UN ALGORITMO CRUZADO PARA LA PLANIFICACION OPTIMA DE UTILIZACION DE EQUIPOS

M.ª Dolores Soto Torres
Ramón Fernández Lechón

RESUMEN.— En el trabajo, basándonos en el método cruzado descrito por Van Roy, presentamos un algoritmo para resolver problemas de planificación óptima de utilización de equipos, en el que aparecen restricciones en variables continuas, enteras bivalentes y restricciones en variables mixtas, e incluimos una restricción debida a limitaciones financieras como consecuencia de los costes fijos de utilización de los equipos.

Planteado el modelo utilizando la formulación «fuerte», realizamos la relajación Lagrangiana con respecto a las restricciones de demanda. Analizamos el método cruzado para el problema planteado, y pasamos a continuación a desarrollar el algoritmo propuesto resolviendo los subprogramas lineales mixtos en variables bivalentes por la técnica branch-and-bound.

1. Introducción

Si repasamos someramente la breve historia de la Investigación Operativa podríamos sacar la conclusión de que uno de los modelos con más frecuencia utilizado sigue siendo el de Programación Lineal; dentro de este tipo de modelos se engloban los de planificación óptima de utilización de equipos. En este trabajo desarrollamos un algoritmo que nos permite resolver un problema de Programación Lineal con restricciones en variables continuas, en variables enteras bivalentes, y con restricciones mixtas.

Un problema con estas características se plantea en una empresa que dispone de varios equipos los cuales pueden tratar indistintamente una serie de artículos que comercializa en el mercado y necesita planificar la cantidad a producir de cada uno de ellos para que se maximice su beneficio, conociendo el precio de mercado, el coste de producción, así como, los costes fijos de utilización de cada equipo.

El problema le podemos formular del siguiente modo:

$$\max_{x,y} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} (p_j - c_{ij})d_j \, x_{ij} - \sum_{i=1}^{m} f_i y_i$$

sujeta a:

$$\sum_{j=1}^{n} h_{ij} d_j \, x_{ij} \leqslant h_i y_i \qquad i = 1,2,\ldots,m \qquad [1]$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leqslant 1 \qquad j = 1,2,\ldots,n \qquad [2]$$

$$\sum_{i=1}^{m} f_i y_i \leqslant f \qquad [3]$$

$$x_{ij} \leqslant y_i \qquad i = 1,2,\ldots,m \; ; \; j = 1,2,\ldots,n \qquad [4]$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \; ; \; y_i \in \{0,1\} \qquad i = 1,2,\ldots,m \quad j = 1,2,\ldots,n \qquad [5]$$

donde

$j = 1,2,\ldots,n$ indica la gama de artículos que comercializa la empresa.

$i = 1,2,\ldots,m$ representa el número de equipos que indistintamente pueden tratar cualquiera de los artículos j.

p_j es el precio de venta del artículo j.

c_{ij} es el coste de producción de una unidad del artículo j por el equipo i.

d_j es la demanda del artículo j.

x_{ij} es una variable continua que representa la fracción de demanda del artículo j que trata el quipo i.

f_i es el coste fijo de utilización del equipo i.

y_i es una variable bivalente que toma los valores 1 o 0 según se utilice o no el equipo i.

h_{ij} es el número de horas que precisa el equipo i para tratar una unidad del artículo j.

h_i es el número de horas que como máximo puede ser utilizado el equipo i.

La restricción [1] expresa las limitaciones de tiempo de utilización de los equipos; [2] impone que las cantidades tratadas del artículo j por los distintos equipos no podrá superar la demanda de dicho artículo; [3] es debida a limitaciones financieras sobre la utilización de los distintos equipos, teniendo un límite máximo f; las restricciones [4] son redundantes en la formulación del problema, su inclusión o no permite hablar de la formulación «fuerte» o formulación «débil». Nosotros consideramos la formulación «fuerte» ya que vamos a utilizar dichas restricciones en el desarrollo del algoritmo.

Un problema como el que hemos descrito puede resolverse por cualquiera de las técnicas de resolución de programas lineales mixtos, por ejemplo, branch-and-bound, algoritmo de descomposición de Benders, algoritmo de Gomory, algoritmos de enumeración, etc..

