

Errores en la conversión de representaciones en problemas con ecuaciones lineales

Yuly Maribel Pantoja-Portillo¹

Resumen

Cómo citar este artículo / To reference this article /

Para citar este artículo: Pantoja-Portillo, Y. M. (2021). Errores en la conversión de representaciones en problemas con ecuaciones lineales. *Revista UNIMAR*, v. 39, n. 1, 56-63. <https://doi.org/10.31948/Rev.unimar/unimar39-1-art4>

Fecha de recepción: 14 de mayo de 2020

Fecha de revisión: 09 de octubre de 2020

Fecha de aprobación: 03 de noviembre de 2020

El presente artículo centra su atención en cómo los estudiantes aprenden a convertir representaciones dadas en lengua natural (consignas de los problemas) en representaciones expresadas en escritura algebraica. Se considera un enfoque cualitativo basado en la teoría fundamentada, con una línea de formación relacionada con la práctica pedagógica y un área temática correspondiente a la Didáctica Disciplinar y Mediática y, un paradigma interpretativo. Se aplicó una propuesta de enseñanza para promover el aprendizaje de la conversión a través de la resolución de problemas, donde intervienen ecuaciones lineales con una incógnita. Dentro de sus principales resultados están: la identificación y caracterización de los tipos de conversiones y errores al resolver problemas. Con respecto a una de las principales conclusiones, está la idea equivocada que tienen algunos docentes al asumir que la actividad cognitiva de conversión surge de forma espontánea en los estudiantes.

Palabras clave: conversión; lengua natural; escritura algebraica; ecuaciones lineales con una incógnita; designación funcional; re-designación.

Artículo Resultado de Investigación. Se derivó de la investigación titulada: Errores en la conversión de la lengua natural a la escritura algebraica, que surgen en la resolución de problemas de ecuaciones de primer grado con una incógnita, desarrollada desde el 10 de mayo de 2018 hasta el 27 de abril de 2020 en la ciudad de Pasto, departamento de Nariño, Colombia.

¹Licenciada en Matemáticas, Universidad de Nariño; Docente Titular del Colegio Nuestra Señora de las Lajas, Pasto, Nariño. E-mail: yulymaribelpantoja@gmail.com

Errors in the conversion of representations in problems with linear equations

This article focuses on how students learn to convert given representations in natural language (problem slogans) into representations expressed in algebraic writing. It is considered a qualitative approach based on grounded theory, with a line of training related to pedagogical practice and a thematic area corresponding to Disciplinary and Media Didactics and an interpretive paradigm. A teaching proposal to promote conversion learning through problem solving was applied, where linear equations with an unknown variable intervene. Among its main results are: the identification and characterization of the types of conversions and errors when solving problems. Regarding one of the main conclusions, there is the mistaken idea that some teachers have when they assume that the cognitive activity of conversion arises spontaneously in the students.

Keywords: conversion; natural language; algebraic writing; linear equations with one unknown; functional designation; re - designation.

Erros na conversão de representações em problemas com equações lineares

Resumo

Este artigo enfoca como os alunos aprendem a converter determinadas representações em linguagem natural (slogans de problemas) em representações expressas na escrita algébrica. É considerada uma abordagem qualitativa com base na teoria fundamentada, com uma linha de formação relacionada com a prática pedagógica e uma área temática correspondente à Didática Disciplinar e Media e um paradigma interpretativo. Uma proposta de ensino foi aplicada para promover o aprendizado da conversão a través da solução de problemas, onde equações lineares com uma variável desconhecida intervêm. Entre seus principais resultados estão: a identificação e caracterização dos tipos de conversões e erros na resolução de problemas. Em relação a uma das principais conclusões, há a ideia equivocada que alguns professores têm quando assumem que a atividade cognitiva de conversão surge espontaneamente nos alunos.

Palavras-chave: conversão; linguagem natural; escrita algébrica; equações lineares com uma designação desconhecida; funcional designação; re - designação.

