CRECIMIENTO Y REDISTRIBUCION. SOLUCION COOPERATIVA

María José Macarro Heredia

RESUMEN.—Concretando para una tecnología del tipo Cobb-Douglas las modificaciones introducidas por Kaitala y Pohjola al modelo de Lancaster, este trabajo estudia la solución cooperativa del modelo planteado determinando las estrategias eficientes de Pareto en todas las situaciones en relación con el peso de cada uno de los jugadores, trabajadores o capitalistas, en la cooperación.

1. INTRODUCCION

Desde la publicación del libro de von Neumann y Morgensten *The Theory of Games and Beavior* en 1994 muchos han sido los autores que se han servido de la teoría de juegos para representar una amplia gama de situaciones de conflicto dinámico en el campo de la administración y de la teoría económica, sin embargo, podemos considerar el trabajo de Lancaster sobre la *Ineficiencia del Capitalismo* (1973) como la primera referencia en la aplicación de los juegos diferenciales a la modelización de la distribución y el crecimiento en las modernas sociedades industriales. En su modelo K. Lancaster considera un juego diferencial de suma no nula entre trabajadores y capitalistas en el que los dos agentes económicos intentan obtener el mayor consumo sobre un mismo horizonte temporal de amplitud finita. A partir de este momento numerosos autores han introducido modificaciones al modelo de Lancaster con el fin de rebatir su tesis o contrastarla bajo otras hipótesis. El trabajo de Pohjola M. (1985) introduce como elemento innovador el factor trabajo y analiza soluciones cooperativas y no cooperativas para una economía de pleno empleo. Gradus R. (1988) plantea el modelo de Lancaster bajo otra perspectiva. En este trabajo los jugadores son, las empresas, que tratan de maximizar los dividendos y el gobierno, que intenta optimizar la utilidad del gasto. Gradus compara las soluciones en ciclo abierto de Nash y Stackelberg y las soluciones eficientes de Pareto obtenidas bajo distintas hipótesis. Otros autores inciden directamente sobre la tesis de Lancaster. En este sentido Seierstad A. (1993) introduciendo un nuevo control para los trabajadores construye una estrategia de amenaza que permite resultados eficientes en una situación no cooperativa.

La versión que Kaitala y Pohjola (1990) proponen del modelo de Lancaster introduce una diferencia fundamental sobre los planteamientos originales, la posibilidad de una forma de redistribución de la renta. Apoyándonos en este trabajo y considerando una función de producción de tipo Cobb-Douglas planteamos un juego diferencial de suma no nula entre trabajadores y capitalistas que como en planteamientos anteriores intentan maximizar sus consumos.

En los juegos bipersonales de suma no nula se presentan a la vez elementos competitivos y elementos cooperativos y los intereses de los jugadores, en parte son opuestos y en parte complementarios. En nuestro juego, trabajadores y capitalistas coinciden en su pretensión de que el capital tenga el mayor crecimiento posible, sin embargo, los trabajadores intentarán establecer una mayor carga impositiva sobre la remuneración de los capitalistas porque ésta revertirá en un mayor grado de bienestar social y de esta forma se potenciará su consumo. Los capitalistas, en cambio, no desean ver como se reduce su remuneración por su participación en el capital porque ésto influirá negativamente en su consumo. Aunque ambos jugadores compiten en estos términos, son conscientes de que deben conjugar sus intereses para conseguir un stock de capital en la economía que les permita alcanzar, al menos, unos niveles de consumo aceptables para ambos.

El grado de comunicación que pueda haber entre los participantes tiene en este caso gran influencia en el resultado del juego, sin embargo, la importancia de la comunicación en este sentido, está en función de la componente cooperativa del juego.

Suponemos entonces que los jugadores se unen formando un equipo para buscar la solución óptima del juego, es decir resolveremos un problema en el que habrá que optimizar un único funcional objetivo global integrado por los funcionales objetivos de cada uno de los jugadores. Sin embargo, es posible que la posición de poder de cada uno de ellos en la coalición no sea la misma. Esta circunstancia también debe quedar reflejada en el problema cooperativo: el funcional objetivo de cada uno de los jugadores va acompañado de una ponderación $\lambda \in (0, 1)$ que representa el peso de cada uno de ellos en el proceso negociador.

En este trabajo resolvemos el problema para cualquier valor de λ en el intervalo $(0, 1)$ estudiando de esta forma la solución cooperativa cualquiera que sea la situación de cada uno de los jugadores: desde el dominio de uno u otro, hasta la igualdad entre ambos.

2. EL MODELO

Como en el modelo de Lancaster consideramos dos agentes económicos, trabajadores y capitalistas, que tratan de maximizar su consumo en un horizonte temporal finito T que supondremos suficientemente amplio. Si la relación tecnológica entre el output y los factores productivos es del tipo Cobb-Douglas, $Y = F(K, L) = K^{\alpha}L^{1-\alpha}$, donde K y L son respectivamente capital y trabajo, siendo $0 < \alpha < 1$, podemos expresar el ratio capital-output a través de la expresión $y(t) = f(k(t)) = k(t)^{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, donde $k(t)$ es el ratio capital-trabajo. La función $f(k(t))$ cumple las condiciones usuales:

