# FORMALISMO, ABSTRACCION, RIGOR Y DIFICULTAD EN LA MATEMATICA

HERNANDO GUTIERREZ HOYOS *

He aquí cuatro términos que usualmente se confunden como sinónimos cuando se intenta hacer una caracterización de la matemática por parte de personas no especializadas en esta disciplina. La confusión llega a presentarse, incluso, entre personas que han recibido algún tipo de formación matemática pues no es raro encontrarse divulgadores de la materia que no establezcan claramente las diferencias y relaciones que existen entre estos términos.

Quienes han tenido oportunidad de acercarse a la matemática indagando sobre la naturaleza de sus conceptos y la estructuración del conocimiento matemático, por encima de la simple manipulación de los procesos operativos asociados y/o derivados de estos conceptos, saben que existen relaciones pero también diferencias entre los cuatro términos del enunciado que contribuyen, precisamente, a la configuración unitaria de la diversidad que es, muy seguramente, una de las características esenciales de la matemática.

Con el fin de estimular este acercamiento, que necesariamente debemos promover, a la matemática a través de conductas diferentes de la tradicional operatividad mecánica; voy a intentar presentar de una manera sencilla (ojalá la sencillez no desvirtúe los conceptos) cada uno de estos términos y aclarar las confusiones más frecuentes en la interpretación de ellos.

Inicio con el términos *Formal* el cual por fuera de la Matemática, en el ambiente del lenguaje cotidiano usual, tiene básicamente dos interpretaciones: Una vulgar (en el sentido de ser del dominio público, del común de las gentes, no muy elaborada) que lo identifica o asocia con *amabilidad*; ser *Formal* es ser *Amable*. Otra interpretación, un poco más elaborada (no la usa todo el mundo), define *Formal* como "ajustado a las normas o a las reglas". Ser *Formal* (en este caso) es ser apegado a las normas y actuar de acuerdo a ellas, dentro de lo legal.

En la Matemática el término *Formal* está más próximo a la idea de *forma* en el sentido físico o espacial; especie de patrón o molde o matriz el cual, sin importarnos el material de que esté hecho, genera o reproduce objetos "parecidos" o "semejantes" a él. Aquello en lo cual estos objetos se "parecen" al molde en el que "fueron hechos" es la *forma*.

Los moldes o patrones o matrices que utilizamos en las actividades prácticas para dar *forma* a un determinado tipo de objeto pueden estar hechos de cualquier material. (cubos de hielo se pueden producir si utilizamos como moldes recipientes de aluminio, vidrio, caucho o plástico).

---

* Profesor de la Universidad Surcolombiana.

Ahora bien; y esto es lo verdaderamente interesante; para producir o construir los moldes materiales nos apoyamos en la idea correspondiente a la *Forma* que vamos a darles. Esto quiere decir que la *Forma* de un cuerpo o de un objeto está asociada a una idea que se ha constituido en categoría de pensamiento, así, por ejemplo, hablamos de formas circulares, esféricas, triangulares, rectangulares, etc. Un balón de fútbol, una bola de cristal y una pelota de icopor, a pesar de estar hechas de sustancias diferentes, comparten una propiedad común *insustancial: La forma;* en este caso la esférica.

Uno de los problemas fundamentales de la filosofía clásica (que aún no ha sido resuelto) es el de ¿cómo se formaron estas ideas-moldes?. ¿Nacen con nosotros, es decir están previamente grabadas en nuestro cerebro (o en nuestra alma) y en tal sentido son apriorísticas?. ¿O se adquieren a través de la experiencia y en el contacto directo con la realidad exterior y en tal sentido son empíricas o a-posteriori?

Las respuestas dadas a estos interrogantes han determinado diferentes concepciones e interpretaciones de la Matemática que, incluso, han llevado a los más destacados pensadores de esta disciplina a deslindar campos entre ellos y a asumir posiciones filosóficas irreconciliables en relación con su visión de la matemática.