1. Introducción

Las ecuaciones lineales constituyen uno de los primeros tópicos donde los estudiantes se introducen en el estudio del álgebra, lo cual suscita la inclusión de relaciones, estructuras y propiedades matemáticas mediante la explicitación de expresiones y enunciados literales. Una de las mayores complejidades al resolver ecuaciones lineales tiene que ver con la resolución de problemas de enunciado (Rojas Garzón y Vergel Causado, 2013). El objetivo de la investigación fue, aportar elementos de reflexión para la enseñanza de la conversión de la lengua natural y la escritura algebraica, a través de la discriminación de los errores que cometen los estudiantes al resolver problemas de ecuaciones de primer grado con una incógnita. Puntualmente, se buscó mostrar los errores que tienen al intentar convertir enunciados en lengua natural a expresiones en escritura algebraica. Tal cuestión, de naturaleza semiótico-cognitiva, es la que determina la complejidad y el grado de comprensión que subyace a la resolución de problemas de enunciado.

Para alcanzar este propósito, se asumió un paradigma de investigación cualitativo. El enfoque fue interpretativo y el tipo de investigación estuvo basado en la teoría fundamentada (Hernández, Fernández y Baptista, 2014). Se consideró una propuesta de enseñanza para desarrollar habilidades para el paso de la lengua natural a la escritura algebraica, como instrumento de recolección de información. Las unidades de trabajo consideradas fueron doce estudiantes de grado octavo del Colegio Nuestra Señora de las Lajas, en la ciudad de Pasto. El diseño del instrumento de análisis se hizo siguiendo los parámetros de la metodología inductiva y estuvo conformado por tres categorías de análisis: re-designación funcional y explicitación de la relación de equivalencia (Duval, 2017) y, Errores (Azañero, 2013). La primera de las categorías alude a la forma como los estudiantes designan y re-designan la cantidad desconocida (incógnita), a partir de los diferentes contextos y tipos de enunciados que surgen en el proceso; la segunda tiene que ver con la forma como los educandos formulan la relación de equivalencia según las condiciones del enunciado en cuestión; la tercera, por su parte, hace referencia a los errores de tipo semiótico-cognitivos que surgen en la resolución

de problemas con ecuaciones lineales y cómo estos repercuten en su aprendizaje.

Después de contrastar las producciones de los estudiantes con las operaciones cognitivas, se evidenció algunas generalidades que permitieron discriminar cinco tipos de conversión:

- Con anclaje impuesto.
- Con anclaje no impuesto.
- Compuesta.
- Sucesiva.
- Con inversión del anclaje.

Tres formas de explicitación de la relación de equivalencia:

- Simple
- Mixta
- Compuesta.

Y seis tipos de errores:

- Error al designar las cantidades conocidas y desconocidas.
- En la re-designación.
- En el cambio de anclaje.
- En la inversión del anclaje.
- En la conversión inversa.
- Error al plantear la relación de equivalencia.

Los elementos anteriores constituyen un importante referente para que los educadores comprendan cómo sus estudiantes resuelven problemas cuando las ecuaciones lineales están presentes, pues permiten caracterizar cómo proceden y, predecir los errores más comunes. En consecuencia, les permite intervenir de manera efectiva y oportuna.

2. Metodología

De naturaleza semiótico-cognitiva, basada en la teoría desarrollada por Duval (2017), en la cual se analiza los errores que surgen al resolver problemas de ecuaciones lineales con una incógnita, donde interviene la conversión del registro de la lengua natural al registro de la escritura algebraica. Esto se realizó por medio de una propuesta de enseñanza que se aplicó a un grupo de doce estudiantes de grado octavo del Colegio Nuestra Señora de Las Lajas, en la ciudad de Pasto, en el departamento de Nariño.

Los aspectos más relevantes en los cuales se fundamenta el proceso metodológico son: tipo de investigación cualitativo, entendido como la visión desde la cual el investigador realiza el estudio; el enfoque interpretativo, es decir, la finalidad con la cual se obtiene la información a estudiar y el tipo de investigación: Teoría Fundamentada; esto es, el método por medio del cual se contrasta inductivamente la información con la teoría que sustenta la investigación, para dar paso al surgimiento de nueva teoría. Como técnicas para la recolección de la información en el trabajo de campo, se tomó: el diagnóstico, la observación directa y entrevista semiestructurada. Los instrumentos de análisis utilizados fueron la prueba diagnóstica, el cuestionario y el diario de campo.

