¿TIEMPO CONTINUO O DISCRETO? UN PROBLEMA DE CONTROL OPTIMO

Mª Dolores Soto Torres

RESUMEN.—Planteado un mismo problema de control óptimo en tiempo continuo y discreto, que analiza la distribución de un recurso escaso como es el agua embalsada, se estudian las analogías y diferencias entre las soluciones encontradas para cada uno de los problemas que se obtienen al aplicar el principio del máximo. También en el trabajo se estudia el problema de la consistencia fuerte en el tiempo de las soluciones al considerar el principio de optimalidad de Bellman.

1. INTRODUCCION

Cuando se analiza un problema dinámico en Economía es necesario elegir cuál es el campo de variación de la variable tiempo. Si la elección recae en los números reales o bien en un subconjunto de los reales no negativos, el problema se plantea en tiempo continuo, mientras que si la elección corresponde a los enteros o en su caso los enteros no negativos, el problema tendrá una presentación en tiempo discreto.

En el caso continuo, si una variable depende del tiempo, el valor de ésta corresponderá al valor instantáneo que alcanza la magnitud que ella representa. En tiempo discreto, tal variable en un momento, recoge esa misma magnitud durante un intervalo cuya amplitud será previamente especificada. Entonces, si esta amplitud se considera suficientemente pequeña una diferencia primera tenderá a una variación instantánea, encontrándose alguna relación entre los problemas en tiempo continuo y discreto.

Si se plantea un mismo problema de control óptimo, en tiempo continuo y discreto, para su resolución se puede aplicar el principio del máximo que proporciona un sistema dinámico expresado en las correspondientes unidades de tiempo. Si un sistema dinámico en tiempo continuo, se discretiza al sustituir la variación instantánea por la diferencia primera, la dinámica que emerge de uno y otro, tanto cuantitativa como cualitativa no tienen que estar relacionadas. Este hecho puede ser considerado en distintos análisis, pudiéndose citar el modelo bidimensional de Turnovsky (1981), que planteado en tiempo continuo origina una dinámica sencilla; pero, si este mismo modelo se discretiza, la dinámica que emerge es muy compleja. Esto es debido a que la dimensión del sistema juega un papel importante sobre la dinámica que puede surgir. Así, un sistema discreto unidimensional puede presentar una dinámica tan compleja como es la existencia de caos, ejemplos de ello, se pueden encontrar en los trabajos de Stutzer (1980), Candela y Gardini (1986), entre otros, mientras que en sistemas continuos para que esto ocurra, han de existir al menos tres variables.

Sin embargo, el sistema dinámico que surge de la aplicación del principio del máximo a un mismo problema de control óptimo, en tiempo continuo y discreto, no corresponde el sistema discreto a la discretización del sistema continuo, de ahí, que no puedan ser considerados criterios ya conocidos, para evaluar la dinámica entre uno y otro.

Este trabajo se ocupa del análisis de las soluciones óptimas de un mismo problema formulado en tiempo continuo y discreto. La elección sobre la medición de las variables no es caprichosa, pues el problema que se trata de analizar puede admitir realmente las dos posibilidades. El problema tiene ciertas características, como función objetivo cuadrática y dependiente sólo del control, dinámica de la variable de estado función lineal de ella y del control y restricción lineal sobre la variable de estado, que dan lugar a que los sistemas dinámicos, en las dos posibilidades del tiempo, presenten una dinámica muy semejante. En particular, ambos sistemas presentan un mismo valor de la solución estado de equilibrio que no es general dado cualquier problema.

El problema analiza la variación que experimenta el agua de un embalse cuya única utilidad es el regadío. Se supone que el embalse en el momento inicial tiene una determinada cantidad de agua y durante el horizonte que analiza el modelo, la cantidad de agua embalsada se incrementa por incorporaciones y disminuye por el agua destinada al regadío. Para simplificar el modelo, se supone que al embalse llega una cantidad constante durante cada período, en el caso discreto, o instantáneamente cuando se considera el caso continuo. Los regantes pretenden una cuota de riego, también constante en dicho intervalo o instantáneamente dependiendo del planteamiento del modelo, que no necesariamente puede ser suministrada, pues, el embalse no puede agotarse y la Administración sólo permite utilizar para riego una cantidad, no negativa, inferior o igual a una proporción del agua embalsada en cada intervalo o en cada instante. Los regantes desean determinar la cuantía de agua a utilizar en los riegos de tal manera que se minimicen las desviaciones cuadráticas respecto a su objetivo durante el horizonte temporal, que se considera finito .