$$f'(0) = \infty, f'(k(t)) > 0, f'(\infty) = 0 \text{ y } f''(k(t)) < 0$$

Supondremos, como en el modelo de Kaitala y Pohjola (1990) que los trabajadores pueden detraer parte de la renta de los capitalistas. Estos, que son retribuidos por su participación marginal, verán dicha retribución disminuida en la porción absorbida por los trabajadores. Si llamamos $x(t)$ a esta variable, la retribución de los capitalistas puede expresarse por $ak(t)^{\alpha} - x(t)$ que será estrictamente positiva si $x(t)$ satisface la siguiente restricción $0 \leq s(t) \leq \beta \, \alpha k(t)^{\alpha}$ siendo $0 < \beta < 1$. Debido a esta última condición queda eliminada la posibilidad de que los trabajadores absorban totalmente la remuneración de los capitalistas dejando a éstos al margen en la toma de decisiones. El consumo de los capitalistas por lo tanto, en función del porcentaje de ahorro $s(t)$ es en cualquier instante t, $c_c(t) = (1 - s(t)) [\alpha k(t)^{\alpha} - x(t)]$. Los trabajadores consumen la porción restante, $c_w(t) = (1 - \alpha) k(t)^{\alpha} + x(t)$. Sobre el horizonte temporal T los jugadores habrán de maximizar los siguientes funcionales:

$$J_c(t) = \int_0^T (1 - s(t)) [\alpha k(t)^{\alpha} - x(t)]dt, \; J_w(t) = \int_0^T [(1 - \alpha)k(t)^{\alpha} + x(t)]dt$$

para capitalistas y trabajadores respectivamente, disponiendo cada uno de ellos de una variable de control, $s(t)$, $0 \leq s(t) \leq 1$ para los primeros y $x(t)$, $0 \leq x(t) \leq \beta \, \alpha k(t)^{\alpha}$ para los segundos.

Cada problema estará sujeto a la ecuación de crecimiento del capital que podemos expresar en función de $k(t)$, $\dot{k}(t) = s(t) [ak(t)^{\alpha} - x(t)]$ siendo $k(0) = k_0 > 0$.

Queda así planteado el juego diferencial bipersonal de suma no nula entre trabajadores y capitalistas.

En adelante prescindiremos de la dependencia de las variables con respecto al tiempo para simplificar la notación.

3. LAS SOLUCIONES EFICIENTES DE PARETO

Para obtener la solución cooperativa del juego debemos considerar la combinación convexa de los funcionales objetivo.

$$\lambda J_w + (1 - \lambda)J_c$$

donde $\lambda \in [0, 1]$ representa la fuerza relativa asignada a cada uno de los jugadores en el proceso negociador. Debemos resolver un problema de control planteado en los siguientes términos:

$$\max_{\substack{0 \le x \le \beta\alpha k^\alpha \\ 0 \le s \le 1}} \quad \lambda J_w + (1 - \lambda)J_c = \int_0^T \{\lambda[(1-\alpha)k^\alpha + x] + (1+\lambda)(1-s)(\alpha k^\alpha - x)\}dt$$

$$s.a. \quad \dot{k} = s(\alpha k^\alpha - s), \quad k(0) = k_0 > 0$$

cuya solución quedará expresada en función de los valores que λ pueda tomar en el intervalo $[0, 1]$.

Si llamados H al hamiltoniano asociado a este problema.

$$H(k, \varphi, x, s) = \lambda[(1-\alpha)k^\alpha + x] + (1+\lambda)(1-s)(ak^\alpha - x) + \varphi s(\alpha k^\alpha - x)$$

siendo φ la variable de coestado asociada a la ecuación de evolución dinámica del capital. Las condiciones necesarias del principio del máximo nos permiten determinar los valores admisibles para los controles de los jugadores así como las condiciones que garantizan su existencia:

Para $x = 0$ será $s = 0$ si $\lambda \le \frac{1}{2}$, $\varphi \le 1 - \lambda$, $s \in (0, 1)$ si $\lambda \le \frac{1}{2}$, $\varphi = 1 - \lambda$ y $s = 1$ si $\varphi \ge máx\,\{\lambda,(1, \lambda)\}$. Para $x \in (0, \beta\alpha k^\alpha)$ será $s = 0$ si $\lambda = \frac{1}{2}$, $\varphi \le \frac{1}{2}$; $s \in (0, 1)$ si $\lambda = \frac{1}{2}$ $\varphi = \frac{1}{2}$ y $s = 1$ si $\lambda \ge \frac{1}{2}$, $\varphi = \lambda$. Por último, para $x = \beta\alpha k^\alpha$ será $s = 0$ si $\lambda \ge \frac{1}{2}$, $\varphi \le 1 - \lambda$; $s \in (0, 1)$ si $\lambda \ge \frac{1}{2}$, $\varphi = 1 - \lambda$ y $s = 1$ si $\lambda \ge \frac{1}{2}$, $1 - \lambda \le \varphi \le \lambda$.

Dada la dependencia de los resultados obtenidos con respecto a los valores de λ, a partir de ahora consideramos las siguientes posibilidades para los valores de λ, $\frac{1}{2} < \lambda < 1$, es decir, los trabajadores imopondrán su criterio en la negociación, $\lambda = \frac{1}{2}$ cuando ambos jugadores negocian con la misma fuerza y $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ en el caso en que los capitalistas tienen más poder que los trabajadores para imponer sus criterios. Debido a la importancia de cada una de estas situaciones, dedicaremos a cada una de ellas un apartado en el desarrollo de este trabajo.

3.1. Preferencia para los trabajadores

Cuando $\lambda > \frac{1}{2}$, desde los resultados obtenidos en el epígrafe anterior, observamos que sólo podemos considerar como políticas posibles $x = 0$, $s = 1$ para la que $\varphi \geq \lambda, \dot{k} = \alpha k^{\alpha}$; $x \in (0, \beta\alpha k^{\alpha})$, $s = 1$ con $\varphi = \lambda, \dot{k} = \alpha k^{\alpha} - x$ y $x = \beta\alpha k^{\alpha}$ con todos los valores posibles del control s: para $s = 0$ siendo $\varphi \leq 1 - \lambda, \dot{k} = 0$; para $s \in (0, 1)$ con $\varphi = 1 - \lambda, \dot{k} = s(1 - \beta)\, ak^{\alpha}$ o para $s = 1$ siendo $1 - \lambda \leq \varphi \leq \lambda$ y $\dot{k} = (1 - \beta)\, \alpha k^{\alpha}$.