La propuesta de enseñanza se construyó por medio de un cuestionario que se dividió en tres tareas: en la primera se identificó y discriminó las unidades significantes de cada uno de los registros involucrados, por medio de cuatro actividades; en la segunda, se buscó promover la articulación de unidades significantes en lengua natural a unidades significantes en escritura algebraica y viceversa, a partir de la identificación y discriminación de representaciones equivalentes en el registro de lengua natural y escritura algebraica; y, la tercera se centró en explicitar la relación de equivalencia, que dará paso a la resolución de la ecuación, resolución de problemas matemáticos y no matemáticos y el planteamiento de problemas que son resueltos por medio de ecuaciones lineales con una incógnita, observando las recomendaciones hechas por Duval (2017), quien manifiesta:

Toda actividad de conversión presupone la discriminación de las unidades significantes que se deben poner en correspondencia en el registro de partida y en el de llegada. La dificultad propia a la actividad de conversión reside esencialmente en esta discriminación. (p. 117)

La conversión de las representaciones requiere la identificación de las unidades significantes en el registro de partida y en el de llegada. Ahora bien, frecuentemente, es la discriminación de estas unidades lo que ha faltado. (p.112)

Las estrategias de análisis de los datos que se utilizó fueron: codificación abierta, axial y selectiva, para realizar el vaciado de la información y el posterior análisis, lo cual responde al tipo de

investigación de teoría fundamentada, que explica un fenómeno o responde al planteamiento. Esta etapa se realizó por medio de análisis inferencial a partir de códigos o categorías inductivas, unidades de significado y referencias teóricas de la conversión de representaciones que concluyeron con el sentido y significado del investigador (Hernández, et al., 2014).

La estructura de la propuesta de enseñanza se basó en la identificación y discriminación de las operaciones cognitivas propias de la actividad de conversión, indispensable para la resolución de problemas con ecuaciones lineales. Por tanto, es imperioso diferenciar dos aspectos importantes: las cantidades conocidas (constantes) y las cantidades desconocidas (incógnitas), para lograr concretar la primera operación cognitiva de la conversión, denominada 'Designación de la cantidad desconocida', la cual consiste en identificar en la consigna del problema expresado en el registro de Lengua Natural que, parte de éste se designará como la cantidad desconocida y, a partir de ahí, se realizará las respectivas re -designaciones.

Después de realizadas las operaciones cognitivas de designación y re-designación, el educando debe poner en práctica la segunda operación relacionada con la explicitación de la relación de equivalencia o el planteamiento de la ecuación, que consiste en construir la igualdad que dará paso a la solución del problema. La ecuación está conformada por la cantidad desconocida designada en principio y las re-designaciones correspondientes, igualadas a cantidades conocidas o desconocidas.

Por último, se identifica los errores más relevantes que cometen los estudiantes cuando resuelven ecuaciones lineales, considerando que, como sostiene Duval (2002), convertir un enunciado es rediseñar estos dos tipos de objetos a los que se refiere el enunciado, teniendo en cuenta la redefinición funcional de los objetos ya designados lingüísticamente y la explicación de una relación, equivalente que luego permitirá una sustitución; ésta última sigue siendo, en la actualidad, una barrera que la mayoría de ellos no cruza, incluso, al final de la escuela secundaria, especialmente cuando se trabaja con sistema de ecuaciones. Además, otra actividad que genera errores en su realización, es la relacionada con la conversión inversa entre el registro de representación de escritura algebraica a lengua natural, debido a que a menudo hay fenómenos importantes de no congruencia, que el maestro instintivamente evitar explicar (Duval 2002).

3. Resultados

A partir del análisis realizado a cada parte de la propuesta de enseñanza y, contrastando esta información con las operaciones cognitivas y los errores identificados, se obtuvo seis tipos de conversión de registros de representación, tres de explicitación de la relación de equivalencia y siete de errores.

La identificación y discriminación de los tipos de conversiones basados en las operaciones cognitivas de designación y re-designación, responden al planteamiento del primer objetivo específico. En el desarrollo del análisis de los resultados de la propuesta de enseñanza se evidenció que la interacción entre las operaciones cognitivas está directamente relacionada con algunas características que los estudiantes deben tener en cuenta a la hora de convertir representaciones y, antes de plantear la relación de equivalencia; esta clasificación se denominó tipos de conversión, los cuales abordan los elementos generales que surgen al convertir representaciones, y sirven como una pauta para el análisis de los procesos que llevan a cabo los estudiantes a la hora de resolver problemas con ecuaciones lineales con una incógnita. A partir del análisis de los datos y considerando las transformaciones semióticas que promueven las tareas planteadas en la propuesta de enseñanza, se logró cinco tipos de conversión, que se describe a continuación:

1. **Conversión Anclaje Impuesto.** Este tipo de conversión ocurre cuando la elección de la cantidad desconocida está impuesta por la consigna del problema. La cantidad desconocida se relaciona con la conocida por medio de operaciones de naturaleza interna (suma o resta) o externas (producto o cociente). Además, la relación de equivalencia está igualada a una cantidad conocida; se considera una única re-designación y se ubica en uno de los miembros de la igualdad.
2. **Conversión Anclaje no Impuesto.** Igual que en el caso anterior, las cantidades desconocidas se relacionan con las conocidas, por medio de operaciones de naturaleza interna (suma o resta) o externas (producto o cociente); éstas se ubican en un miembro de la ecuación y están igualadas a una cantidad conocida. A diferencia del caso anterior, las re-

designaciones son realizadas a partir de la designación de la desconocida o, también, a partir de las re-designaciones obtenidas; las cantidades desconocidas aparecen más de una vez (términos semejantes) y la consigna del problema no impone la designación de la cantidad desconocida; en otras palabras, no impone el anclaje con respecto al cual se realizará las re-designaciones.

3. **Conversión Compuesta.** Este tipo de conversión comparte la mayor parte de las características del caso anterior, dado que la operación cognitiva también es R2; en el único aspecto en el que difieren es en la explicitación de la relación de equivalencia ya que, en este caso, la ecuación se compone por cantidades conocidas y desconocidas relacionadas por operaciones de naturaleza interna e interna, pero estas se ubican en ambos lados de la igualdad.
4. **Conversión Sucesiva.** Aquí no basta con una única re-designación sobre la asignación de la cantidad desconocida; es necesaria la aplicación de varias re-designaciones: una, a continuación de otra. Igual que en los casos anteriores y, en cada una de las re-designaciones consideradas, las cantidades desconocidas se relacionan con la conocida, a través de operaciones internas (suma o resta) o externas (producto o cociente); además, éstas se ubican en un miembro de la ecuación y están igualadas a una cantidad conocida.
5. **Conversión con Inversión del Anclaje.** La aplicación de varias re-designaciones debe ser considerada: una(s) sobre la cantidad desconocida; otra(s) sobre re-designaciones de la cantidad conocida. En el proceso se requiere una inversión en el anclaje (Duval, 2002) y, en ningún caso, la consigna impone el anclaje sobre la cantidad desconocida. Con relación a la relación de equivalencia, ésta se encuentra igualada a una cantidad conocida en uno de los miembros y en el otro en cantidades conocidas y desconocidas, relacionadas con operaciones de naturaleza interna y externa.

La identificación y discriminación de los tipos de relaciones de equivalencia que surgieron al resolver los problemas planteados en la propuesta de enseñanza, responden al planteamiento del segundo objetivo específico, de la siguiente forma:

Explicitación de la Relación de Equivalencia Simple. La ecuación está conformada por la cantidad desconocida relacionada con la cantidad conocida por medio de operaciones de naturaleza interna y está igualada a una cantidad conocida.

Explicitación de la Relación de Equivalencia Mixta. La ecuación está conformada en el primer miembro por cantidades conocidas y desconocidas, pero estas aparecen más de una vez y se relacionan por medio de operaciones de naturaleza interna y externa; además, están igualadas en el segundo miembro a una cantidad conocida.

Explicitación de la Relación de Equivalencia Compuesta. La ecuación está conformada en ambos miembros por cantidades conocidas y desconocidas relacionadas por medio de operaciones de naturaleza interna o externa. En ocasiones, estas cantidades están asociadas por signos de agrupación, utilizados para explicitar las operaciones de naturaleza externa.