Recientemente se han utilizado técnicas de relajación para resolver o acotar las soluciones. Relajaciones Langrangianas han utilizado Held y Karp (1970, 1971) en el problema del agente viajero; Geoffrion (1974) desarrolla una teoría general de aplicación de la relajación Lagrangiana a problemas lineales basada en la técnica branch-and-bound; Christofides y Beasley (1983), Van Roy (1986) utilizan la relajación en problemas de localización. La diferencia fundamental entre los distintos algoritmos que utilizan la relajación Lagrangiana proviene: a) del tipo de relajación, que permitirá encontrar una cota inferior, b) del algoritmo que resuelve el problema relajado, y c) de la formación de las cotas inferiores. Sa (1969), para problemas de localización, realiza una relajación reemplazando las variables bivalentes y utilizando la técnica branch-and-bound; Van Roy, también en problemas de localización, relaja respecto a restricciones similares a [1] en nuestro problema y aplica un método por él descrito para la construcción de cotas del valor óptimo del problema, permitiendo también este método su resolución.

Al aplicar al problema planteado, de planificación óptima de utilización de equipos, el procedimiento descrito por Van Roy (1983) comprobamos que, en determinados problemas, los resultados no eran buenos pues, las sucesivas cotas encontradas no convergían y aún con la introducción de cortes el número de problemas que había que resolver era excesivo.

Estas consideraciones nos llevaron a investigar un procedimiento en el que pudiésemos garantizar dicha convergencia. El algoritmo que proponemos se basa en el método cruzado desarrollado por Van Roy obligando al no decrecimiento de las cotas inferiores y no crecimiento de las superiores, garantizando su convergencia.

En el trabajo realizamos un análisis del método cruzado para el problema de planificación óptima de utilización de equipos. En la sección 3, basándonos en dicho análisis, desarrollamos el algoritmo de resolución así como su organigrama. La aplicación de dicho algoritmo a un problema particular la realizamos en un apéndice.

2. Análisis y fundamentos del método cruzado

El método cruzado (Van Roy 1983) permite obtener una cota superior y una cota inferior del valor óptimo de un programa lineal mixto. Con el método se analiza la estructura primal y dual del problema de forma simultánea.

Analicemos a continuación cómo se construyen dichas cotas en nuestro problema, que reformulamos ahora del siguiente modo:

$$(P) \quad \min_{x,y} \sum_{i=1}^{m} f_i y_i - \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} b_{ij} x_{ij}$$

sujeta a:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \leqslant h_i y_i \qquad i = 1,2,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leqslant 1 \qquad j = 1,2,\dots,n$$

$$\sum_{i=1}^{m} f_i y_i \leqslant f$$

$$0 \leqslant x_{ij} \leqslant y_i \qquad i = 1,2,\dots,m \; ; \; j = 1,2,\dots,n$$

$$y_i \in \{0,1\} \qquad i = 1,2,\dots,m$$

donde

$$b_{ij} = (p_j - c_{ij}).d_j$$
$$a_{ij} = h_{ij}.d_j$$

En todo lo que sigue, supondremos que el valor óptimo de la función objetivo es negativo pues en otro caso la empresa tendría pérdidas. Sin embargo, el razonamiento sería similar si el valor de la función objetivo es positivo.

A partir del problema (P) el método construye dos nuevos subproblemas; el subproblema (SP_y) que se obtiene fijando en (P) una solución posible de la variable bivalente «y», siendo por tanto el subproblema (SP_y) un problema lineal en variables continuas. La resolución del problema dual de (SP_y) proporciona los valores duales óptimos asociados a las restricciones de (SP_y); considerando los valores duales λ asociados a las restricciones $\sum_i x_{ij} \leqslant 1$, se forma un nuevo subproblema (SD_y) definido como

$$(SD_y) \qquad \min_{x,y} \sum_i f_i y_i - \sum_{i,j} b_{ij} x_{ij} + \lambda \left(\sum_i x_{ij} - 1\right)$$

sujeta a

$$\sum_j a_{ij} x_{ij} \leqslant h_i y_i \qquad \forall_i$$

$$\sum_{ij} x_{ij} \leqslant n \qquad \forall_{i,j}$$

$$\sum_i f_i y_i \leqslant f$$

$$0 \leqslant x_{ij} \leqslant y_i \qquad \forall_{i,j}$$

$$y_i \; \varepsilon \; \{0,1\} \qquad \forall_i$$

que es una relajación Lagrangiana del problema (P) con respecto a las restricciones $\sum_i x_{i,j} \leqslant 1 \; \forall \; j = 1,2,\ldots,n$, donde se ha considerado además la restricción $\sum_{ij} x_{ij} \leqslant n$, es decir, la restricción reemplazada, con el fin de reducir el conjunto de soluciones posibles. El subproblema (SD_y) es un programa lineal mixto de la misma naturaleza que (P) pero la relajación Lagrangiana hace que su resolución sea más rápida que la del problema (P).