Precisamente, uno de los sectores más polémicos y destacados es el de los llamados **Formalistas** quienes consideran que la matemática no trabaja con objetos ni cuerpos materiales. La matemática trabaja con las "*formas ideales*" . (Algunos dirán con las "*formas puras*", es decir, desprovistos de sustancialidad). Por ejemplo, no existen materialmente (en el sentido de poder verse, tocarse, medirse, etc.) una esfera o un rectángulo; lo que existe son objetos materiales que adoptan la forma o encajan en el molde determinado por las ideas (o categorías) de esfericidad y rectangularidad o cuadratura; una bola de billar, el tablero de clase etc.

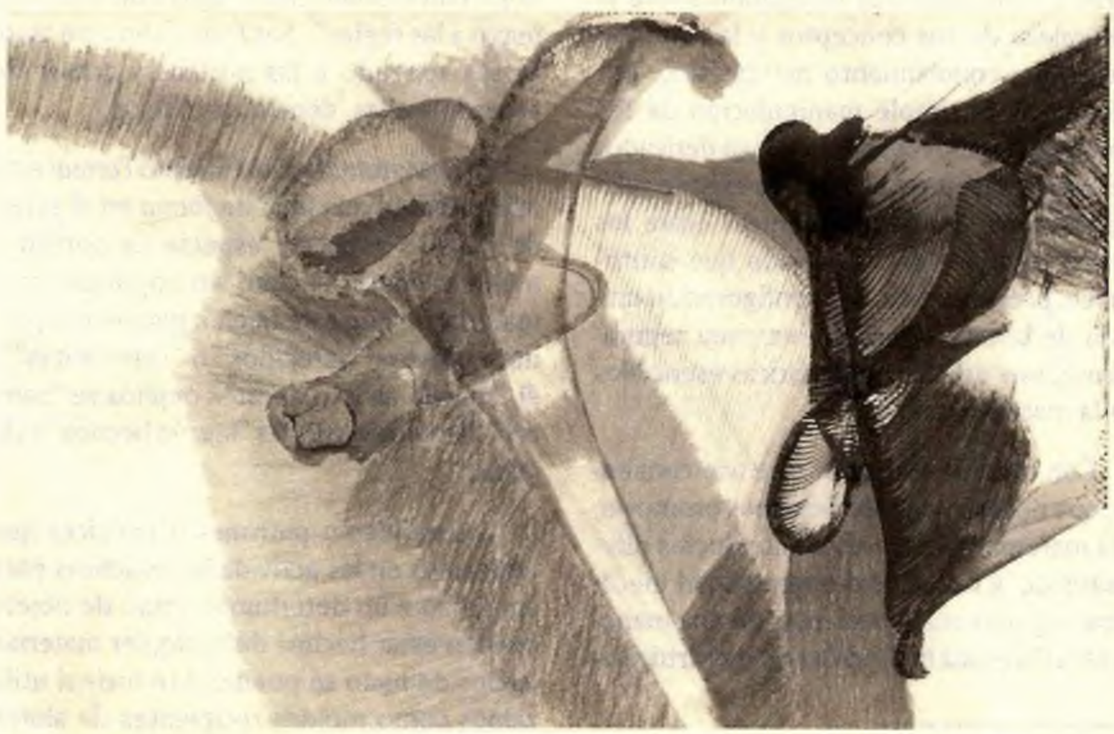

**Ilustración: Damaris Culma C.**

Cuando dibujamos un triángulo para resolver un problema de geometría, este triángulo (el del dibujo) es un objeto material (tiene sustancia de tinta o lápiz) que adopta la forma triangular subyacente en la idea (o categoría mental) de triangularidad. En consecuencia, al triángulo dibujado lo identificamos con una *forma material*. Similarmente, no existe un objeto que pueda llamarse el número cinco; lo que existen son conjuntos que tienen en común la propiedad de poseer cada uno de ellos cinco objetos o elementos (sin interesarnos la naturaleza de estos objetos).

De esta manera la idea de número cinco, y en general la idea de número, se encuentra asociada a un proceso de relación entre conjuntos en el cual hacemos abstracción de la naturaleza de los elementos pertenecientes a ellos y nos quedamos con los *moldes* o las *formas* correspondientes a las clases o familias que forman los conjuntos con igual número de elementos (equipotentes).