El trabajo ha sido dividido en dos secciones. En la primera se resuelve el problema en tiempo continuo y en la segunda, se realiza el análisis en tiempo discreto.

2. EL PROBLEMA EN TIEMPO CONTINUO

Si el tiempo toma valores en los reales no negativos, el problema puede plantearse:

$$\min_{0 \leq u(t) \leq \alpha x(t)} \frac{1}{2} \int_0^t (u(t) - \bar{u})^2 \, dt,$$

sujeto a: $\dot{x} = g - u(t)$, $x(0) = x_0 > 0$. Donde $x(t)$ es el agua embalsada en el momento t, g es la cantidad que cada momento de tiempo recibe el embalse, $u(t)$ es el agua que instantáneamente se retira para el riego, $\bar{u}$ es el objetivo de los regantes en cada momento que se considera constante durante el horizonte T y $a \in (0,1)$ es el parámetro decidido por la Administración.

Para encontrar la solución del problema y aplicando al principio del máximo, se considera el problema estático asociado al Hamiltoniano:

$$\min_{0 \leq u \leq \alpha x(t)} H(u, \psi) = -\frac{1}{2} (u(t) - \bar{u})^2 + \psi(t) (g - u(t)),$$

donde $\psi(t)$ es la variable de coestado, que tiene como condición final $\psi(T) = 0$, y que satisface la ecuación diferencial: $-\dot{\psi} = L_x (u, \psi, x)$, donde $L(u, \psi, x)$ es la Lagrangiana asociada al problema del Hamiltoniano.

Resolviendo este último problema, obtenemos los siguientes resultados:

1. Si $u = 0$, entonces ψ es una constante mayor o igual a $\bar{u}$ y el agua embalsada crece con el tiempo.

2. Si $u \in (0, \alpha x(t))$, obtenemos $u(t) = \bar{u} - \psi(t)$ y por la condición de admisibilidad, se tiene: $\bar{u} - \alpha x(t) < \psi(t) < \bar{u}$, con $\psi(t)$ constante. La variación del agua embalsada verificará la ecuación:

$$\dot{x} = g - \bar{u} + \psi(t).$$

3. Si $u(t) = \alpha x(t)$, se verifica $\psi(t) \leq \bar{u} - \alpha x(t)$ y la variable de estado y coestado satisfacen el sistema diferencial lineal:

$$\dot{\psi} = -\alpha(\bar{u} - \alpha x(t)) - \psi(t)), \; \dot{x} = g - \alpha x(t).$$

Desde estas condiciones, se observa que el control nulo no va a ser utilizado en el horizonte temporal y que las condicciones necesarias son suficientes (Kamien y Schwartz, p. 208).

Para determinar la trayectoria óptima, se considera el plano de fase (x, ψ) que está dividido por $G(x, \psi) = \bar{u} - \alpha x - \psi = 0$ en dos regiones. En la región donde $G(x, \psi) < 0$ que supone $u \in (0, \alpha x)$, las trayectorias son rectas paralelas a $\psi = 0$ con un sentido determinado por el signo de $\dot{x} = g - \bar{u} + \psi$. En la región $G(x, \psi) \geq 0$, donde el control en cada momento es proporcional a la variable de estado, las trayectorias vienen determinadas por el sistema diferencial lineal que variable de estado y coestado satisfacen. Este sistema tiene un punto de silla en $\alpha x^* = g$, $\psi^* = \bar{u} - g$, cuya variedad estable es la recta $2\psi + \alpha x = 2\bar{u} - g$ y la variedad inestable satisface $\alpha x = g$.