La importancia de la formulación «fuerte» en el planteamiento del problema se pone de manifiesto en la resolución del (SD_y), pues ésta es más rápida con la inclusión de estas restricciones que si no se hubieran utilizado y se siguiera la formulación «débil».

Posteriormente discutiremos la elección de este tipo de relajación ya que se podría relajar respecto a otras restricciones.

Ambos subproblemas permiten obtener una cuota superior e inferior del valor de la función objetivo en el óptimo del problema (P).

Denotemos por v(.) el valor de la función objetivo en el óptimo del problema (.) y supongamos que el problema planteado admite solución finita, entonces se verifican las dos proposiciones siguientes:

PROPOSICION 1. Cualquiera que sea y solución posible del problema (P) se verifica

$$v(P) \leqslant v(SP_y)$$

Demostración

Sea (x^*, y^*) una solución óptima de (P) y sea x una solución óptima de (SP_y), entonces (x,y) es una solución posible de (P) y por tanto

$$\sum_i f_i y_i - \sum_{ij} b_{ij} x_{ij} \geqslant \sum_i f_i y_i^* - \sum_{ij} b_{ij} x_{ij}^*$$

con lo que queda demostrado.

PROPOSICION 2. Cualquiera que sea y solución posible del problema (P) se verifica

$$v(SD_y) \leqslant v(P)$$

Demostración

Sea (x*, y*) una solución óptima del problema (P), por consiguiente será solución posible del problema (SD_y) y se verificará

$$v(SD_y) \leqslant \sum_i f_i y_i^* - \sum_{ij} b_{ij} x_{ij}^* + \lambda \left(\sum_{ij} x_{ij}^* - 1\right) \leqslant v(P)$$

ya que

$$\lambda \left(\sum_{ij} x_{ij}^* - 1\right) \leqslant 0$$

al ser $\lambda \geqslant 0$ y $\sum_{ij} x_{ij}^* \leqslant 1$

El método cruzado descrito por Van Roy (1983, 1986) se basa en estas dos proposiciones, ya que partiendo de un valor y_1 solución posible del problema (P) se resuelve el problema dual del (SP_{y_1}) obteniéndose una cota superior de v(P). La resolución de (SD_{y_1}) proporciona una cota inferior de v(P) así como un valor de la variable bivalente «y» mediante el cual se plantea un nuevo (SP_y) y así sucesivamente.

Estas iteraciones proporcionan cotas superiores e inferiores de v(P), y es posible, si no existe salto en la dualidad, que se produzca la igualdad de las cotas con lo que se habrá encontrado la solución óptima del problema (P). Van Roy (1983) demostró que un mismo «y» no puede ser generado en dos iteraciones consecutivas a menos que sea óptimo en (P), y advirtió que puede ocurrir que se alcance el «y» óptimo y sin embargo en la siguiente iteración se obtenga otro «y» distinto.

El inconveniente de este método cruzado proviene de que la convergencia de las cotas no puede ser garantizada. Cuando las sucesivas iteraciones no mejoran las cotas, el método incorpora nuevos cortes a los problemas (SP_y) y (SD_y) para continuar de nuevo con el procedimiento; aunque también, existe la posibilidad de truncar las iteraciones lo que produciría una solución posible y una cota superior que mide la calidad de la solución.

3. Desarrollo del Algoritmo

La aplicación del método descrito en la sección anterior a los problemas de localización (Van Roy 1986) donde no se consideran restricciones del tipo [3] y las restricciones [2] están en forma de igualdad proporciona buenos resultados encontrándose, en la mayoría de los problemas, la solución óptima en pocas iteraciones.

En la formulación del subproblema (SD_y) como relajación Lagrangiana del (P) se han seguido distintos criterios; Van Roy (1986) relaja respecto a las restricciones del tipo [1], Geoffrion y McBride (1978), Nauss (1978), Christofides y Beasley (1983) relajan respecto a las restricciones de demanda, y como apunta Van Roy ambos subproblemas tienen sus ventajas y parece que la elección de una u otra alternativa es subjetiva. Sin embargo, hay que hacer notar que el número de operaciones a realizar en la formulación del subproblema (SD_y) eligiendo las restricciones de demanda es menor que si se formula el subproblema relajando respecto a otras restricciones; este motivo es el que nos ha llevado a nosotros a elegir la primera formulación.