En este caso la variable de coestado debe cumplir:

$$\dot{\varphi} = -\frac{\partial L}{\partial k} = -\lambda(1 - \alpha)\alpha k^{\alpha-1} - (1 - \lambda)(1 - s)\,\alpha^2 k^{\alpha-1} - \varphi s \alpha^2 k^{\alpha-1} - \alpha_1 \beta\alpha^2 k^{\alpha-1}$$

con la condición terminal $\varphi(T) = 0$, siendo α_1 el multiplicador de Kuhn-Tucker asociado a la restricción $x \leq \beta\alpha k^{\alpha}$ y por lo tanto debe cumplir $\alpha_1[\beta\alpha k^{\alpha} - x] = 0$. Las políticas $x \in (0, \beta\alpha k^{\alpha})$, $s = 1$ no pueden darse pues $\varphi = \lambda$, pero en este caso $\alpha_1 = 0$ y se debe cumplir la ecuación diferencial $\varphi = -\alpha[\lambda(1 - \alpha) + \varphi\alpha]k^{\alpha-1}$ cuya solución es distinta de cero.

Tampoco es posible la situación $x = \beta\alpha k^{\alpha}$ $s \in (0, 1)$ por la misma razón, $\varphi = 1 - \lambda$ pero $\dot{\varphi} = -\alpha[\lambda(1 - \alpha) + (1 - \lambda)(1 - s)\alpha + \varphi s\alpha + (2\lambda - 1)\beta\alpha]k^{\alpha-1} \not\equiv 0$.

Luego, en este caso las políticas admisibles son: $s = 0$ $s = 1$, $x = \beta\alpha k^{\alpha}$ $s = 0$ y $x = \beta\alpha k^{\alpha}$ $s = 1$.

La única política que puede ser terminal, en función de la condición $\varphi(T) = 0$, es $x = \beta\alpha k^{\alpha}$ $s = 0$ ya que $\varphi \leq 1 - \lambda$ permite esta condición en el instante T.

Supongamos que esta política se mantiene hasta un instante $t_1 < T$ en el que $\varphi(t_1) = 1 - \lambda$, a partir de este momento los capitalistas pasan de $s = 0$ a $s = 1$, manteniendo los trabajadores el valor de su control en $x = \beta\alpha k^{\alpha}$. Durante un intervalo $(t_2, t_1]$ seguirán las políticas $x = \beta\alpha k^{\alpha}$ $s = 1$ y en t_2 son los trabajadores los que pasan de $x = \beta\alpha k^{a}$ a $x = 0$ manteniendo los capitalistas su tasa de ahorro $s = 1$. En t_2 debe ser, por tanto, $\varphi(t_2) = \lambda$.

La evolución del ratio k_t en los subintervalos obtenidos es la siguiente: En $[0, t_2]$ $k_{t_2}^{1-\alpha} = k_0^{1-\alpha} + \alpha(1 - \alpha)t_2$ y desde t_2 hasta t_1, $k_{t_1}^{1-\alpha} = k_0^{1-\alpha} + \alpha(1 - \alpha)(1 - \beta)(t_2 - t_1)$. Por último, en $(t_1, T]$ el ratio de capital es constante, $\dot{k} = 0$, y su valor será el alcanzado en t_1, k_{t_1}. Integrando la ecuación diferencial correspondiente a la variable de coestado en el intervalo final $(t_1, T]$ con las condiciones $\varphi(t_1) = 1 - \lambda$, $\varphi(T) = 0$ obtenemos la amplitud de este intervalo:

$$T - t_1 = \frac{1 - \lambda}{\alpha[\lambda - \alpha(1 - \beta)(2\lambda - 1)]}\, k_{t_1}^{1-\alpha}$$

y en el período $(t_2, t_1]$, a través de la solución de la ecuación diferencial $\dot{\varphi} = -[\lambda(1 - \alpha + \alpha\beta) + \varphi\alpha(1 - \beta)]\alpha k^{\alpha-1}$ con las condiciones $\varphi(t_1) = 1 - \lambda$, $\varphi(t_2) = \lambda$ obtenemos una relación entre los capitales alcanzados en t_1 y t_2 solamente en función de los parámetros del modelo y la ponderación λ:

$$k_{t_2}^{\alpha} k_{t_1}^{-\alpha} = \frac{\lambda[1 - \alpha(1 - \beta)] + \alpha(1 - \beta)(1 - \lambda)}{\lambda}$$

Las relaciones obtenidas nos permiten expresar t_1, t_2, k_{t_1}, k_{t_2} en función del capital inicial, el instante final y los parámetros α y β:

$$t_2 = \frac{1 - \beta}{2 - \beta - ab^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}} T + \frac{ab^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - 1}{2 - \beta - ab^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}} k_o^{1-\alpha}$$

$$t_1 = \frac{(1 - \lambda)b^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}{\alpha[\lambda - \alpha(1 - \beta)(2\lambda - 1)]} \left\{ \frac{[1 + \alpha(1 - \alpha)](ab^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - 1)}{2 - \beta - ab^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}} k_o^{1-\alpha} + \frac{\alpha(1 - \alpha)(1 - \beta)}{2 - \beta - ab^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}} T \right\}.$$

$$k_{t_2}^{1-\alpha} = b \frac{[1 + \alpha(1 - \alpha)](ab^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - 1)}{2 - \beta - ab^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}} k_o^{1-\alpha} + \frac{\alpha(1 - \alpha)(1 - \beta)}{2 - \beta - ab^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}} T$$

$$k_{t_1}^{1-\alpha} = b^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \frac{[1 + \alpha(1 - \alpha)](ab^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - 1)}{2 - \beta - ab^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}} k_o^{1-\alpha} + \frac{\alpha(1 - \alpha)(1 - \beta)}{2 - \beta - ab^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}} T$$

siendo $a = 1 - \dfrac{(1 - \alpha)(1 - \beta)}{\lambda - \alpha(1 - \beta)(2\lambda - 1)}$, $b = \dfrac{\lambda}{\lambda[1 - \alpha(1 - \beta)] + \alpha(1 - \beta)(1 - \lambda)}$

Las condiciones necesarias de este problema son también suficientes, pues se satisfacen todas las hipótesis propuestas por Kamien M. I. y Schwartz N. L. (1981) en la página 220.