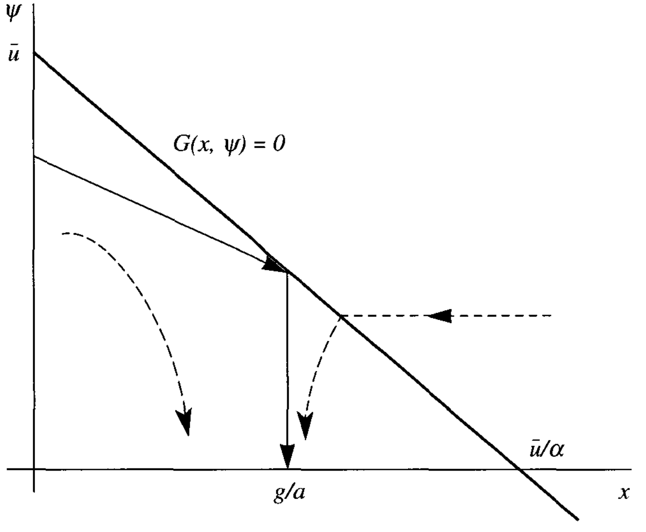

FIGURA 1

Las distintas trayectorias óptimas pueden encontrarse desde el plano de fase teniendo en cuenta la condición de transversalidad y que la variable de coestado en el momento inicial es libre. Supongamos, en primer lugar, que $\bar{u} > g$ (figura 1), entonces si $0 < \alpha x_0 \leq g$, podemos mantener $u(t) = \alpha x(t)$ en todo el horizonte con lo que variable de estado y coestado seguirán una trayectoria repulsora del punto de silla, que seleccionando de forma apropiada el valor inicial de la variable de coestado ψ_0, permitirá que ella alcance en el momento T el valor nulo. En particular, si $\alpha x_0 = g$ la trayectoria óptima coincide con variedad inestable del punto de silla. Operando sobre el sistema dinámico, el momento T y ψ_0 deben satisfacer la condición:

$$\psi_0 = \frac{\alpha x_0 - g}{2} \left[e^{-2\alpha T} - 1\right] + \left[g - \bar{u}\right] \left[e^{-\alpha T} - 1\right] \tag{1}$$

y en caso contrario no existirá solución óptima. Notemos que bajo estas condiciones se satisface $\alpha x_T \in (\alpha x_0, g]$. Si $\bar{u} \geq \alpha x_0 > g$ la política óptima depende de la amplitud del horizonte, pero si es suficientemente grande, consistirá en mantener $u(t) = \bar{u} - \psi_0$ durante un intervalo con ψ_0 fijo y $0 < \psi_0 < \bar{u} - g$, hasta alcanzar $G(x, \psi) = 0$, momento a partir del cual la trayectoria seguirá una respulsora del punto de silla mediante el control $u(t) = \alpha x(t)$. Independientemente de la amplitud del horizonte, el agua embalsada en T verificará: $\alpha x_T \in (g, \bar{u}]$. En el caso $\alpha x_0 > \bar{u}$ y dependiendo del valor de T, podemos considerar la solución anterior o tomar $\psi_0 = 0$ con lo que $u(t) = \bar{u}$, dará lugar a una disminución del agua embalsada, en cuyo caso tendremos en el momento final $\alpha x_T \geq \bar{u}$.

Si $\bar{u} = g$, el plano de fase será análogo al anterior, pero ahora el estado de equilibrio tiene como componente en ψ el valor nulo. Si $\alpha x_0 \in (0, g]$ la alternativa analizada anteriormente sigue siendo válida con las correcciones correspondientes; así, en particular, si $\alpha x_0 = g$, la trayectoria óptima corresponderá al estado de equilibrio y ninguna variable sufre variación. Sin embargo, si $\alpha x_0 > g$, la solución óptima se obtiene considerando $u(t) = \bar{u}$ siempre, al tomar $\psi_0 = 0$ con lo que la cantidad de agua embalsada no varía a lo largo del tiempo.