La aplicación del método cruzado propuesto por Van Roy a determinados problemas de planificación óptima de utilización de equipos no produce buenos resultados, como ya hemos comentado, tanto si la relajación Lagrangiana se realiza respecto a una u otras restricciones. La justificación de estos resultados se debe a que las sucesivas cotas pueden no converger y en estos casos la incorporación de nuevos cortes no asegura una rápida resolución del problema.

El algoritmo que proponemos se basa en el método cruzado pero se obliga al no decrecimiento de las cotas inferiores y no crecimiento de las cotas superiores, garantizando la convergencia de las cotas, hecho este no asegurado en el método descrito por Van Roy, con lo cual en un número limitado de iteraciones se determina la solución óptima o bien una solución ε - óptima en el sentido de que el valor de la función objetivo en dicha solución y en la óptima difieran menos que un valor ε previamente fijado.

Consideremos la siguiente proposición previa al desarrollo del algoritmo.

PROPOSICION 3. Si (x^*, y^*) es una solución óptima de (P) entonces x^* es la solución óptima de (SP_{y^*}).

Demostración

Razonemos por reducción al absurdo y supongamos que (x^*, y^*) es una solución óptima de (P) pero x^* no lo es de (SP_{y^*}). Sea pues x^o una solución óptima de (SP_{y^*}) entonces

$$\sum_i f_i y_i^* - \sum_{ij} b_{ij}\, x_{ij}^o < \sum_i f_i y_i^* - \sum_{ij} b_{ij}\, x_{ij}^*$$

y como (x^o, y^*) es una solución posible de (P) la relación anterior va en contra de que (x^*, y^*) era una solución óptima de (P).

Desarrollemos a continuación el algoritmo que nosotros proponemos y que nos permite la resolución del problema.

Se comienza eligiendo una solución posible y_1 del problema (P), para ello es suficiente elegir una cualquiera que verifique la restricción financiera. Se formula a continuación el subproblema (SP_{y_1}) y se determinan los valores duales óptimos asociados a las restricciones $\sum_i x_{ij} \leqslant 1$, $\forall$ j. Sea λ dichos valores óptimos, por tanto $v^1 = v(SP_{y_1})$ será la cota superior de v(P).

Con λ se formula el subproblema (SD_{y_1}) y sea (x_2', y_2) una solución óptima de (SD_{y_1}), y_2 puede o no coincidir con y_1. La solución en variables continuas x_2' puede no ser solución posible del problema (P) pues la restricción reemplazada incluida en (SD_{y_1}) es una consecuencia de las restricciones [2] del problema (P).

La resolución de (SD_{y_1}) proporciona según la proposición 2 una cota inferior de v(P) que denotamos por $v_1 = v(SD_{y_1})$.

Con las dos cotas encontradas pueden plantearse distintos casos que pasamos a analizar.

Si $v^1 = v_1$ el problema (P) estaría resuelto y su solución óptima es la del subproblema (SP_{y_1}) según la proposición 3.

Si $v_1 < v^1$, lo que puede ocurrir debido al desfase en el subproblema dual aún en el caso de que y_1 sea óptimo, pero $v^1 - v_1 \leqslant \varepsilon$, tendríamos una solución ε - óptima, la correspondiente a y_1 en el subproblema (SP_{y_1}). En caso contrario, con el valor y_2 se formula (SP_{y_2}), la resolución de su problema dual determina una cota superior $v^2 = v(SP_{y_2})$. Si $v^2 \geqslant v^1$ no se ha mejorado la acotación por lo que mantiene v^1 como cota superior y si $v^2 < v^1$ se toma como nueva cota superior v^2, redefiniendo $v^1 = v^2$ e $y_1 = y_2$. El intervalo de acotación obtenido se divide en dos subintervalos de idéntica amplitud definiendo

$$\bar{v}_1 = \tfrac{1}{2}\,(v^1 + v_1)$$

con lo que se obtienen los intervalos $[v_1, \bar{v}_1]$ y $(\bar{v}_1, v^1]$. Refiriéndonos al primer intervalo se formula el siguiente problema:

$$(SM_{y_1}) \qquad \max_{x,y} \sum_i f_i y_i - \sum_{ij} b_{ij} x_{ij}$$

sujeta a:

$$\sum_j a_{ij} x_{ij} \leqslant h_i y_i \qquad \forall\ i$$

$$\sum_i x_{ij} \leqslant 1 \qquad \forall\ j$$

$$\sum_i f_i y_i \leqslant f$$

$$0 \leqslant x_{ij} \leqslant y_i \qquad \forall\ i,j$$

$$\sum_i f_i y_i - \sum_{ij} b_{ij} x_{ij} < \bar{v}_1 \qquad [6]$$

$$y_i \in \{0,1\} \qquad \forall\, i$$

Ahora bien, este problema puede o no admitir solución. Si ocurre lo segundo se tendrá que $v(P) \notin [v_1, \bar{v}_1]$ debido a la restricción [6] y esto permite redefinir como nueva cota inferior $v_1 = \bar{v}_1$. En el caso que el problema (SM_{y_1}) admita a (x_2, y_2') como solución posible, ésta también lo será del problema (P) con lo que el valor de la función objetivo del problema (SM_{y_1}) en (x_2, y_2') es mayor o igual que v(P) y menor o igual que $\bar{v}_1$; ese valor permite redefinir una nueva cota superior v^1.

