UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

infancias imágenes

http://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/infancias
DOI: 10.14483/16579089.13989

Imágenes de Investigación

Construcción del número desde el constructivismo radical y la teoría de Steffe: el caso de Ana*

The construction of number since radical constructivism and Steffe's theory. The case of Ana

Brigitte Johana Sánchez Robayo[1]

Para citar este artículo: Sánchez, B. J. (2020). Construcción del número desde el constructivismo radical y la teoría de Steffe. Infancias Imágenes, 19(1), 33-45

Recepción: 2019-03-14 **Aprobación:** 2019-12-16

Resumen

Tomando la teoría más representativa del constructivismo radical en educación matemática se realizó un estudio de caso en el que se dirigieron y analizaron tres entrevistas semiestructuradas a Ana, una niña de ocho años, para identificar su pensamiento matemático respecto al número. Mediante los esquemas y operaciones mentales de Steffe se identificó el progreso del pensamiento de la niña, caracterizado a través de sus técnicas para procesar el conteo. El estudio permitió ubicarla en la secuencia numérica tácitamente articulada (SNT) de Steffe. Algunos resultados presentados a partir del análisis de las transcripciones de las entrevistas son: la niña comprende los números como unidades compuestas abstractas, puede coordinar al menos dos niveles de unidades y, puede contar de a dos y de a tres entendiendo tales números como unidades compuestas abstractas; por lo que se concluye su nivel de SNT.

Palabras clave: numeración, procesos de aprendizaje, teoría educacional, cognición, coordinación de unidades, modelo.

Abstract

This study is based on the most representative radical constructivism theory in Mathematics Education. This is a case study, in which three semi-structured interviews were conducted, recorded and analyzed. The interviewee was Ana, an eight years old girl. The goal of the interviews was to identify Ana's mathematical thinking respect to the number. The framework is the mental schemes and operations proposed by Steffe. The progress of the girl's mathematical thinking was characterized through the analyses of her techniques for counting acts. This study allowed to ubicate her in Steffe's TNS (Tacitly-nested Number Sequence). Some findings from the analysis of the interviews' transcripts are: the girl understands the numbers as abstract composite units and she can coordinate at least, two levels of units. She also counts by twos and by threes using those numbers repetitively as composite abstract units. Thus, she is in the stage of TNS.

Keywords: numeracy, learning processes, educational theory, cognition, units coordination, model.

* La investigación se llamó "Pensamiento matemático desde las secuencias numéricas de Steffe". Inició en agosto de 2017 y concluyó en febrero de 2018. Soportada por la Universidad Distrital Francisco José de Caldas (Bogotá, Colombia) y la Universidad Virginia Tech (Virginia, Estados Unidos).

1 Profesora de la Facultad de Ciencias y Educación en la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Estudiante Doctoral de Virginia Politechnic and State University en Virginia (EE. UU.). Correo electrónico: bjsanchezr@udistrital.edu.co.

Introducción

Desde el constructivismo el conocimiento depende de la forma en que se entienden los fenómenos y sus relaciones. Este es subjetivo, temporal, progresivo y mediado social y culturalmente; también es activo y puede ser producido, demostrado y exhibido por quien aprende (Brooks y Brooks, 1999). Siguiendo a Doolittle y Hicks (2003), existe una creación activa de conocimiento de acuerdo a la modificación de pensamientos e ideas como resultado de experiencias presentes en contextos socioculturales.

Desde el constructivismo radical la formación del conocimiento depende de la organización propia de las interpretaciones dadas a experiencias internas y externas; su función consiste en la adaptación cognitiva y personal al entorno. En este sentido, construir conocimiento significa modificar esquemas previos de acuerdo a las experiencias y representaciones diarias de la realidad, que existe pero no es conocible por el sujeto (von Glasersfeld, 1984). El sujeto, entonces, hace coincidir sus representaciones internas con la realidad; valorando aquellos elementos útiles en el entorno en que se encuentra. En palabras de von Glasersfeld (1984) "desde un punto de vista pragmático, consideramos ideas, teorías y 'leyes de la naturaleza' como estructuras que están constantemente expuestas a nuestro mundo experiencial (del que las derivamos), y las conservamos o no" (p. 24).

