} \quad y_i \nless D_i \end{cases}$$

siendo obviamente H_i y P_i variables aleatorias puesto que dependen de D_i.

Sea ahora $C_i\ (D_i,\ y_i)$ la suma del coste de posesión y escasez incurrido en el período "i" y medido al final de dicho periodo, entonces

$$C_i\ (D_i,\ y_i) = h.H_i\ (D_i,\ y_i) + p.P_i\ (D_i,\ y_i)$$

donde h y p son el coste de posesión y escasez por unidad de mercancía. Entonces:

$$C_i\ (D_i,\ y_i) = \begin{cases} h.(y_i - D_i) & D_i < y_i \\ p.(D_i - y_i) & y_i \nless D_i \end{cases}$$

C_i es una variable aleatoria cuya esperanza es:

$$L_i(y_i) = \int_0^\infty C_i(D_i,\ y_i)\ d\ \Phi\ (\xi) =$$

$$= \begin{cases} \int_0^{y_i} h.(y_i - \xi) d\ \Phi\ (\xi) + \int_{y_i}^\infty p.(\xi - y_i) d\ \Phi\ (\xi) & y_i > 0 \\ \int_0^\infty p.(\xi - y_i)\ d\ \Phi\ (\xi) & y_i \nless 0 \end{cases}$$

integrando la expresión anterior se obtiene

$$L_i(y_i) = \begin{cases} (h+p)\int_0^{y_i} \Phi\ (\xi)\ d\ \xi + p(\bar{D} - y_i) & y_i > 0 \\ p(\bar{D} - y_i) & y_i \nless 0 \end{cases}$$

La función $L_i(y_i)$ es convexa y estrictamente convexa para los $y_i > 0$ con $\varphi(y_i) > 0$.

3. Modelo con dos artículos

Para un sistema con dos artículos, suponemos que la demanda en cada uno de los periodos son vectores aleatorios $\vec{D}_t = (D_1, D_2)$ continuos, positivos, independientes e idénticamente distribuidos, con función de densidad conjunta $\varphi(\xi_1, \xi_2)$.

Pretendemos encontrar la política óptima para uno cualquiera de los periodos, suponiendo que en cada uno de ellos, la demanda de un artículo es independiente del otro, con lo cual $\varphi(\xi_1, \xi_2) = \varphi_1(\xi_1) + \varphi_2(\xi_2)$.

Cuando se adopta la decisión de pedir o no, puede ocurrir que se pida un sólo artículo, que se pidan ambos o bien que no se realice el pedido.

Los costes del modelo son, coste de aprovisionamiento, de posesión y escasez. El coste de aprovisionamiento es:

$$P(z_1, z_2) = K(z_1, z_2) + c_1 z_1 + c_2 z_2, \qquad z_1 \geqslant 0,\ z_2 \geqslant 0$$

donde z_1 y z_2 son las unidades aprovisionadas de cada uno de los artículos, c_1 y c_2 el coste variable por unidad de mercancía y $K(z_1, z_2)$ el coste fijo de realizar un pedido, siendo

$$K(z_1, z_2) = \begin{array}{ll} K_1 & \text{si sólo se pide del 1} \\ K_2 & \text{si sólo se pide del 2} \\ K & \text{si se piden ambos} \\ 0 & \text{si no se pide.} \end{array}$$

suponiendo que se verifica

$$\max(K_1, K_2) \leqslant K \leqslant K_1 + K_2$$

Del mismo modo que en el caso anterior, la esperanza del coste de posesión y escasez incurriendo en el período será:

$$L(y_1, y_2) =$$

$$h_1 \int_0^{y_1} (y_1 - \xi_1)\, d\,\Phi_1(\xi_1) + p_1 \int_{y_1}^{\infty} (\xi_1 - y_1)\, d\,\Phi_1(\xi_1) +$$

$$+ p_2 \int_0^{\infty} (\xi_2 - y_2)\, d\,\Phi_2(\xi_2) \qquad \text{si } y_1 > 0,\ y_2 \leqslant 0$$

$$\sum_{i=1}^{2} \left\{ h_i \int_0^{y_i} (y_i - \xi_i)\, d\,\Phi_i(\xi_i) + p_i \int_{y_i}^{\infty} (\xi_i - y_i)\, d\,\Phi_i(\xi_i) \right\} \quad \text{si } y_i > 0$$