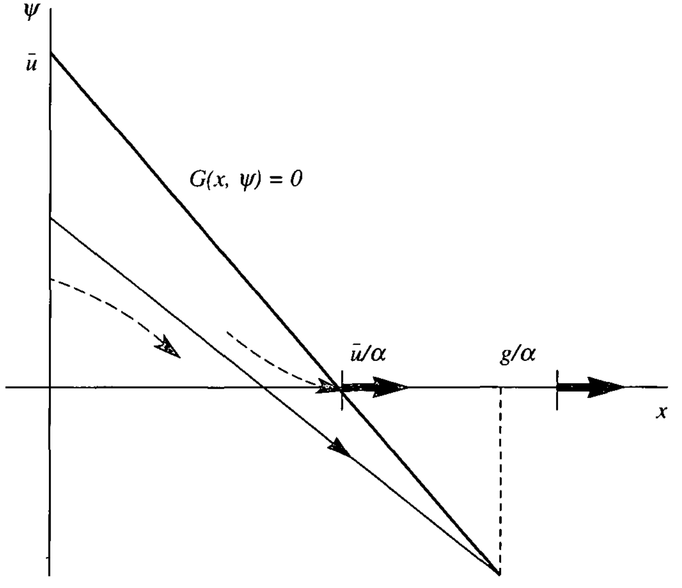

FIGURA 2

Por último si $\bar{u} < g$ la componente ψ del punto de silla es negativa y el desplazamiento que ello origina sobre la variedad estable (figura 2) da lugar a distintas posibilidades. Si las condiciones iniciales satisfacen $0 < \alpha x_0 \leq \bar{u}$, la trayectoria óptima se obtiene manteniendo $u(t) = \alpha x(t)$, donde $\psi_0 \leq \bar{u} - \alpha x_0$, y dado αx_0 se tiene que satisfacer la condición (1). Sin embargo, entre estas trayectorias existe una que alcanza en un momento t el punto $(x, \psi) = (\bar{u}/\alpha, 0)$ atravesando la recta $G(x, \psi) = 0$, y a partir de ese momento se mantiene el control $u(t) = \bar{u}$ creciendo el agua embalsada. El momento t y ψ_0 tienen que satisfacer:

$$e^{-\alpha t} = \frac{g - \bar{u}}{g - \alpha x_0}, \ \psi_0 = \frac{(\alpha x_0 - \bar{u})^2}{2(g - \alpha x_0)}.$$

Si las condiciones iniciales sobre la variable de estado son $\alpha x_0 > \bar{u}$, el control óptimo será $u(t) = \bar{u}$ y el agua embalsada crece con el paso del tiempo.

Los controles que determinan cada una de las trayectorias óptimas presentan consistencia débil en el tiempo, ya que satisfacen el principio del máximo, luego si estos controles óptimos se utilizan en el intervalo $[0, s]$ sobre $(s, T]$ ellos seguirán siendo óptimos. Sin embargo, las estrategias no satisfacen siempre el principio de optimalidad de Bellman. Este hecho puede verificarse desde la figura 1, en efecto, si dadas las condiciones iniciales sobre la variable de estado αx_0 y la amplitud del horizonte T, la solución óptima fuera mantener $u(t) = \bar{u} - \psi_0$ en $[0, t^*)$ y $u(t) = \alpha x(t)$ en $[t^* T]$, hasta el momento t^* se podría seguir un control admisible alternativo $u(t) = 0$ con lo que la variable de estado crecería y a partir del momento t^* no se podría utilizar el control proporcional al estado.

3. EL PROBLEMA EN TIEMPO DISCRETO

En este caso, las variables no se miden instantáneamente sino en momentos de tiempo equidistantes. Ahora, el problema, puede plantearse:

$$\min_{0 \le u(t) \le \alpha x(t)} \frac{1}{2} \sum_{0}^{T} \left[u(t) - \bar{u}\right]^2,$$

sujeto: $x(t + 1) = x(t) + g - u(t)$, $x(0) = x_0 > 0$. La variable de estado $x(t)$ representa el agua embalsada en el extremo derecho del intervalo $(t - 1, t]$, g es el agua que llega al embalse durante el intervalo $(t, t + 1]$, $u(t)$ es el agua eliminada durante el último intervalo considerado y $\alpha \in (0, 1)$ tiene el mismo significado que en el caso continuo.

Aplicando la misma técnica del caso anterior, resolvemos el problema estático asociado al Hamiltoniano:

$$\min_{0 \le u(t) \le \alpha x(t)} H(u(t), x(t), \psi(t + 1)) = -\frac{1}{2}\left[u(t) - \bar{u}\right]^2 + \psi(t + 1)\left[x(t) + g - u(t)\right],$$