Notar que determinar si el problema (SM_{y_1}) no tiene solución o encontrar una solución posible, por cualquiera de los métodos de resolución de programas lineales mixtos, se realiza, en general, en un número reducido de iteraciones. Es obvio que el nuevo intervalo de acotación obtenido tiene una amplitud a lo sumo la mitad que el anterior.

Con el valor y_1, que puede ser el redefinido a partir del y_2 obtenido como solución del subproblema (SD_{y_1}) si $v^2 < v^1$, se formula un «nuevo» (SD_{y_1}) en el que se incluye el corte

$$\sum_i f_i y_i - \sum_{ij} b_{ij} x_{ij} + \lambda \left(\sum_i x_{ij} - 1\right) \geq v_1$$

donde λ son los valores duales óptimos asociados a las restricciones de demanda del subproblema (SP_{y_1}) o bien del (SP_{y_2}).

Observar que el subproblema (SD_{y_1}) puede estar ya formulado y su solución verificar el corte, en cuyo caso, se divide de nuevo el intervalo de acotación a la mitad y se plantea nuevamente el correspondiente problema (SM_{y_1}) con una nueva restricción [6]; y así se seguirá siempre que el correspondiente problema de máximos admita solución.

Si el «nuevo» (SD_{y_1}) con el corte correspondiente no está formulado, su solución óptima proporciona una cota inferior mayor o igual que la anterior.

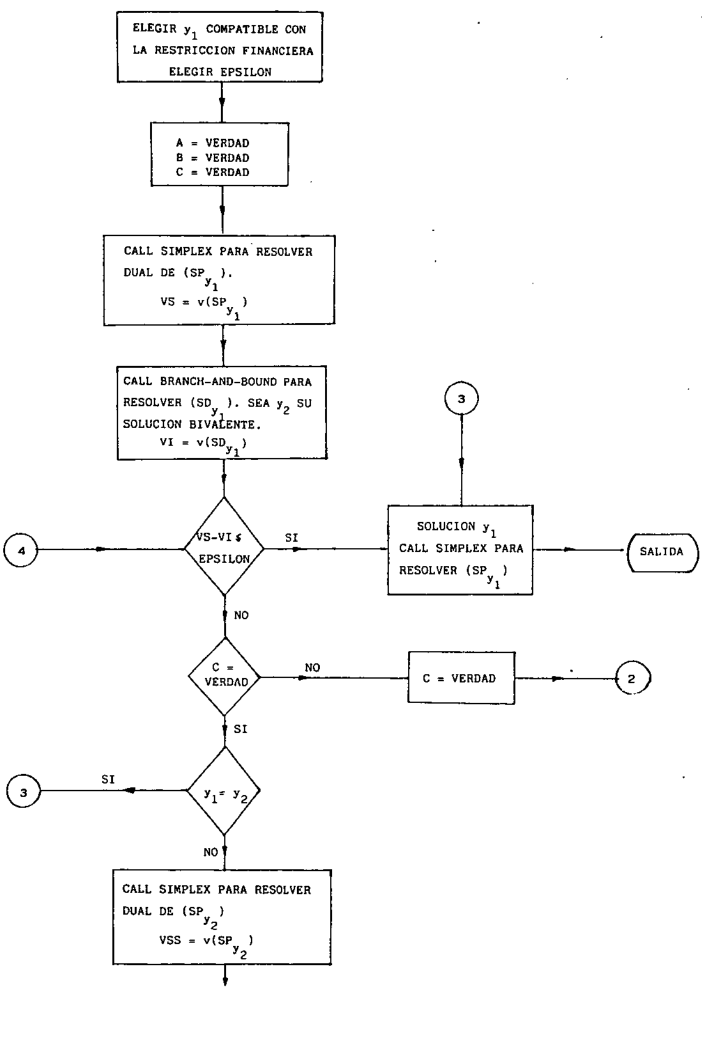
Con el nuevo intervalo de acotación se repite el procedimiento, proporcionándonos siempre una solución óptima o ε - óptima del problema (P).