$$i = 1,2$$

$$p_1 \int_0^{\infty}(\xi_1 - y_1)\, d\, \Phi_1(\xi_1) + h_2 \int_0^{y_2} (y_2 - \xi_2)\, d\, \Phi_2(\xi_2) +$$
$$+ p_2 \int_{y_2}^{\infty}(\xi_2 - y_2)\, d\, \Phi_2(\xi_2) \quad \text{si} \quad y_1 \leqslant 0,\ y_2 > 0$$

$$\sum_{i=1}^{2} (p_1 \int_0^{\infty}(\xi_i - y_i)\, d\, \Phi_i(\xi_i)) \qquad \text{si} \quad y_i \nless 0, \quad i=1,2$$

Tendremos por consiguiente que

$$L(y_1, y_2) = L_1(y_1) + L_2(y_2)$$

siendo

$$L_i(y_i) = \begin{cases} (h_i + p_i) \int_0^{y_i} \Phi_i(\xi_i)\, d\, \xi_i + p_i(\bar{D}_i - y_i) & y_i > 0 \\ p_i(\bar{D}_i - y_i) & y_i \leqslant 0 \end{cases}$$

Puesto que $L_1(y_1)$ y $L_2(y_2)$ son convexas, también lo es $L(y_1, y_2)$ y es estrictamente convexa para los $y_i > 0$ $i=1,2$ tales que $\varphi_i(y_i) > 0$ y $\varphi_i(y_i)$ continua.

La función objetivo del modelo que consideramos es la suma del coste de aprovisionamiento y de la esperanza del coste de posesión y escasez. Denotando por $C(x_1, x_2)$ este mínimo tendremos:

$$C(x_1, x_2) = \min \left\{ P(z_1, z_2) + L(y_1, y_2) \right\} =$$
$$= \min_{\substack{x_1 \leqslant y_1 \\ x_2 \leqslant y_2}} \left\{ K(y_1 - x_1, y_2 - x_2) - c_1 x_1 - c_2 x_2 + G(y_1, y_2) \right\}$$

$$\text{donde } G(y_1, y_2) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + L(y_1, y_2) =$$
$$= c_1 y_1 + c_2 y_2 + L_1(y_1) + L_2(y_2) = G_1(y_1) + G_2(y_2)$$

Tendremos por consiguiente que:

$$C(x_1, x_2) = \min \begin{cases} \min\limits_{x_1 < y_1,\ x_2 = y_2} \left\{ K_1 - c_1 x_1 - c_2 x_2 + G(y_1, y_2) \right\} \\ \min\limits_{x_1 = y_1,\ x_2 < y_2} \left\{ K_2 - c_1 x_1 - c_2 x_2 + G(y_1, y_2) \right\} \\ \min\limits_{x_1 < y_1,\ x_2 < y_2} \left\{ K - c_1 x_1 - c_2 x_2 + G(y_1, y_2) \right\} \\ \min\limits_{x_1 = y_1,\ x_2 = y_2} \left\{ - c_1 x_1 - c_2 x_2 + G(y_1, y_2) \right\} \end{cases}$$

La función $G(y_1, y_2)$ es estrictamente convexa para aquellos valores que lo es $L(y_1, y_2)$. Sea $\vec{S} = (S_1, S_2)$ el punto donde alcanza el mínimo $G(y_1, y_2)$ con $y_1 > x_1$, $y_2 > x_2$, tendremos que $\vec{S} > \vec{0}$ y como $G(y_1, y_2)$ es separable, S_1 y S_2 serán los puntos donde alcanzan el mínimo $G_1(y_1)$ y $G_2(y_2)$.