donde la variable de coestado $\psi(t)$ tiene que satisfacer, junto a la condición de transversalidad $\psi(T + 1) = 0$, la ecuación en diferencias $\psi(t) = \psi(t + 1) + \alpha\alpha_1$, siendo α_1, no negativo, el multiplicador de Kuhn Tucker asociado a la restricción $u(t) \le \alpha x(t)$. Resolviendo el probema estático, encontramos que los controles posibles son: $u = 0$ si $\psi(t + 1) = \psi(t) \ge \bar{u}$; $u \in (0, \alpha x(t))$

si $\psi(T + 1) = \bar{u} - u(t) = \psi(t)$ donde operando, obtenemos $\psi(t + 1) < \bar{u} < \psi(t + 1) + \alpha\, x(t)$, por su parte, la variable de estado satisface la ecuación en diferencias: $x(t + 1) = x(t) + g - (\bar{u} - \psi(t))$; por último, $u = \alpha x(t)$ si $\bar{u} \geq \psi(t + 1) + \alpha x(t)$, entonces si el control es proporcional al estado, las variables de estado y coestado tendrán que satisfacer el sistema dinámico en tiempo discreto:

$$\psi(t) = (1 - \alpha)\, \psi(t + 1) + \alpha\, [\bar{u} - \alpha x(t)], \qquad x(t + 1) = (1 - \alpha)\, x(t) + g.$$

Como en el problema en tiempo continuo, el control $u = 0$ no es óptimo y la trayectoria óptima depende de los parámetros y condiciones iniciales de la variable de estado. Desde las condiciones obtenidas puede resolverse el problema.

Supongamos en primer lugar $g = \alpha x_0$, entonces una solución se obtiene manteniendo durante todo el horizonte $u(t) = \bar{u}$ eligiendo un valor nulo de la variable de coestado. Esta trayectoria es óptima si $\bar{u} < \alpha x_0$ creciendo siempre la variable de estado. Otra trayectoria óptima se obtiene si se considera en todo el horizonte $u(t) = \alpha x(t)$, que exige $\bar{u} \geq \alpha x_0$, y mantiene el agua embalsada constante.

Si $g < \alpha x_0$ se propone mantener en todo el horizonte $u(t) = \alpha x(t)$ con ello, el agua embalsada disminuye, manteniéndose siempre la relación $g < \alpha x(t)$. Esta trayectoria es óptima si:

$$(1 - \alpha)\bar{u} \geq \alpha x_0 \left[1 - \alpha(1 - \alpha)^T\right] - g\alpha \left[1 - (1 - \alpha)^T\right], \quad \bar{u} - g \geq (1 - \alpha)^T (\alpha x_0 - g) > 0$$

expresiones que son obtenidas desde el comportamiento de la variable de coestado que obliga a que la variable de estado verifique:

$$\bar{u} - \alpha x_t \geq \alpha \left[\bar{u} - \alpha x_T\right] \geq 0$$

para cualquier $t = 0, 1, \dots, T$, pero además αx_0 y T tienen que ser compatibles con el valor:

$$\psi_0 = (\bar{u} - g) \left[1 - (1 - \alpha)^{T+1}\right] + \frac{\alpha(\alpha x_0 - g)}{1 - (1 - \alpha)^2} \left[1 - (1 - \alpha)^{2T+2}\right],$$

que es siempre menor o igual que $\bar{u} - \alpha x_0$. Otra posibilidad sería mantener en todo el horizonte $u(t) = \bar{u}$, entonces la variable de coestado es nula siempre y se tendrá que verificar $\bar{u} < \alpha x(t)$ para cualquier $t = 0, 1, \dots T$. Ahora pueden presentare dos nuevas posibilidades. Si $\bar{u} \leq g < \alpha x_0$ la variable de estado es no decreciente, y si $g < \bar{u} < \alpha x_0$ el agua embalsada decrece. En este último supuesto, para optimalidad se tiene que verificar la condición:

$$\bar{u} < \frac{\alpha(x_0 + Tg)}{1 + \alpha T} < \frac{\alpha(x_0 + (T - 1)g)}{1 + (T - 1)\alpha} < \dots < \alpha x_0.$$