Las políticas óptimas para $\lambda > \dfrac{1}{2}$ pueden representarse según el siguiente esquema:

0	t_2	t_1	T
$x = 0$	←----------- $x = \beta\alpha k^{\alpha}$ ------------------------→		
←---------------- $s = 1$ ------------→		$s = 0$	

Si esta estrategia es considerada en los funcionales de ambos jugadores, los trabajadores, obtendrán un valor del juego:

$$J_w = \frac{-\beta}{\alpha(1-\beta)} k_{t_2} + \frac{1-\alpha(1-\beta)\,[2\lambda(1-\alpha+a\beta)+a(1-\beta)+\beta(1-\lambda)]}{\alpha(1-\beta)\,[\lambda-\alpha(1-\beta)(2\lambda-1)]} k_{t_1} - \frac{1-\alpha}{\alpha} k_0$$

y los capitalistas

$$J_c = \frac{(1-\lambda)\,(1-\beta)}{\lambda-\alpha(1-\beta)\,(2\lambda-1)} k_{t_1}$$

El par (J_w, J_c) obtenido será un punto de la frontera de Pareto para cada $\lambda > \frac{1}{2}$ fijo. Si hacemos que λ recorra el intervalo $(\frac{1}{2}, 1)$ obtendremos un subconjunto de la frontera de Pareto. En particular para $\lambda = 1$, realizando un razonamiento semejante al caso analizado, se obtiene la estrategia óptima:

0	t_2	T
$x = 0 \quad s = 1$	$x = \beta\alpha k^{\alpha} \quad s = 1$	

proporcionando a los jugadores unos valores para sus funcionales objetivo:

$$J_w = -\frac{\beta}{\alpha(1-\beta)} k_{t_2} + \frac{1-\alpha(1-\beta)}{\alpha(1-\beta)} k_T - \frac{1-\alpha}{\alpha} k_0$$

para los trabajadores y

$$J_c = 0$$

para los capitalistas.

En este caso , el par (J_w, J_c) nos indica uno de los extremos de la frontera de Pareto como veremos más adelante.

3.2. Preferencia para los capitalistas

Estudiamos ahora la posibilidad de que los capitalistas tengan mayor fuerza relativa en la negociación cuando ambos jugadores actúan cooperativamente. Esta situación se corresponde con el intervalo $(0, \frac{1}{2})$ para la ponderación λ.

En este caso sólo son admisibles las políticas $x = 0, s = 0$ y $x = 0, s = 1$ ya que $x = 0, s \in (0, 1)$ no puede darse por el comportamiento de la variable de coestado φ. Sólo puede ser terminal la primera, que exige $\varphi \leq 1 - \lambda$ y por lo tanto permite el cumplimiento de la condición terminal $\varphi(T) = 0$.

Debido a que las condiciones necesarias son también suficientes, la estrategia óptima se desarrollará de la siguiente forma:

En $(t_1, T]$ las políticas son $x = 0 \quad s = 0$, manteniéndose en este intervalo el capital constante en el nivel alcanzado en t_1, $k_t = k_{t_1} = k_T$ ya que, para estos valores de los controles x y s, es $\dot{k} = 0$. En $[0, t_1]$, integrando la ecuación $\dot{k} = \alpha k^{\alpha}$ con $k(0) = k_0 > 0$ correspondiente a las políticas $x = 0 \quad s = 1$ obtenemos el valor del capital alcanzado en t_1:

$$k_{t_1}^{1-\alpha} = k_0^{1-\alpha} + \alpha(1 - \alpha)t_1$$

Como en los casos anteriores, de las condiciones exigidas a la variable de coestado φ en ambos subintervalos, obtendremos la expresión del momento t_1 de cambio. En $(t_1, T]$ es $\dot{\varphi} = -[\lambda + \alpha(1 - 2\lambda)]\ \alpha k^{\alpha-1}$. Integrando esta ecuación diferencial desde t_1 hasta T con las condiciones $\varphi(t_1) = 1 - \lambda$, $\varphi(T) = 0$ obtenenos:

$$T - t_1 = \frac{1 - \lambda}{[\lambda + \alpha(1 - 2\lambda)]\alpha} k_{t_1}^{1-\alpha}$$

La solución óptima en este caso suprime del modelo la existencia de una tasa de redistribución y prácticamente impide a los trabajadores tomar alguna decisión en el desarrollo del juego. Todo esto nos lleva a pensar que en cualquiera de las situaciones estudiadas, incluso en las más desfavorables para los capitalistas, éstos gozan de una posición privilegiada en la toma de decisiones con respecto a los trabajadores, cualquiera que sea la forma en que se desarrolle el juego.