Basándonos en las reflexiones anteriores, podemos atrevernos a decir que el calificativo de ciencia formal, dado a la matemática, se debe a que en ella se trabaja, opera o actúa sobre *Formas*. (Otros dirían: el objeto de las Matemáticas son las *Formas*), *Formas Materiales* que facilitan la manipulación práctica de las reflexiones teóricas y a la vez, en un proceso de doble vía, estimulan el avance y desarrollo de la reflexión teórica; y *Formas Ideales* o fuentes inagotables de ideas que nos permiten la construcción física o geométrica de las formas materiales y constituyen los auténticos objetos de la Matemática.

Gran parte del trabajo que realiza el matemático consiste en *formalizar* es decir, desentrañar e *identificar* la forma ideal que está asociada con los entes materiales que trata de matematizar o que subyace en las situaciones que se pretende conceptualizar.

El proceso de Formalización está indisolublemente ligado al proceso de abstracción; sin embargo, son dos procesos bien diferenciados. El primero, como ya lo escribí, busca la forma ideal subyacente en los entes o en los procesos que enfrenta el matemático; el segundo despoja al objeto de todos aquellos elementos correspondientes a propiedades físicas, químicas, biológicas; en general materiales, que no cuentan para nada en la adopción de la *Forma*.

El proceso de *Abstracción* es fundamental en la matemática; seguramente a él se debe el calificativo de *pura* que suele dársele a esta ciencia.

El *Rigor*, que frecuentemente se confunde con dificultad no obstante ser bien diferentes (no necesariamente lo que es riguroso tiene que ser difícil), constituye un ingrediente clave en la estructuración y fundamentación del conocimiento matemático.

El término *Rigor* en Matemática podemos entenderlo en el sentido de precisión y exactitud; con él se busca la superación de relativismos o ambigüedades. Por ejemplo, la definición de límite de una función empleando el epsilon ($\varepsilon$) y el delta ($\delta$), conocida como la definición formal y rigurosa, supera las imprecisiones implícitas en la denominada presentación intuitiva del concepto basada en las expresiones "Estar cerca de" o "Estar próximo a".

Además de las necesidades de precisión el rigor también atiende necesidades de coherencia, formalización y equilibración en las teorías matemáticas. Por ejemplo, en la presentación intuitiva o informal de los conjuntos se dice, de entrada, que un conjunto es una *colección de objetos*; sin embargo, a continuación se definen conjunto vacío como el conjunto que no tiene elementos y conjunto unitario como el que tiene un solo elemento. Tenemos, pues, un conjunto sin elementos y otro con uno sólo después de que se nos ha dicho que conjunto es *colección* (más de uno). Si somos consecuentes con el tipo de presentación que estamos haciendo (intuitiva), debemos aceptar que aquí enfrentamos una incongruencia; un desajuste teórico. Este desajuste, puede superarse mediante una presentación rigurosa (no difícil) de la teoría de conjuntos en la cual, mediante un proceso de formalización, desmaterialicemos los objetos sobre los cuales se monta la teoría y los tomemos como objetos no definidos reduciéndolos a términos primitivos. Esto es lo que usualmente se hace en las presentaciones axiomáticas de la teoría. Hecho esto, y como no hay definición previa del término *conjunto*, podemos hablar con propiedad de los conjuntos vacío y unitario.

La *dificultad* en Matemáticas corresponde más a una herencia de tipo cultural que a una realidad de hecho. Se trata de una especie de estigma que se le ha "colgado" a la matemática desde hace muchísimos años y se difunde de generación en generación, la mayoría de veces, sin fórmula de juicio. Se convierte así la dificultad de la matemática en un prejuicio que desafortunadamente, los mayores alimentan en los jóvenes y los niños.

No pretendo caer en el extremo opuesto y calificarla, ingenuamente, como el ideal de sencillez y de facilidad. Se que al igual que toda disciplina científica asumida con responsabilidad tiene sus niveles de dificultad los cuales, contrario a todo lo que se dice, no se presentan en los contenidos de los niveles primario y secundario que generalmente son a los que acceden la inmensa mayoría de quienes difunden la dificultad de la matemática; sino en los niveles avanzados donde escasean los recursos intuitivos y fácticos para apoyar la reflexión teórica.

Considero que una buena parte de ese temor a la dificultad de la matemática está asociado a algunas prácticas pedagógicas (no del todo superadas) fundamentadas en la intimidación y el autoritarismo.