Al analizar los procesos que los estudiantes presentaban en cada ítem de la propuesta, se evidenció que los errores están directamente relacionados con la forma equivocada de aplicar las operaciones cognitivas; por consiguiente, se formuló seis tipos de errores, los cuales responden al planteamiento del tercer objetivo específico:

1. **Error al designar las cantidades conocidas y desconocidas.** Al designar la cantidad desconocida, se confunde con la cantidad conocida, porque el estudiante designa la incógnita como una cantidad conocida.
2. **Error en la re -designación.** El estudiante realiza inadecuadamente la re-designación con respecto a la designación de la cantidad desconocida o con respecto a las posteriores re-designaciones; el error consiste en la utilización incorrecta de la operación interna o externa entre la cantidad desconocida y la conocida.
3. **Error en el cambio de anclaje.** Al efectuar el cambio de anclaje, el estudiante no identifica que esta designación cambia, según el objeto que se tome como referencia para realizar la designación de la cantidad desconocida.
4. **Error en la inversión del anclaje.** Para realizar la segunda re-designación, es necesario realizar una inversión en el anclaje para posibilitar su construcción;

el error consiste en no invertir la operación interna entre la primera re-designación y la expresión que se convertirá en la segunda re-designación.

5. **Error en la Conversión Inversa.** El estudiante hace la conversión solamente en un solo sentido; esto es, del registro de la lengua natural al de la escritura algebraica, pero no logra realizarlo en el sentido contrario (del registro de la escritura algebraica a la lengua natural), dado que no efectúa una correcta correspondencia entre las unidades significantes de cada registro.
6. **Error en la plantear la relación de equivalencia.** A pesar de que realiza correctamente las designaciones y re-designaciones de las cantidades conocidas y desconocidas, plantea en forma incorrecta la relación de equivalencia, porque no tiene en cuenta la relación y la correspondencia entre los miembros de la igualdad.

Por último, tanto los tipos de conversión como los tipos de explicitación de la relación de equivalencia y los errores identificados, contribuyen a alcanzar el objetivo general de la investigación, el cual se basa en aportar elementos de reflexión para la enseñanza de la conversión de la lengua natural a la escritura algebraica, a través de la discriminación de los errores que cometen los estudiantes al resolver problemas de ecuaciones de primer grado con una incógnita.

4. Discusión

Se evidencia una estrecha relación entre las características de las competencias matemáticas y la teoría de representaciones semióticas; incluso, las reflexiones y conclusiones evidenciadas en este estudio, apuntan de cierta forma a propiciar un espacio de reflexión acerca de los fundamentos presentados en los estándares básicos de competencias y los lineamientos curriculares de matemáticas, en los cuales, se cita en varias ocasiones a Duval (2017). Según el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2019-2), la competencia de interpretación y representación:

Consiste en la habilidad para comprender y transformar la información presentada en formatos distintos (registros de representación) como tablas, gráficas, conjuntos de datos, diagramas, esquemas, etcétera, así, como la capacidad de utilizar estas representaciones

para extraer información relevante que permita, entre otras cosas, establecer relaciones matemáticas e identificar tendencias y patrones. Con el desarrollo de esta competencia, se espera que un estudiante utilice coherentemente registros como el simbólico, el de lengua natural, el gráfico y todos aquellos que se dan en situaciones que involucran las matemáticas. (p. 27).

Es decir, estudiar la relación existente entre la teoría de las representaciones matemáticas diseñada por Duval (2017), en la cual se basó la investigación y la enseñanza - aprendizaje con base en las competencias que exige la educación actual es, sin duda, de suma importancia para orientar a los docentes en la forma de enseñar. La reflexión en torno a estos aspectos tan relevantes y necesarios resultará en un gran aporte tanto para la comunidad educativa de colegios como de universidades.

Duval (2017) afirma: “La discriminación de las unidades significantes propias a cada registro debe ser el objeto de un aprendizaje específico. Tal discriminación es la condición necesaria para toda actividad de conversión” (p.113). Esto representa un papel fundamental a la hora de resolver problemas con ecuaciones lineales ya que, al conocer las características propias de cada registro y su correspondencia, el educando comprende la utilidad de realizar las operaciones cognitivas y cómo éstas contribuyen a la resolución de los problemas en los diferentes contextos.

La investigación presenta puntos clave con relación a la parte semiótica cognitiva cuando los estudiantes aprenden la resolución de problemas con ecuaciones lineales; sin embargo, es importante aprovechar estos puntos de reflexión y aterrizarlos a los lineamientos estructurales de planeación que exige el MEN (2006), como las competencias, desempeños, niveles de desempeño y evidencias de aprendizaje, con el fin de que su aporte repercuta significativamente en la construcción de estrategias de enseñanza pertinentes a la hora de enseñar.

Una recomendación importante para los docentes que deseen poner en práctica los resultados obtenidos en el presente trabajo, es que puedan aportar, desde su experiencia, al enriquecimiento de los aspectos aquí mencionados, en aras de mejorar su práctica pedagógica.