Una última posibilidad corresponde a $g < \alpha x_0 \leq \bar{u}$, donde se propone mantener $u(t) = \bar{u} - \psi_0$ para $t = 0, 1, \ldots z < T$ y $u(t) = \alpha x(t)$ sobre $t = z + 1, z + 2, \ldots T$. La variable de coestado, en esta trayectoria tiene que satisfacer las siguientes condiciones, $\psi(t) = (1 - \alpha\ \psi(t + 1) + \alpha(\bar{u} - \alpha x(t))$ para $t = z + 1, z + 2, \ldots T$, con $\psi(T + 1) = 0$ y, $\psi(z + 1) = \psi(z) = \ldots = \psi_0$. Entonces, estas condiciones junto con las de validez de la política $\bar{u} - \alpha x(t) \geq \psi(t + 1)$ si $t = z + 1, z + 2, \ldots T$, y $\bar{u} - \alpha x(t) < \psi_0$ si $t = z, z - 1, \ldots, 0$, determinarán un conjunto de relaciones para optimalidad de la trayectoria. En particular, si $T = 2$ tendremos dos posibles trayectorias que corresponde a los dos valores de z, esto es, los controles pueden ser $u(0) = \bar{u} - \psi_0 = u(1)$, $u(2) = \alpha x(2)$ y $u(0) = \bar{u} - \psi_0$, $u(1) = \alpha x(1)$, $u(2) = \alpha x(2)$. Operando, se obtiene que la primera política es óptima si

$$\frac{\alpha x_0 + 2\alpha g}{1 + 2\alpha} \leq \bar{u} \leq min\left[\frac{(\alpha - \alpha^2 + \alpha^3)x_0 + \alpha(1 - 2\alpha)g}{1 - \alpha^2}, \frac{(2 + 2\alpha^3 - 2\alpha^2)x_0 - 2\alpha^2 g}{1 - \alpha}\right]$$

mientras que, en la segunda se tiene que verificar:

$$\frac{\alpha(1 - \alpha)x_0 + (\alpha(1 + \alpha^2) + \alpha(1 - \alpha))g}{1 + \alpha^2 - \alpha(1 - a^2)} \leq \bar{u} \leq min\left[\frac{Ax_0 + \alpha(1 - 2\alpha)g}{1 - \alpha^2}, \frac{Bx_0 - \alpha^2 Cg}{(1 - \alpha)^2}\right]$$

donde $A = (\alpha - \alpha^2(1 - \alpha))$, $B = \alpha - (1 - \alpha)\alpha^2((1 - \alpha)^2 + 1)$ y $C = 2 - \alpha + (1 - \alpha)^2$.

Si $g > \alpha x_0$, se propone mantener $u(t) = \alpha x(t)$ o $u(t) = \bar{u}$ en todo el horizonte. Las condiciones sobre la variable de coestado en el primer caso, exigen que para optimalidad se verifiquen las mismas relaciones que se establecieron para esta política con $g < \alpha x_0$. Para la segunda política necesitamos $\bar{u} < \alpha x(t)$, en particular $\bar{u} < \alpha x_0 < g$, entonces el agua embalsada crece con el paso del tiempo. Una última propuesta para este caso, será considerar $u(t) = \alpha x(t)$ para $t = 0, 1, \ldots, z$, y $u(t) = \bar{u}$ en $t = z + 1, z + 2, \ldots, T$. Otra vez las condiciones de optimalidad se encuentra teniendo en cuenta el comportamiento de la variable de coestado que necesita satisfacer: $\bar{u} < \alpha x(t)$, $t = 0, 1, \ldots, z$ y $\bar{u} - \alpha x(t) \geq \psi(t + 1)$ en $t = z + 1, z + 2, \ldots, T$, donde $\psi(t) = (1 - \alpha)\psi(t + 1) + \alpha(\bar{u} - \alpha x(t))$. Si el horizonte $T = 2$, también obtenemos dos trayectorias que corresponden a los controles $u(0) = \alpha x_0$, $u(1) = \bar{u} = u(2)$ y $u(0) = \alpha x_0$, $u(1) = \alpha x(1)$, $u(2) = \bar{u}$. De nuevo, operando se obtiene que las condiciones para optimalidad son:

$$\alpha x_0 \leq \bar{u} \leq min\left[\alpha(1 - \alpha)x_0 + \alpha g, \frac{\alpha(1 - \alpha)\, x_0 + 2\alpha g}{1 + \alpha}\right]$$

para la primera solución, y para la segunda:

$$max\left[\alpha(1 - \alpha)x_0 + \alpha g, \frac{\alpha x_0 - \alpha^2((1 - \alpha)x_0 + g)}{1 - \alpha}\right] \leq \bar{u} \leq \alpha(1 - \alpha)^2 x_0 + \alpha(2 - \alpha)g$$