Los consumos de los jugadores en este caso son:

$$J_w = \frac{[1 + \alpha(1 - 2\lambda)](1 - \alpha)}{[\lambda + \alpha(1 - 2\lambda)]\alpha}[\alpha(1 - \alpha)\frac{\lambda + \alpha(1 - 2\lambda)}{1 - \lambda\alpha}T + \frac{\alpha(1 - 2\lambda)}{1 - \lambda\alpha}k_o^{1-\alpha}]^{\frac{1}{1-\alpha}} - \frac{1 - \alpha}{\alpha}k_0$$

para los trabajadores, y

$$J_c = \frac{(1 - \lambda)}{\lambda + \alpha(1 - 2\lambda)}[\alpha(1 - \alpha)\frac{\lambda + \alpha(1 - 2\lambda)}{1 - \lambda\alpha}T + \frac{\alpha(1 - 2\lambda)}{1 - \lambda\alpha}k_o^{1-\alpha}]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Gráficamente esta situación quedaría representada por:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & & t_1 & & T \\ \vdash & \multicolumn{3}{c}{\text{———————————————}} & \dashv \\ & s = 1 & & s = 0 & \\ & & x = 0 & & \end{array}$$

Si volvemos a analizar otra situación extrema, en este caso $\lambda = 0$, la estrategia óptima sería:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & & t_1 & & T \\ \vdash & \multicolumn{3}{c}{\text{———————————————}} & \dashv \\ & x = 0 \quad s = 1 & & x = 0 \quad s = 0 & \end{array}$$

y el valor del juego para trabajadores y capitalistas, respectivamente, es:

$$J_w = \frac{1 - \alpha^2}{\alpha^2}\,[\alpha^2(1 - \alpha)\,T + \alpha k_o^{1-\alpha}]^{\frac{1}{1-\alpha}} - \frac{1 - \alpha}{\alpha}\,k_0$$

$$J_c = \frac{1}{\alpha}\,[\alpha^2(1 - \alpha)\,T + \alpha k_o^{1-\alpha}]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

siendo t_1, $t_1 = \alpha\,T - \dfrac{1}{\alpha}\,k_o^{1-\alpha}$

El par (J_w, J_c) representará, como veremos, el otro extremo de la frontera de Pareto.

3.3. El óptimo social

Trabajadores y capitalistas, al menos desde el punto de vista teórico, tienen la misma fuerza relativa en la negociación. Consideramos para la ponderación λ el valor $\lambda = \dfrac{1}{2}$, por lo tanto debemos resolver el problema:

$$\max_{\substack{0 \leq x \leq \beta\alpha k^{\alpha} \\ 0 \leq s \leq 1}} \; \frac{1}{2}J_w + \frac{1}{2}J_c$$

$$s.a.\ \dot{k} = s(\alpha k^{\alpha} - x),\ k(0) = k_0 > 0$$

Podemos obtener, desde el planteamiento general del problema propuesto al principio de este capítulo, los valores posibles para los controles de los jugadores y las condiciones que garantizan el cumplimiento de las condiciones necesarias.

Haciendo $\lambda = \frac{1}{2}$ obtenemos: $x \in [0, \beta\alpha k^{\alpha}]$, $s = 0$ si $\varphi \leq \frac{1}{2}$; $x \in [0, \beta\alpha k^{\alpha}]$, $s \in (0, 1)$ si $\varphi = \frac{1}{2}$; $x = 0$, $s = 1$ si $\varphi \geq \frac{1}{2}$ y $x \in [0, \beta\alpha k^{\alpha}]$, $s = 1$ si $\varphi = \frac{1}{2}$.

La variable de coestado φ en este caso debe cumplir:

$$\dot{\varphi} = -\frac{\partial L}{\partial k} = -\alpha k^{\alpha-1}\left[\frac{1}{2}(1-\alpha) + \frac{1}{2}(1-s)\alpha + \varphi s\alpha\right]$$

además de la condición $\varphi(T) = 0$.

Es fácil ver que las políticas admisibles son únicamente $x \in [0, \beta\alpha k^{\alpha}]$, $s = 0$ y $x = 0$, $s = 1$ ya que en cualquiera de los otros casos se llega a una contradicción: Si $x \in [0, \beta\alpha k^{\alpha}]$, $s \in (0, 1)$, entonces $\varphi = \frac{1}{2}$ pero $\dot{\varphi} = -\frac{1}{2}\alpha k^{\alpha} \neq 0$ y si $x \in (0, \beta\alpha k^{\alpha}]$, $s = 1$, como antes, φ toma el valor $\frac{1}{2}$ y sin embargo $\dot{\varphi} = -\frac{1}{2}\alpha k^{\alpha} \neq 0$

En el instante final T la única política que permite que se cumpla la condición de transversalidad $\varphi(T) = 0$ es $s = 0$ ya que en este caso $\varphi \leq \frac{1}{2}$ Si suponemos que esta política se mantiene durante el intervalo final $(t_1, T]$, en este período el capital será constante $k_t = k_{t_1} = k_T$. Resolviendo la ecuación $\dot{\varphi} = -\frac{1}{2}\alpha k^{\alpha}$ con la condición $\varphi(T) = 0$ obtenemos:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\alpha k_{t_1}^{\alpha-1}(T-t) \qquad \forall t \in (t_1, T]$$

Puesto que $\dot{\varphi} \leq 0$, $\varphi(t)$ es decreciente y por lo tanto habrá un intervalo inicial $[0, t_1]$ en el que $\varphi \geq \frac{1}{2}$, siendo $\varphi(t_1) = \frac{1}{2}$. En $[0, t_1]$ los trabajadores juegan con $x = 0$ y los capitalistas con $s = 1$.

Integrando la ecuación dinámica del capital en $[0, t_1]$ con la condición inicial $k(0) = k_0$ obtenemos: $k_{t_1}^{1-\alpha} = k_0^{1-\alpha} + \alpha(1-\alpha)t_1$ expresión que con el valor de la variable de coestado en el momento de cambio nos permite determinar el momento t_1:

$$t_1 = \frac{1}{2-\alpha}\left(T - \frac{1}{\alpha}k_0^{1-\alpha}\right).$$

en función del instante final, el capital inicial y los parámetros del modelo. Como en otras situaciones este instante crecerá cuando se considere un horizonte temporal más amplio, pero decrecerá si el stock de capital inicial es mayor.