Puesto que se puede pedir un sólo artículo, los dos conjuntamente o ninguno, tendremos:

Si se pide solamente un artículo, por ejemplo el 1, el mínimo será:

$$K_1 - c_1x_1 - c_2x_2 + \min_{\substack{x_1 < y_1 \\ x_2 = y_2}} G(y_1, y_2) =$$

$$= K_1 - c_1x_1 - c_2x_2 + \min_{x_1 < y_1} G_1(y_1) + G_2(x_2) =$$

$$= K_1 - c_1x_1 - c_2x_2 + G_1(S_1) + G_2(x_2)$$

Del mismo modo si se pide solamente el artículo 2, el mínimo será:

$$K_2 - c_1x_1 - c_2x_2 + G_1(x_1) + G_2(S_2)$$

Si se piden ambos artículos, el mínimo será:

$$K - c_1x_1 - c_2x_2 + \min_{\substack{x_1 < y_1 \\ x_2 < y_2}} G(y_1, y_2) =$$

$$= K - c_1x_1 - c_2x_2 + \min_{x_1\ y_1} G_1(y_1) + \min_{x_2 < y_2} G_2(y_2) =$$

$$= K - c_1x_1 - c_2x_2 + G_1(S_1) + G_2(S_2)$$

Si no se realiza pedido, el mínimo es:

$$-c_1x_1 - c_2x_2 + G(x_1, x_2) = -c_1x_1 - c_2x_2 + G_1(x_1) + G_2(x_2)$$

Podemos por tanto enunciar las dos proposiciones siguientes:

Proposición 1. Se realizará un pedido si y sólo si se verifica alguna de las siguientes relaciones

1ª) $K + G_1(S_1) + G_2(S_2) < G_1(x_1) + G_2(x_2)$

$2^a)\ K_1 + G_1(S_1) < G_1(x_1)$

$3^a)\ K_2 + G_2(S_2) < G_2(x_2)$

Proposición 2. El pedido será conjunto para ambos artículos si y sólo si se verifican simultáneamente las relaciones

$1^a)\ K + G_1(S_1) + G_2(S_2) < G_1(x_1) + G_2(x_2)$

$2^a)\ (K - K_1) + G_2(S_2) < G_2(x_2$

$3^a)\ (K - K_2) + G_1(S_1) < G_1(x_1)$

La obtención del punto $\vec{S} = (S_1, S_2)$ no ofrece ninguna dificultad, es solución de

$$\Phi_1\ (S_1) = \frac{p_1 - c_1}{h_1 + p_1}$$

$$\Phi_2(S_2) = \frac{p_2 - c_2}{h_2 + p_2}$$

los cuales existen para valores de $p_1 > c_1$, $p_2 > c_2$.

De la ecuación $K_1 + G_1(S_1) = G_1(x_1)$ se deduce sin ninguna dificultad que existe un valor $s_1'' < S_1$ que verifica la ecuación, luego

$$G_1(s_1'') - G_1(S_1) = K_1$$

esto es

$$c_1 s_1'' + L_1(s_1'') - (c_1 S_1 + L_1(S_1)) = K_1$$

por tanto

$$c_1 s_1'' + (h_1 + p_1) \int_0^{s_1''} \Phi_1(\xi_1) d\xi_1 + p_1\ (\bar{D}_1 - s_1'') -$$

$$- (c_1 S_1 + (h_1 + p_1) \int_0^{S_1} \Phi_1(\xi_1) d\xi_1 + p_1(\bar{D}_1 - S_1)) = K_1 \qquad s_1'' > 0$$

$$c_1 s_1'' + p_1\ (\bar{D}_1 - s_1'') - (c_1 S_1 + (h_1 + p_1) \int_0^{S_1} \Phi_1(\xi_1) d\xi_1 + p_1\ (\bar{D}_1 - S_1)) = K_1$$

si $s_1'' \leqslant 0$

o lo que es lo mismo

$$(p_1 - c_1)\ (S_1 - s_1'') - (h_1 + p_1) \int_{s_1''}^{S_1} \Phi_1(\xi_1) d\xi_1 = K_1 \qquad s_1'' > 0$$

$$(p_1 - c_1)\ (S_1 - s_1'') - (h_1 + p_1) \int_0^{S_1} \Phi_1\ (\xi_1) d\xi_1 = K_1 \qquad s_1'' \leqslant 0$$

llamando $t = S_1 - \xi_1$ tendremos:

$$(p_1-c_1)(S_1-s_1'') - (h_1+p_1)\int_0^{S_1-s_1''} \Phi_1 (S_1-t)dt = K_1 \qquad s_1'' > 0$$

$$(p_1-c_1)(S_1-s_1'') - (h_1+p_1)\int_0^{S_1} \Phi_1 (S_1-t)\,dt = K_1 \qquad s_1'' \leqslant 0$$