Todas las soluciones, también podían haberse obtenido desde el plano de fase (x, ψ) análogo al del caso continuo. Las diferencias entre ellos provienen de la ecuación de la variedad estable del punto de silla, que en el caso discreto sigue la ecuación:

$$(2-\alpha)\psi + \alpha x = (2-\alpha)\bar{u} - g(1-\alpha),$$

por tanto, salvo en el estado de equilibrio, esta recta se encuentra entre la variedad estable del caso continuo y la recta $G(x, \psi) = 0$.

Las soluciones encontradas también presentan consistencia débil en el tiempo y, por tanto, participan de las mismas características que las soluciones del caso continuo. Sin embargo, ellas si satisfacen las condiciones de la programación dinámica. Para comprobarlo, consideramos un caso especial al tomar $T = 1$ para no realizar cálculos en exceso engorrosos. Siguiendo el principio de Bellman debemos encontrar funciones $V(t, x(t))$ que verifiquen:

$$V(t, x(t)) = \min_{0 \le u(t) \le \alpha x(t)} V(t+1, x(t) + g - u(t)) + \frac{1}{2}\left[u(t) - \bar{u}\right]^2,$$

para todo $t = 0, 1,..., T$ con $V(T+1, x(T+1)) = 0$.

Entonces, el problema a resolver en la primera etapa será:

$$\min_{0 \le u(1) \le \alpha x(1)} \frac{1}{2}\left[u(1) - \bar{u}\right]^2,$$

que proporciona como solución: $u(1) = \bar{u} < \alpha x(1)$ y entonces $V(1, x(1)) = 0$ y $u\,(1) = \alpha x(1) \le \bar{u}$ con $V(1, x(1)) = \dfrac{1}{2}\left[\alpha x(1) - \bar{u}\right]^2,$

En la segunda etapa tendremos que resolver dos problemas. El primero será:

$$\min_{0 \le u(0) \le \alpha x(0)} \frac{1}{2}\left[u(0) - \bar{u}\right]^2$$

que es análogo al de la primera etapa y, por tanto, proporcionará los mismos resultados. El segundo de los problemas a resolver será:

$$\min_{0 \le u(0) \le \alpha x(0)} \frac{1}{2}\left[(u(0) - \bar{u})^2 + (\alpha(x(0) + g - u(0)) - \bar{u})^2\right]$$

que tiene como soluciones $u(0) = \dfrac{(1-\alpha)\bar{u} + \alpha^2(x_0 + g)}{1+\alpha^2} \le \alpha x_0$, valor que sustituido en la función objetivo nos proporciona $V(0, x_0)$. La otra solución de este último problema es $u(0) = \alpha x_0$ con $\bar{u} - \alpha x_0 \geq \alpha(\bar{u} - \alpha x(1))$. Luego, hemos encontrado cuatro trayectorias posibles para la variable de estado que se pueden agrupar en tres posibilidades:

a) Si $g = \alpha x_0$, seguiremos la trayectoria $u(t) = \alpha x(t)$ si $\alpha x_0 \leq \bar{u}$, en caso contrario mantendremos en todo el horizonte $u(t) = \bar{u}$.

b) Si $g < \alpha x_0$, mantenemos la política $u(t) = \bar{u}$ si $(1 + \alpha)\bar{u} < \alpha(x_0 + g)$; pero si esta última desigualdad se verifica en sentido contrario y además se satisface $(1 - \alpha)\bar{u} < (1 - \alpha + \alpha^2)\alpha x_0 - \alpha^2 g$, entonces la política es mantener un control fijo inferior a $\bar{u}$ en el momento inicial y en el siguiente paso mantener un control proporcional al valor del estado en ese momento. Por último, si la expresión anterior se verifica en mayor o igual la trayectoria se obtiene considerando siempre un control proporcional al valor del estado.

c) Si $g > \alpha x_0$, tenemos, como en el caso anterior, tres posibilidades, mantener siempre un control igual al objetivo si $\bar{u} < \alpha x_0$; mantener un control proporcional al estado si $\alpha(1 - \alpha)x_0 + \alpha g \leq \bar{u}$ y, en caso contrario, mantener para el período inicial un control proporcional al estado y en el segundo período un control constante e igual al objetivo.