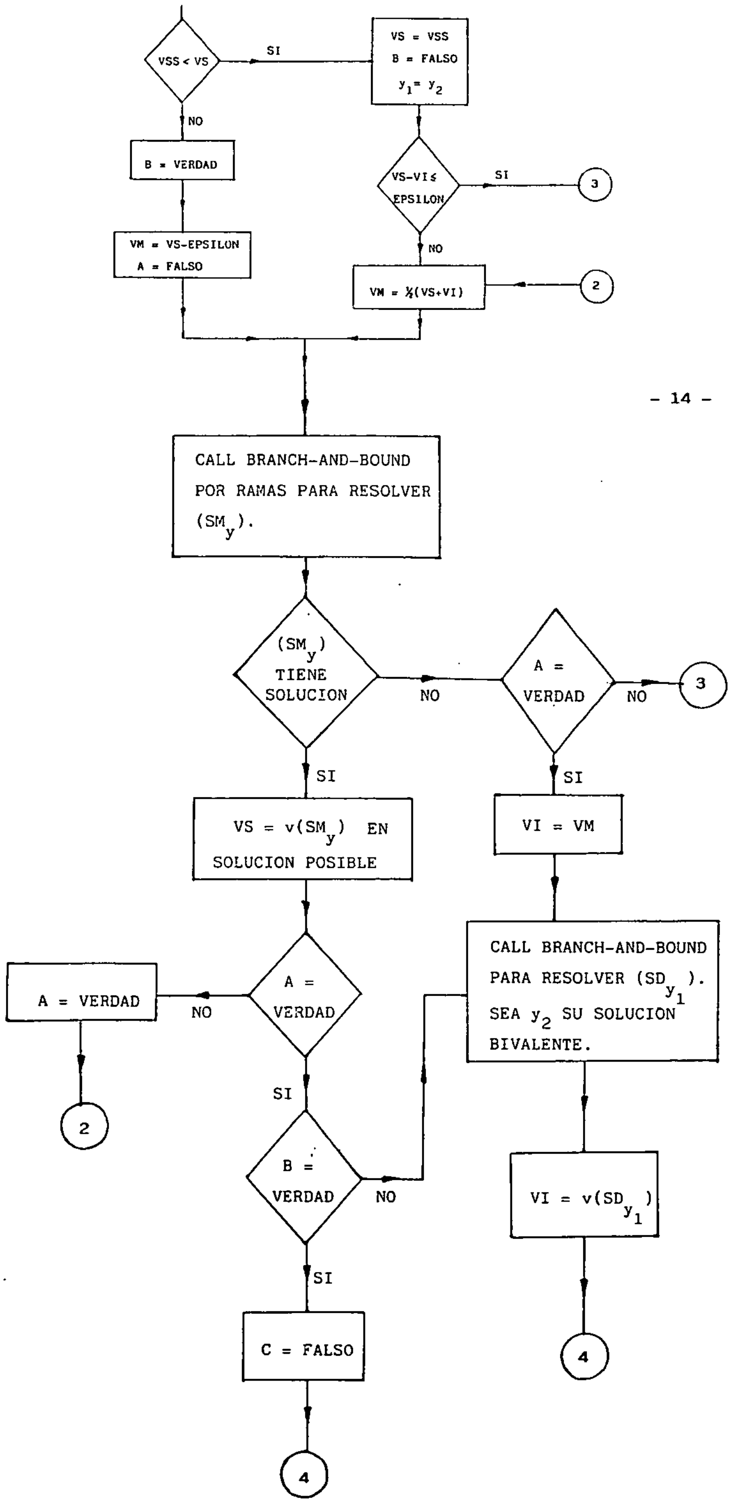
Es evidente que todo subproblema (SD_{y_i}) tiene un conjunto de oportunidades distinto del vacio pues (x_i, y_i) es una solución posible, siendo x_i la solución óptima del subproblema (SP_{y_i}).

La aplicación del algoritmo a distintos problemas aconseja que si al resolver el subproblema (SD_{y_i}) se obtiene como solución el mismo y_i, o bien $v(SP_{y_i})$ no mejora la cota superior que teníamos, entonces en vez de dividir el intervalo de acotación a la mitad, conviene dividirlo en dos subintervalos, uno de amplitud ε a la izquierda de la cota superior y el otro el resto, y pasar a formular el (SM_{y_i}), con lo que si este problema no admite solución ya se habrá encontrado una solución ε - óptima. Si el problema admite solución se continua con el procedimiento descrito.