En esta situación, que representamos gráficamente a continuación:

0 ——————— t_1 ——————— T

$x = 0 \quad s = 1 \qquad x \in [0, \beta\alpha k^{\alpha}] \quad s = 0$

no podemos obtener un valor concreto para los funcionales objetivo de los jugadores, porque éstos estarían en función del control que utilizasen los trabajadores en el período final, sin embargo podemos establecer la relación que existe entre ellos a través de la recta $J_w + J_c = cte$, del plano (J_w, J_c).

$$J_w + J_c = \frac{2-\alpha}{\alpha}\left[\frac{\alpha(1-\alpha)}{2-\alpha}T + \frac{1}{2-\alpha}k_0^{1-\alpha}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} - \frac{1-\alpha}{\alpha}k_0$$

Esta última expresión representa el pago que los jugadores reciben cuando juegan formando un equipo en el que ninguno de ellos ostenta una situación privilegiada sobre el otro. Surge de inmediato la cuestión de si esta cuantía es mejorable. Analizaremos esta cuestión determinando los elementos de la frontera de Pareto.

3.4. La frontera de Pareto

Hemos estudiado la solución del juego cuando ambos jugadores cooperan, desde la posición predominante de cada uno de los jugadores hasta la situación de igualdad para ambos. Es decir, recorriendo todos los posibles valores de λ en el intervalo $(0, 1)$, hemos obtenido la solución cooperativa del juego. Vamos a estudiar ahora qué sucede con la solución óptima a medida que λ se desplaza dentro del intervalo $(0, 1)$ y qué relaciones obtenemos entre las estrategias óptimas de cada uno de los casos considerados para λ en los apartados anteriores. Veremos que estas relaciones nos permiten delimitar en el plano un conjunto de puntos en el que están contenidos los funcionales objetivos que los jugadores pueden obtener cuando, cualquiera que sea la ponderación utilizada, su forma de jugar es cooperativa. Este conjunto de puntos es la frontera de Pareto y representa todas las soluciones que cumpliendo las condiciones de optimalidad de Pareto son óptimas para algún valor de la ponderación λ. Así, si (J_w, J_c) es par de funcionales objetivo a que conduce una estrategia obtenida a través de algún criterio de optimalidad o mediante otro procedimiento y, para algún λ con par asociado $(J_w^{\lambda}, J_c^{\lambda})$ se verifica $J_w \geq J_w^{\lambda}$ o $J_c \geq J_c^{\lambda}$ entonces $J_w = J_w^{\lambda}$ y $J_c = J_c^{\lambda}$.

En primer lugar compararemos las soluciones del juego obtenidas para $\frac{1}{2} < \lambda < 1$ y para $\lambda = \frac{1}{2}$. Veremos como evoluciona la solución del juego cuando el papel de los trabajadores en la negociación pasa desde la situación más privilegiada hasta la situación de igualdad con respecto al otro jugador.

Si partiendo de la solución óptima del juego cuando $\lambda \in (\frac{1}{2}, 1)$ supo- obtenemos que $\lambda \to \frac{1}{2}$ obtenemos $k_{t_2}^{\alpha} k_{t_1}^{-\alpha} = 1$, por lo tanto los instantes t_2 y t_1 coinciden y la amplitud del intervalo $(t_1, T]$ quedaría expresada por:

$$T - t_1 = \frac{1}{\alpha} k_{t_1}^{1-\alpha}$$

Si llamamos t^* al único momento de cambio que nos proporciona esta situación, vemos que coincide con el momento de cambio obtenido para la solución óptima en el caso $\lambda = \frac{1}{2}$. La relación que existe entre este instante y los momentos de cambio t_1 y t_2 obtenidos en la preferencia a los trabajadores es $T - t^* > T - t_1$ luego $t^* < t_1$. Esto quiere decir que cuando $\lambda \to \frac{1}{2}$ desde valores de λ, $\lambda > \frac{1}{2}$ se produce el siguiente desplazamiento de los tiempos:

$$0 \qquad t_2 \dashrightarrow t^* \dashleftarrow t_1 \qquad T$$

Esta solución queda dentro de las posibilidades obtenidas para el óptimo social, ya que en este caso estaba permitido cualquier valor para el control x en el intervalo final.

Veamos que sucede cuando $\lambda \to 1$ en este mismo caso $\frac{1}{2} < \lambda < 1$. De las expresiones anteriores para los momentos de cambio y los capitales obtenemos:

$$T - t_1 = 0 \quad \text{y} \quad k_{t_2}^{\alpha} k_{t_1}^{-\alpha} = 1 - \alpha(1 - \beta)$$

es decir, el momento t_1, se confunde con el instante final. La segunda relación nos indica que en el último subintervalo del horizonte temporal el ratio de capital no permanece constante, lo que quiere decir que a los capitalistas no les está permitido utilizar el valor $s = 0$ para su control en todo el horizonte temporal.

Gráficamente podemos expresar la evolución de la solución óptima en los casos estudiados de la siguiente forma:

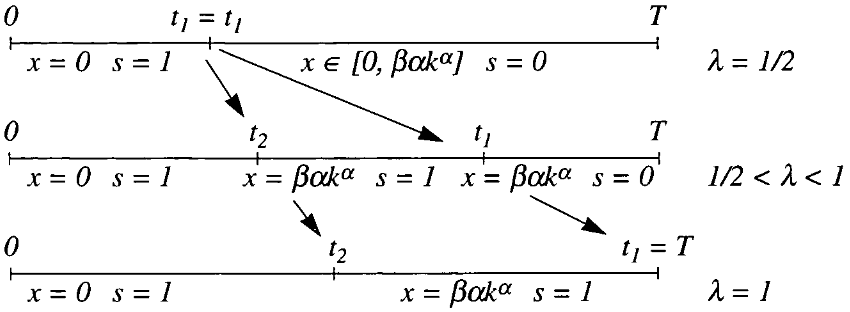

GRÁFICO 1

Veamos ahora como evoluciona la solución óptima en el caso en que $0 < \lambda < \dfrac{1}{2}$, cuando los capitalistas pasan desde la situación más privilegiada en la negociación, $\lambda = 0$ hasta la de igualdad con respecto al otro jugador, $\lambda = \dfrac{1}{2}$.