Aplicar la propuesta de enseñanza presentada en la investigación de forma similar en otras instituciones

educativas y hacer un análisis comparativo entre los resultados obtenidos, contribuiría a retroalimentar la estructura y funcionalidad de la investigación.

5. Conclusiones

Un error común en el cual incurrir muchos docentes a la hora de enseñar ecuaciones lineales con una incógnita, tiene que ver con la idea equivocada de que los estudiantes lograrán espontáneamente los procesos cognitivos necesarios para desarrollar la competencia de resolución de problemas. Lacroix (1820, citado por Duval, 2002) plantea que desde años atrás se viene utilizando por parte de los docentes e, incluso se evidencia en los libros de texto, una forma sistemática de enseñar la ecuación lineal, con un procedimiento obsoleto que poco y nada contribuye a que los estudiantes alcancen un aprendizaje significativo con relación a la utilización de la ecuación lineal en la resolución de problemas.

Según Duval (2002), los docentes que enseñan la ecuación lineal, generalmente inician su cátedra señalando las características más relevantes del concepto; luego se centran en los procesos algorítmicos (tratamientos) para resolver ecuaciones y, por último, realizan una serie de ejemplos de resolución de problemas en los cuales se evidencia conversiones entre registros de representación; por ejemplo, entre el registro de la lengua natural y la escritura algebraica. El problema radica en que después de esto, les presentan a los estudiantes problemas para que ellos se enfrenten a su resolución, con la idea de que después de los múltiples ejemplos ofrecidos y la ejercitación realizada, estarán dotados de elementos suficientes para ser competentes en la resolución de problemas. Sin embargo, la realidad es otra: los múltiples estudios acerca de las dificultades y los errores en el desempeño escolar de los estudiantes cuando asimilan la resolución de problemas con ecuación lineal, muestran que tanto la didáctica de algunos docentes como los libros de texto que presentan propuestas de enseñanza para lograr este fin, realmente han fracasado.

Otro aspecto importante que se debe tener en cuenta a la hora de abordar el estudio con ecuaciones lineales, es la explicitación de unidades significantes y su respectiva correspondencia, paso obligado antes de que los estudiantes realicen las actividades cognitivas de re-designación y explicitación de la relación de equivalencia.

Es importante concientizar al educando acerca de las partes en las cuales se puede segmentar cada

registro de representación y cómo cada una de éstas, está relacionada con su representación equivalente en el otro registro. Esto llevará a identificar el grado de correspondencia que tienen las representaciones de cada registro y cómo esto influye en gran manera en el nivel de complejidad de los problemas a resolver.

Los docentes deben considerar que la actividad cognitiva de conversión no es espontánea y no se genera por la repetición de diferentes ejemplos; lo que debe buscar al trabajar con ecuaciones,

es que los estudiantes entiendan que un objeto matemático se puede expresar desde diferentes registros de representación y que cada registro está dotado de unas características y reglas que permiten visualizar un mismo concepto desde sus diferentes perspectivas; y que cada perspectiva abre un camino a la aplicación del concepto en diferentes contextos; solo así, el aprendizaje obtenido por el estudiante cobrará sentido y ayudará a desarrollar la competencia de resolución de problemas con ecuaciones lineales.

6. Conflicto de intereses

La autora de este artículo declara no tener ningún tipo de conflicto de intereses sobre el trabajo presentado.

Referencias

- Azañero, L.M. (2013). *Errores que presentan los estudiantes de Primer grado de secundaria en la resolución de problemas con ecuaciones lineales* (Tesis de Maestría). Universidad Católica del Perú, Perú. <http://hdl.handle.net/20.500.12404/5064>
- Duval. R. (2002). Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. funes.uniandes.edu.co > ...
- Duval. R. (2017). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales*. Editorial Universidad del Valle.
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación* (6.ª ed.). McGraw-Hill / Interamericana Editores, S.A. de C.V.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden*. Ministerio de Educación Nacional.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2019-2). *Guía de orientación Saber 11.º. 2019-2*. Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación, ICFES.
- Rojas Garzón, P.J. y Vergel Causado, R. (2013). Procesos de Generalización y Pensamiento Algebraico. *Educación Científica y Tecnológica, Edición especial*, 760-766.