Puesto que S_1 es conocido y K_1 también, tendremos que si $K_1 + G_1(S_1) < p_1\bar{D}_1$ entonces $s_1'' > 0$ y utilizaremos la primera de las ecuaciones para determinar s_1''; si $K_1 + G_1(S_1) \geqslant p_1\bar{D}_1$ entonces $s_1'' \leqslant 0$ y utilizaremos la segunda de las ecuaciones anteriores para determinar s_1''.

De forma análoga se determinaría s_2'' solución de $K_2 + G_2(S_2) = G_2(x_2)$; s_2' solución de $(K-K_1) + G_2(S_2) = G_2(x_2)$; s_1' solución de $(K-K_2) + G_1(S_1) = G_1(x_1)$. Y como se verifica que $K \leqslant K_1 + K_2$ tendremos que $s_2' \geqslant s_2''$, $s_1' \geqslant s_1''$.

Consideremos en un sistema cartesiano de ejes y_1 e y_2 el conjunto $M = \{\vec{y} / \vec{y} \leqslant \vec{S}\}$. Tomemos aquellos puntos $\vec{y}\,\varepsilon\, M$ que verifican la ecuación

$$K + G(\vec{S}) - G(\vec{y}) = 0$$

claramente a este conjunto de puntos pertenecen (s_1'', s_2') y (s_1', s_2'').

Hemos dividido el conjunto M en los siguientes subconjuntos:

$$M_1 = \{\vec{y}\,\varepsilon\, M / y_1 \leqslant s_1'', y_2 > s_2'\}$$

$$M_2 = \{\vec{y}\,\varepsilon\, M / y_1 > s_1', y_2 \leqslant s_2''\}$$

$$M_{12} = \{\vec{y}\,\varepsilon\, M / y_1 \leqslant s_1', y_2 \leqslant s_2', K + G(\vec{S}) < G(\vec{y})\}$$

$$M_0 = M - (M_1 \cup M_2 \cup M_{12})$$

Así se comprueba, que la política óptima de pedido es:

1. Si $\vec{x}\,\varepsilon\, M_1$ se pide solamente el artículo 1 hasta alcanzar el nivel de stocks $y_1 = S_1$ siempre que el número de periodos transcurridos desde el último pedido de dicho artículo sea mayor o igual que α por la cantidad que se pidió.

2. Si $\vec{x}\,\varepsilon\, M_2$ se pide solamente el artículo 2 hasta alcanzar el nivel de stocks $y_2 = S_2$, siempre que el número de períodos transcurridos desde el último pedido de dicho artículo sea mayor o igual que α por la cantidad que de dicho artículo se pidió.

3. Si $\vec{x}\,\varepsilon\, M_{12}$ se pide del artículo 1 hasta alcanzar el nivel $y_1 = S_1$ y del artículo 2 hasta alcanzar el nivel $y_2 = S_2$, siempre que sea posible pedir cada uno de ellos, para lo cual hay que tener en cuenta cuándo se pidió cada artículo y la cantidad pedida. Así, puede suceder que se pidan ambos, solamente uno o ninguno.

4. Si no se verifican ninguno de los casos anteriores, no se realizará el pedido.

4. Bibliografía

ARROW, K.J., KARLIN, S., SCARF, H. "Studies in the mathematical theory of inventory production". Stanford University Press. 1958.

FERNANDEZ LECHON, R. "Modelos de stocks con restricciones en el ciclo de pedido". Tesis Doctoral. Universidad de Valladolid, 1984.

HADLEY, G., WHITIN, T.M. "Analysis of inventory systems". Prentice-Hall, 1975.

LIPPMAN, S.A. "Optimal inventory policy with subadditive ordering costs and stochastic demands". Siam J. Appl. Math. Vol. 17, nº 3, 1969.

PETERSON, R., SILVER, E.A. "Decision systems for inventory management and production planning". John-Wiley 1979.

SIVAZLIAN, B.D., STANFEL, L.E. "Analysis of systems in operations research". Prentice-Hall, 1975.