Si $\lambda \to \dfrac{1}{2}$, el momento $t_1 \to \dfrac{1}{2-\alpha}\,[T - \dfrac{1}{\alpha}\,k_0^{1-\alpha}]$ que corresponde al momento de cambio obtenido para $\lambda = \dfrac{1}{2}$ y que llamaremos t^*.

Si $\lambda \to 0$ el momento $t_1 \to \alpha T - \dfrac{1}{\alpha}\,k_0^{1-\alpha}$. Comparando los valores t^* y t_1 vemos que:

$$t_1 - t^* = -\frac{(\alpha-1)^2}{2-\alpha}\,T - \frac{1-\alpha}{\alpha(2-\alpha)}\,k_0^{1-\alpha} < 0 \text{ ya que } \frac{1-\alpha}{\alpha(2-\alpha)} > 0$$

Entonces $t_1 < t^*$ y por lo tanto $k_{t_1} < k_{t^*}$.

La evolución de la estrategia óptima correspondiente a los valores de $\lambda \in [0, \dfrac{1}{2}]$ está representada en el siguiente gráfico (gráfico 2).

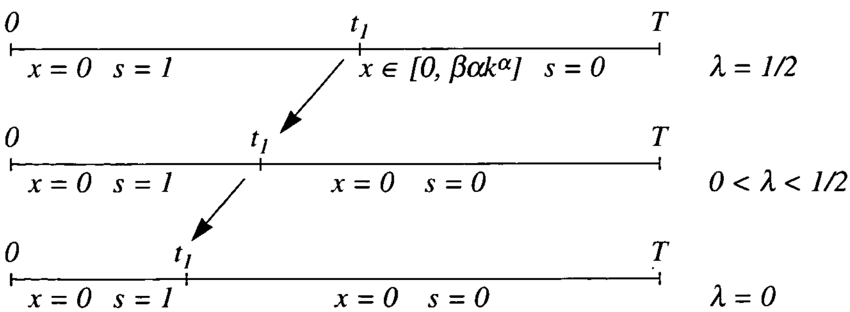

GRÁFICO 2

En cada una de las estrategias óptimas encontradas para los distintos valores de λ el comportamiento del capital es distinto, sin embargo para todas el ratio de capital es creciente en todo el horizonte temporal.

Por último, sin consideramos los consumos alcanzados por los jugadores correspondientes a cada uno de los casos estudiados tenemos:

Para $\lambda = 1$

$$J_w = -\frac{\beta}{\alpha(1-\beta)} k_{t_2} + \frac{1-\alpha(1-\beta)}{\alpha(1-\beta)} k_T - \frac{1-\alpha}{\alpha} k_0$$

$$J_c = 0$$

Llamaremos a este punto $(J_w, J_c)_1$.

Si $\lambda \to \frac{1}{2}$ para los valores de $\lambda > \frac{1}{2}$

$$J_w = \frac{2-\alpha(2-\beta)}{\alpha} [\frac{\alpha(1-\alpha)}{2-\alpha} T + \frac{1}{2-\alpha} k_0^{1-\alpha}]^{\frac{1}{1-\alpha}} - \frac{1-\alpha}{\alpha} k_0$$

$$J_c = (1-\beta) [\frac{\alpha(1-\alpha)}{2-\alpha} T + \frac{1}{2-\alpha} k_0^{1-\alpha}]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

que será el punto $(J_w, J_c)^+$.

Para $\lambda = \frac{1}{2}$ disponemos de la recta

$$J_w + J_c = \frac{2-\alpha}{\alpha} [\frac{\alpha(1-\alpha)}{2-\alpha} T + \frac{1}{2-\alpha} k_0^{1-\alpha}]^{\frac{1}{1-\alpha}} - \frac{1-\alpha}{\alpha} k_0$$

que relaciona los valores de los funcionales objetivo en este caso. El punto $(J_w, J_c)^+$ pertenece a esta recta.

Cuando $\lambda \to \frac{1}{2}$ para los valores de $\lambda < \frac{1}{2}$, los funcionales objetivo de los jugadores toman los siguiente valores:

$$J_w = \frac{2(1-\alpha)}{\alpha} [\frac{\alpha(1-\alpha)}{2-\alpha} T + \frac{1}{2-\alpha} k_0^{1-\alpha}]^{\frac{1}{1-\alpha}} - \frac{1-\alpha}{\alpha} k_0$$

$$J_c = [\frac{\alpha(1-\alpha)}{2-\alpha} T + \frac{1}{2-\alpha} k_0^{1-\alpha}]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Llamamos a este punto $(J_w, J_c)^-$ y también es un punto de la recta $J_w + J_c$ anterior.

Por último, si $\lambda = 0$:

$$J_w = \frac{1-\alpha^2}{\alpha^2}\left[\alpha^2(1-\alpha)T + ak_0^{1-\alpha}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} - \frac{1-\alpha}{\alpha}k_0$$

$$J_c = \frac{1}{\alpha}\left[\alpha^2(1-\alpha)T + \alpha k_0^{1-\alpha}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

que llamamos $(J_w, J_c)_0$.

Representando en el plano todos estos puntos obtenemos la frontera de Pareto de nuestro juego (gráfico 3).

Por la definición de óptimo de Pareto, no puede existir un par (J_w, J_c) tal que $J_w > J_w^\lambda$, $J_c > J_c^\lambda$ cualquiera que sea $\lambda \in (0, 1)$, por lo tanto, la frontera de Pareto es la frontera del conjunto de resultados alcanzables. Por otra parte, los funcionales J_w, J_c son siempre no negativos para cualquier estrategia que consideremos, haya sido obtenida o no siguiendo condiciones de optimalidad, debido a las expresiones de los funcionales objetivo de los jugadores y a los valores de los controles que ambos jugadores pueden utilizar en el desarrollo del juego. En función de estas consideraciones hemos obtenido el conjunto de resultados alcanzables compacto y convexo R que representamos en el gráfico 4.