Si el horizonte temporal supera a uno se puede comprobar que las trayectorias obtenidas por el principio del máximo y por el principio de Bellman coinciden. Las operaciones son tediosas aplicando la programación dinámica, ya que un horizonte de amplitud n nos lleva a resolver 2^n problemas.

4. CONCLUSIONES

Desde el desarrollo del trabajo se pueden concluir dos aspectos diferenciados, uno respecto a la confrontación de soluciones que un problema de control óptimo puede proporcionar según se considere su planteamiento en tiempo continuo o discreto, y otro respecto a los resultados concretos del problema que se analiza.

En cuanto a la primera cuestión, y desde el problema que se ha resuelto que tiene unas características específicas, las soluciones no difieren esencialmente. Este hecho proviene del comportamiento de las trayectorias en el plano de fase, que cualitativamente presenta la misma estructura: un punto de silla con las mismas coordenadas en tiempo continuo y discreto situado siempre en una región específica común para ambos problemas, y trayectorias lineales en la región complementaria a aquélla en el primer cuadrante.

La variedad inestable asociada al punto de silla coincide en ambas presentaciones, pero no así la variedad estable. Esto permite que la variable de coestado en el momento inicial pueda tomar un valor superior para el problema en tiempo discreto que para el continuo, para un mismo valor inicial de la variable de estado, lo que influye en la duración de la trayectoria óptima que pueda tomar esos valores iniciales.

Los resultados se obtienen al resolver los problemas por el principio del máximo, lo que garantiza que las soluciones de ambos problemas presentan consistencia débil en el tiempo. La consistencia fuerte, constatada por el principio de Bellman que garantiza lo robustos que se muestran los controles óptimos ante variaciones arbitrarias, pero admisibles, sobre un subintervalo inicial del horizonte temporal, es una característica que presenta el problema en tiempo discreto, pero no el continuo, lo que prueba, en este último caso, que existe dependencia de los controles respecto a la situación inicial de la variable de estado y de los valores que ésta ya ha ido alcanzando. La justificación de esta diferencia, se debe al comportamiento del tiempo, ya que en el modelo en tiempo continuo las trayectorias recorren un continuo mientras que en tiempo discreto la variable presenta saltos.

Respecto al problema que nos ocupa, la solución óptima depende de la cantidad máxima de agua disponible que en el momento inicial permite utilizar la Administración y de la relación entre la cantidad de agua que llega al embalse y el objetivo que pretenden conseguir los regantes. Si el agua disponible es inferior al objetivo, es óptimo para los regantes, salvo en una posibilidad, utilizar para riego una cantidad de agua proporcional al agua existente en cada momento, con la corrección correspondiente para el caso discreto. La posibilidad excluida corresponde al caso en el que la cantidad de agua que llega al embalse sea inferior al objetivo, donde puede ser óptimo utilizar para riego al principio una cantidad de agua inferior a la que correspondería a la proporcional, para luego utilizar la política proporcional. Los regantes sólo consiguen su objetivo si el agua de las nuevas aportaciones le supera o le iguala. Por último, destacar que la amplitud del horizonte puede modificar la trayectoria óptima a seguir y que dependiendo de sus valores puede existir trayectoria óptima o no.

BIBLIOGRAFIA

Basar T. y Olsder G. J. (1995): *Dynamic Noncooperative Game Theory*. San Diego. Academic Press.

Candela G. y Gardini A. (1986): «Estimation of Non-linear Discrete-time Macro Model». *Journal of Economic Dynamics and Control*. Vol. 10, nº 1-2, pp. 249 - 254.

Kamien M. I. y Schwartz N. L. (1981): *Dynamic Optimization*. New York. Nort - Holland.

Stutzer M. J. (1980): «Chaotic Dynamics and Bifurcation in a Macro Model». *Journal of Economic Dynamics and Control*. Vol. 2, nº 4, pp. 353 - 376.

Turnovsky S. J. (1981): «The Optimal Intertemporal Choice of Inflation and Unemployment: An Analysis of the Steady State and Transitional Dynamics». *Journal of Economic Dynamics and* Control. Vol. 3, nº 4, pp. 343 - 357.