UNA DESIGUALDAD TRIGONOMETRICA A TRAVÉS DE LA INDUCCIÓN MATEMÁTICA

RICARDO CEDEÑO T. Y OLGA LUCIA YUSTES H.
Universidad Surcolombiana

A raíz del Seminario de investigación que realizan los estudiantes del Programa de Matemáticas y Física de la Universidad Surcolombiana encontramos un método utilizado por Cauchy. Aqui lo hemos adaptado para demostrar una desigualdad trigonométrica por Inducción Matemática.

Si α y β son ángulos que satisfacen las condiciones $0 \leq \alpha \leq 180^{\circ}$ y $0 \leq \beta \leq 1800$, entonces

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta \leq 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

Tenemos la igualdad en el caso que $\alpha = \beta$. Para demostrar esto podemos inicialmente mostrar que

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

En efecto:

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) +$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) =$$

$2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$. Ahora,

$\alpha-\beta$ satisface $-180^{\circ} \leq \alpha-\beta \leq 180^{\circ}$ esto lleva a que $\cos\frac{(\alpha-\beta)}{2}$ es positivo o es cero,

con valor máximo 1, así tenemos que $\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\frac{(\alpha+\beta)}{2} \cos\frac{(\alpha-\beta)}{2} \leq$

$2 \text{ sen } \frac{(\alpha+\beta)}{2}$.

Es natural pensar en la generalización de este resultado. Intuitivamente, tenemos que $\alpha_1, \alpha_2..., \alpha_n$ son ángulos que satisfacen las condiciones $0 \leq a\, \alpha_\iota \leq 180^{\circ}$ para todo $j = 1,2,...,n$ entonces

$\text{sen}\alpha_1 + \text{sen}\alpha_2 + ... + \text{sen}\alpha_n \leq n \text{ sen } n \frac{(\alpha 1+\alpha 2+...+\alpha n)}{2}$, la igualdad

ocurre Si $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n$

Para demostrar esta corazonada, lo trataremos desarrorando una técnica empleada por Cauchy para tratar demostraciónes por Inducción Matemática.

Si llamamos a Pn, la función proposicional $\text{sen}\alpha_1+\text{sen}\alpha_2+...+\text{sen}\alpha_n \leq n \text{ sen } n \frac{(\alpha 1+\alpha 2+...+\alpha n)}{2}$, sabemos ya que $P1$ y $P2$ son verdaderas.

Vamos a suponer que P_n, es válida para cualquier entero $n \geq 3$, y trataremos de establecer la veracidad de P_n-1.

Sea a $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n$- 1, n-1 ángulos no todos iguales, y definamos a

α_n como $\alpha_n = \frac{(\alpha 1+\alpha 2+...+\alpha n-1)}{n-1} =$ *Observemos que* $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_{n-1}+\alpha_n = (\alpha_1+\alpha_2+ ... + \alpha_{n-1}) + \frac{(\alpha 1+\alpha 2+ ... + \alpha n-1)}{n-1} = (\alpha 1+\alpha 2+...+\alpha n-1)(1+\frac{n}{n-1}) = (\frac{n}{n-1})(\alpha 1+\alpha 2+...+\alpha n-1) =$

$(\frac{n}{n-1})(n-1)\, \alpha n = n\alpha_n$. Así que $\text{sen}\alpha 1 + ... + \text{sen}_{n-1} + \text{sen}\alpha_n \leq n \text{ sen} n \frac{(\alpha 1+...+\alpha n)}{n}$

implica que $\text{sen}\alpha 1 + \text{sen}\alpha 2 + ... + \text{sen}\alpha_{n-1} + \text{sen}\alpha_n \leq n \text{ sen}\alpha_n = (n-1) \text{ sen } \frac{(\alpha 1+...+\alpha n)}{n-1}$

Ahora a partir de suponer que Pn es verdadera veamos que $P2n$ también lo es.

Consideremos $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_{2n}$ donde los α_j son ángulos cualesquiera, no todos iguales, satisfaciendo $0 \leq \alpha_j \leq 180^{\circ}$ entonces tenemos: $\text{sen}\alpha 1 + \text{sen}\alpha 2 + ... + \text{sen}\alpha_n \leq n \text{ sen } (\frac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n}{n})$, y, $\text{sen}\alpha_{n+1} + \text{sen}\alpha_{n+2} + ... + \text{sen}\alpha_{2n} \leq n \text{ sen } (\frac{\text{sen}\alpha n+1+\text{sen}\alpha n+2+...+\text{sen}\alpha 2n}{n})$, luego $\text{sen}\alpha_1 + \text{sen}\alpha_2 + ... + \text{sen}\alpha_{2n} \leq n \text{ sen } n (\frac{\alpha 1+...+\alpha n}{n}) + n \text{ sen } n (\frac{\alpha n+1 ...+\alpha 2n}{n}) = n[\text{sen } (\frac{\alpha 1+...+\alpha n}{n}) + \text{sen } (\frac{\alpha n+1+...+\alpha 2n}{n})] \leq 2n$

$[\text{sen}(\frac{\frac{\alpha 1+...+\alpha n}{n} + \frac{\alpha n+1+...+\alpha 2n}{n}}{2})]\; 2n \text{ sen } (\frac{\alpha 1+...+\alpha 2n}{n})$.

Este resultado lo podemos enunciar como:

Teorema. Si $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n$ Son ángulos que satisfacen las condiciones $0 \leq \alpha_j \leq 180^{\circ}$ para todo $j = 1,2,..., n$ entonces: $\text{sen}\alpha_1 + ... + \text{sen}\alpha_n + \leq n \text{ sen } (\frac{\alpha 1+...+\alpha n}{n})$ la igualdad sí y sólo sí $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n$.

Es bastante interesante e ingenioso el método desarrollado por Cauchy para demostrar teoremas utilizando la Inducción Matemática.

BIBLIOGRAFIA

1. Apostol, Tom., Calculus. Volumen I, Editorial Reverté, 1.972.

2. Cedeño, R., Penagos M., *La inducción en la educación secundaria,* XII Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística, 1.995.

3. Niven, Ivan, *Maxima and Minima Without Calculus,* The Mathematical Association of America, 1.981.

4. Yustes, 0. L., *Seminario de Investigación,* Universidad Surcolombiana, 1996.

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS, UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA, NEIVA - HUILA.