Las distintas etapas del algoritmo que hemos desarrollado para resolver el problema (P) las podemos resumir en el organigrama siguiente, donde VS denota la cota superior de v(P), VI la cota inferior. Consideramos tres variables lógicas A, B, C donde A es verdad si la división del intervalo de acotación se realizó a la mitad y falsa si uno de los subintervalos tiene amplitud ε ; B es verdad si $v(SP_{y_i})$ no mejora la cota superior y falsa en caso contrario; C es falsa si $v(SD_{y_i})$ no mejora la acotación anterior por lo que se elimina su cálculo y es verdadera en el resto de los casos.

Hemos utilizado en la resolución de los programas (SD_{y_i}) y (SM_{y_i}) la técnica Branch —and— Bound, pero alternativamente se puede proceder para su resolución con otros algoritmos de resolución de programas lineales mixtos.




VSS < VS
SI
VS = VSS
B = FALSO
$y_1 = y_2$
NO
B = VERDAD
VS-VI ≤ EPSILON
SI
3
NO
VM = VS-EPSILON
A = FALSO
VM = ½(VS+VI)
2
CALL BRANCH-AND-BOUND POR RAMAS PARA RESOLVER (SM_y).
(SM_y) TIENE SOLUCION
NO
A = VERDAD
NO
3
SI
SI
VS = v(SM_y) EN SOLUCION POSIBLE
VI = VM
A = VERDAD
NO
A = VERDAD
CALL BRANCH-AND-BOUND PARA RESOLVER (SD_{y_1}). SEA y_2 SU SOLUCION BIVALENTE.
2
SI
B = VERDAD
NO
SI
VI = v(SD_{y_1})
C = FALSO
4
4

- 14 -

4. Conclusiones

Aunque existen distintos métodos de resolución de programas lineales mixtos, nosotros, en este trabajo, hemos propuesto un algoritmo cruzado para resolver problemas de planificación óptima de utilización de equipos. Dicho algoritmo de resolución también puede aplicarse a otros problemas lineales con estructura similar al problema planteado, es decir, problemas en los que aparezcan restricciones en variables continuas, en variables bivalentes y mixtas.

Cuando el desfase en el subproblema dual (relajación Lagrangiana) es pequeño, el método descrito por Van Roy suele producir buenos resultados pues la convergencia de las cotas suele ser rápida. Sin embargo, esto no ocurre en aquellos problemas en los que el desfase del subproblema dual es grande, teniendo entonces que introducir cortes y aún con la introducción de cortes no se tiene asegurada una rápida convergencia. Este inconveniente no se pone de manifiesto en el algoritmo que proponemos pues, en las sucesivas etapas, se obliga al no decrecimiento de las cotas inferiores y no crecimiento de las superiores garantizando, por consiguiente, la convergencia de las cotas.

Apéndice

El siguiente ejemplo, nos sirve para ilustrar el algoritmo que hemos desarrollado en el apartado anterior.

Consideremos una empresa que tiene la posibilidad de comercializar tres artículos, disponiendo de cuatro equipos o secciones para la producción indistinta de cada uno de ellos y de 19 u.m. como máximo para cubrir los costes fijos de utilización de los equipos o secciones.

Los distintos datos del modelo se recogen en el siguiente cuadro:

	EQUIPOS								
	1		2		3		4		
	h_{1j}	b_{1j}	h_{2j}	b_{2j}	h_{3j}	b_{3j}	h_{4j}	b_{4j}	DEMANDA
ART 1	1	0,2	0,5	0,3	0,5	0,15	0,25	0,4	100
ART 2	1,5	0,3	1	0,4	0,75	0,2	0,5	0,3	70
ART 3	1,25	0,25	2	0,1	1,5	0,3	1	0,5	120
h_i	115		80		75		80		
f_i	5		5		6		6		

donde h_{ij} es el número de unidades de tiempo que tarda en manipular el artículo j el equipo i; h_i son las unidades de tiempo que como máximo pueden utilizarse los correspondientes equipos en el horizonte de planificación del modelo; b_{ij} es el beneficio unitario expresado en u.m. del equipo i con respecto al artículo j y f_i son los costes fijos de utilización de los equipos.

