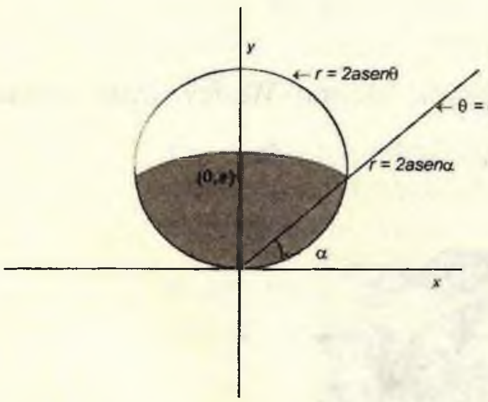
El problema del burro

AUGUSTO SILVA S.[*]

Supóngase que dispone de un potrero circular de radio *a* sembrado de pasto. En el borde del potrero debe amarrarse un burro y se quiere que el animal tenga acceso exactamente a la mitad del potrero. ¿Cuánto debe medir el lazo con el cual será amarrado el burro?.



El área sombreada en la figura es $\frac{\pi a^2}{2}$. Usando coordenadas polares se tiene que el área sombreada A también satisface la relación

$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\alpha} 4a^2 \operatorname{sen}^2\theta \, d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4a^2 \operatorname{sen}^2\alpha \, d\theta \quad \text{ó}$$

$$A = \int_0^{\alpha} 4a^2 \operatorname{sen}^2\theta \, d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4a^2 \operatorname{sen}^2\alpha \, d\theta = \frac{\pi a^2}{2} \quad \text{ó}$$

$$4\int_0^{\alpha} \operatorname{sen}^2\theta \, d\theta + 4\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{\pi}{2}$$

Esta ultima ecuación muestra que el ángulo α que soluciona el problema es independiente de a, el radio del circulo.

Realizando la integración se llega a

$$\alpha - \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha + (\pi - 2\alpha)\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{\pi}{4}$$

El problema se reduce a hallar una raíz de la función

$$f(\alpha) = \alpha - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2\alpha + (\pi - 2\alpha)\operatorname{sen}^2\alpha - \frac{\pi}{4}$$

La longitud L del lazo satisface la relación $a < L < \sqrt{2}a$ o sea que $\tfrac{1}{2} < \operatorname{sen}\alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}$; luego α satisface

$$\operatorname{arcsen} \tfrac{1}{2} < \alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

La raíz de la función $f(\alpha)$ la calculamos usando el método de Newton,

[*] Profesor Titular de la Universidad Surcolombiana. Programa de Matemáticas y Física.

tomando como primera aproximación el punto medio de estos valores extremos de α.

La derivada de $f(\alpha)$ es:

$$f'(\alpha) = 1 - \cos 2\alpha + (\pi - 2\alpha)\,\mathrm{sen}\,2\alpha - 2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha$$

Tomando como primera aproximación $\alpha 1 = 0.6544$ la fórmula

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{f(\alpha_n)}{f'(\alpha_n)}$$

proporciona los siguientes valores:

$$\alpha_2 = 0.6544 - \frac{f(0.6544)}{f'(0.6544)} = 0.6177$$

$$\alpha_3 = 0.6177 - \frac{f(0.6177)}{f'(0.6177)} = 0.6179$$

Esta tercera aproximación es una buena solución para el problema. El ángulo α es 35, 42°.

Para el caso de $a = 1$, la longitud del lazo es $L = 2\mathrm{sen}(35{,}42°) = 1.1586$

El valor del área es $A = 1.5706$ valor muy aproximado a $\frac{\pi}{2}$.

Bibliografía

1. J. B. THOMAS. *Cálculo con geometría analítica.* Editorial Addison - Wesley Iberoamericana.
2. E. KREISZIG. *Matemáticas avanzadas para ingeniería.* Editorial Trillas.

Ilustración: Marco Aurelio Mendez S.