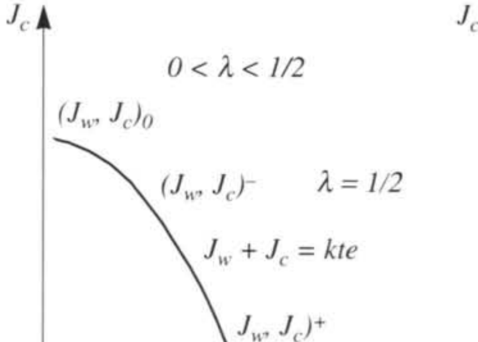

GRÁFICO 3

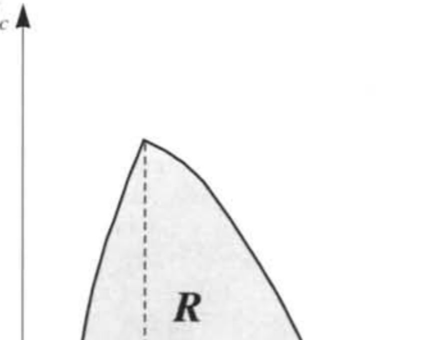

GRÁFICO 4

siendo J_w^0 el valor del funcional objetivo de los trabajadores para $\lambda = 0$ y J_{w_m} el mínimo valor que este funcional puede tomar y que se daría si los jugadores utilizaran en todo el horizonte la estretegia $x = 0 \quad s = 0$.

4. CONCLUSIONES

El estudio de la solución cooperativa nos ha permitido caracterizar los controles que trabajadores y capitalistas deben utilizar bajo distintas hipótesis sobre el peso de los jugadores en el proceso negociador.

Si son los trabajadores los que, en mayor o menor medida, dirigen la negociación, obtenemos una estrategia óptima que, en líneas generales, podríamos describir de la siguiente forma: un primer período con consumos muy bajos o nulos para los jugadores y un fuerte crecimiento del capital, un segundo período en que los trabajadores incrementan el consumo pero no los capitalistas y por lo tanto el ratio de capital crece menos que en el período anterior y una última etapa en la que el capital permanece constante y ambos jugadores consumen en la medida que el nivel de capital existente les permite.

El incremento de poder de los trabajadores produce en la estrategia óptima un desplazamiento positivo en los momentos de cambio, de manera que el último período desaparece. Los capitalistas en este caso obtienen un funcional nulo. El papel de este jugador se reduce a mantener el crecimiento del capital durante todo el horizonte temporal para que los trabajadores dispongan de una tasa de redistribución creciente a partir del momento en que optan por un valor no nulo para dicha tasa de redistribución.

Sin embargo en el óptimo social, es el segundo período el que desaparece de la estrategia óptima, produciéndose el cambio de política de ambos jugadores simultáneamente. En este caso queda indeterminado el valor de la tasa de redistribución ya que le está permitido tomar cualquier valor.

Cuando los capitalistas tienen más fuerza en la negociación se obtiene una estrategia óptima distinta. Esta estrategia siempre está estructurada en dos períodos, el primero con un crecimiento de capital muy fuerte y un consumo muy bajo o nulo para los jugadores y el segundo con el nivel de capital constante y un consumo más elevado para los capitalistas, pero menor para los trabajadores. En todo el horizonte temporal se prescinde de la tasa de redistribución salvo en el óptimo social que como dijimos la política de los trabajadores está sin determinar.

En cualquiera de los casos analizados para la solución cooperativa, los consumos obtenidos para los jugadores no pueden ser superados con ninguna otra estrategia. Estos valores de los funcionales objetivo, que dan lugar al conjunto de puntos denominado frontera de Pareto, representan el valor máximo de los consumos alcanzables por los jugadores.

BIBLIOGRAFIA

Başar, T. y Olsder, G. J. (1995): *Dynamic Noncooperative Game Theory*. Academic Press, London.

Gradus, R. (1988): «The Reaction of the Firm on Governmental Policy: A Game Theoretical Approach». *Optimal Control Theory and Economic Analysis*. Vol. 3, pp. 265-290.

Kaitala, V. y Pohjola, M. (1990): «Economic Development and Agreeable Redistribution in Capitalism: Efficient Game Equilibria in a two-class Neoclassical Growth Model». *International Economic Review*. Vol. 31, nº 2, pp. 421-438.

Kamien, M. I. y Schwartz, N. L. (1981): *Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*. North Holland, New York.

Lancaster, K. (1973): «The Dynamic Inefficiency of Capitalism». *Journal of Political Economy*. Vol. 81, pp. 1092-1109.

Mehlmann, A. (1988): *Applied Differential Games*. Plenum Press., New York.

Osborne M. J. y Rubinstein, A. (1990): *Bargaining and Markets*. Academic Press Inc., San Diego.

Petit, M. L. (1990): *Control Theory and Dynamic Games in Economic Policy Analysis*. Cambridge University Press, New York.

Pohjola, M. (1984): «Threats and Barganing in Capitalism». *Journal of Economic Dynamics and Control*. Vol. 8, pp. 291-302.

Pohjola, M. (1985): «Growth, Distribution and Employment Modelled as a Differential Game». *Optimal Control Theory and Economic Analysis 2*. (G. Feichtinger Ed.) North-Holland, Amsterdam, pp. 265-290.

Seierstad, A. (1993): «The Dynamic Inefficiency of Capitalism». *Journal of Economic Dynamics and Control*. Vol. 17, pp. 877-886.

Von Newmann, J. y Morgenstern, O. (1944): *Theory of Games and Economic Behavior*. John Wiley & Sons, Inc., New York.