Realizando las operaciones correspondientes, obtenemos el siguiente planteamiento del problema:

$$\text{Min} \quad 5y_1 + 5y_2 + 6y_3 + 6y_4 - 20\,x_{11} - 21\,x_{12} - 30\,x_{13} - 30\,x_{21} - 28\,x_{22} - \\ - 12\,x_{23} - 15\,x_{23} - 15\,x_{31} - 14\,x_{32} - 36\,x_{33} - 40\,x_{41} - 21\,x_{42} - 60\,x_{43}$$

sujeta a:

$$\begin{aligned}
&100\,x_{11} + 105\,x_{12} + 150\,x_{13} \leqslant 115\,y_1 \\
&50\,x_{21} + 70\,x_{22} + 240\,x_{23} \leqslant 80\,y_2 \\
&50\,x_{31} + 52{,}5\,x_{32} + 180\,x_{33} \leqslant 75\,y_3 \\
&25\,x_{41} + 35\,x_{42} + 120\,x_{43} \leqslant 80\,y_4 \\
&x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} \leqslant 1 \\
&x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} \leqslant 1 \\
&x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} \leqslant 1 \\
&x_{11} \leqslant y_1 \;;\; x_{12} \leqslant y_1 \;;\quad x_{13} \leqslant y_1 \\
&x_{21} \leqslant y_2 \;;\; x_{22} \leqslant y_2 \;;\quad x_{23} \leqslant y_2 \\
&x_{31} \leqslant y_3 \;;\; x_{32} \leqslant y_3 \;;\quad x_{33} \leqslant y_3 \\
&x_{41} \leqslant y_4 \;;\; x_{42} \leqslant y_4 \;;\quad x_{43} \leqslant y_4 \\
&5\,y_1 + 5\,y_2 + 6\,y_3 + 6\,y_4 \leqslant 19 \\
&x_{ij} \geqslant 0 \;;\quad y_i \in \{0,1\} \qquad i = 1,2,3,4 \;;\; j = 1,2,3
\end{aligned}$$

Para comenzar el algoritmo partimos de una solución bivalente compatible con la restricción financiera. Sea $y_1 = (1,1,0,0)$ la solución de partida.

1° PASO. $v(SP_{y_1}) = -44 = v^1$

2° PASO. $v(SD_{y_1}) = -97{,}52631 = v_1 \;;\; y_2 = (1,1,0,1)$

3° PASO. $v(SP_{y_2}) = -95{,}75 < v(SP_{y_1})$ luego

$v^1 = -95{,}75 \;;\; y_1 = (1,1,0,1)$

4° PASO. El problema (SM_{y_1}) carece de solución, luego

$v_1 = -96{,}63816$

5° PASO. Resolviendo (SD_{y_1}), tenemos $v(SD_{y_1}) = -96{,}1367$ con solución

$y_2 = (0,0,0,1)$

6° PASO. $v(SP_{y_2}) > v^1 \implies v^1 = -95{,}75$

$y_1 = (1,1,1,0)$

7° PASO. El problema (SM_{y_1}) carece de solución, luego $y_1 = (1,1,1,0)$ es una solución $\varepsilon = 0{,}01$ òptima.

Si aplicamos el procedimiento descrito por Van Roy al problema planteado, observamos que despues de seis se obtiene una solución que ya se había obtenido en una de las etapas anteriores, metiéndonos por tanto en un ciclo, habría por consiguiente que introducir cortes, y el método es por tanto más largo que el que nosotros hemos descrito.

Bibliografía

CHRISTOFIDES, N.; BEASLEY, J.E., «Extensions to a Lagrange Relaxation Approach for the Capacited Warehouse Location Problem». European Journal of Operational Research, 12, (1983), págs. 19-28.

ESCUDERO, L.F., «Programación Lineal: continua, entera, bivamente y mixta». Ediciones Deusto. Bilbao. (1976).

GEOFFRION, A.M., «Langrangean Relaxation for Integer Programming». Mathematical Programming Study, 2, (1974), págs. 82-114.

HELD, M.; KARP, R.M., «The traveling salesman problem and minimum spanning trees». Operations Research, 18, (1970), págs. 1138-1162.

HELD, M.; KARP, R.M., «The traveling salesman problem and minimum spanning trees: Part II». Mathematical Programming, 1, (1971), págs. 6-25.

NAUSS, R.M., «An Improved Algorithm for the Capacitated Facility Location Problem». Journal of the Operational Research Society, 29, (1978), págs. 1195-1202.

SA G. «Branch - and - Bound and approximate solutions to the capacitated plant-location problem». Operations Research, 17, (1969), págs. 1005-1016.

VAN ROY, T.J., «Cross Decomposition for Mixed Integer Programming». Mathematical Programming, 25, (1983), págs. 46-63.

VAN ROY, T.J., «A Cross Decomposition Algorithm for Capacited Facility Location». Operations Research, 34, (1986), págs. 145-163.