Según este autor, el conocimiento no se refleja como una realidad objetiva, sino como un ordenamiento y la organización de un mundo constituido por la propia experiencia. La realidad es objetiva e interpretable por los sujetos que construyen su conocimiento, a partir de sus vivencias y un propósito consciente de construirlo. En este sentido, el conocimiento es subjetivo, "internamente coherente y externamente viable" (von Glasersfeld, 2001, p. 39), pues permite organizar las experiencias personales obtenidas, "desde el lugar biológico y social en el que se encuentra el sujeto en un momento determinado" (Hernández, 2008, p. 70).

Como premisas del constructivismo radical se encuentran: el propósito del conocimiento es crear y organizar la propia realidad experimental más que descubrir una ontológica (Ulrich *et al.*, 2014) y el conocimiento no es una acumulación pasiva, es un producto de la actividad del sujeto quien activamente interactúa en los procesos de percibir y autoorganizar sus esquemas.

Esta forma de entender la producción de conocimiento provee un camino hacia la comprensión del desarrollo del pensamiento, así como del papel de profesores y estudiantes durante el proceso de aprendizaje. Los profesores se comportan de manera interactiva (Moore *et al.*, 2015) y promueven conocimiento como orientadores más que como proveedores de información. Los estudiantes cambian sus esquemas como principales responsables de su aprendizaje "construyendo nuevo conocimiento a través de las adaptaciones al conocimiento previo" (Ulrich *et al.*, 2014, p. 328).

De esta forma, el conocimiento no es transmisible; es una construcción individual, producto de la adaptación interna que el sujeto realiza de la realidad que experimenta por medio de los sentidos. Así, se vuelve oscuro el camino del investigador que pretende identificar formas de construcción de conocimiento y procesos de aprendizaje, pues constituyen procesos individuales y cognitivos.

En educación matemática, investigadores como Ernst von Glasersfield, Leslie Steffe, Paul Cobb, Patrick Thompson y Catherine Ulrich (Steffe y Cobb, 1988b, 1988a; Steffe y Thompson, 2000; Ulrich, 2016; von Glasersfeld, 1981) han dedicado parte de sus estudios a la identificación del proceso de construcción del conocimiento matemático asumiendo el constructivismo radical como principio epistemológico. Como algunos de sus productos se dispone de la teoría de Steffe sobre la construcción del número (Steffe y Cobb, 1988a) así como el desarrollo del pensamiento multiplicativo (Steffe y Olive, 2009). Estos investigadores hacen uso de los modelos de segundo orden como herramienta principal para construir tales teorías bajo la premisa de que el conocimiento es construcción individual.

Según Ulrich *et al.* (2014), el modelo de primer orden es aquel que resulta de la organización, comprensión y control que el sujeto hace de la propia experiencia. Para el caso del aprendizaje de las matemáticas el modelo de primer orden consiste en las operaciones y conceptos matemáticos que la persona ha construido a partir de las adaptaciones logradas. Aunque no es posible tener acceso directo al pensamiento de los estudiantes, es posible construir modelos sobre sus formas de pensamiento y los cambios en ellas. Los modelos de segundo orden emergen como resultado de analizar retrospectivamente los desarrollos y procesos logrados por otro sujeto, "son modelos de las formas de operar matemáticamente de otros, que consideramos distintas a las propias" (Ulrich *et al.*, 2014, p. 330).

De acuerdo con el constructivismo radical, cada sujeto tiene un conocimiento diferente y, en consecuencia, los modelos de segundo orden serían todos diferentes. Sin embargo, "investigadores han encontrado importantes similitudes entre los modelos de segundo orden, especialmente entre estudiantes que se encuentran en un mismo nivel de razonamiento" (Ulrich *et al.*, 2014, p. 332). Para clarificar el término *nivel de razonamiento*, Ulrich *et al.* (2014) explican que los investigadores desarrollan constructos analíticos que permiten ubicar a los estudiantes en diferentes niveles. Por ejemplo, propiedades que Piaget e Inhelder denominaron como topológicas (Camargo, 2011) fueron usadas para diferenciar diferentes niveles de razonamiento en la identificación del espacio. La continuidad como constructo fue usada para identificar diferentes niveles en que los niños establecen la longitud de objetos por medio de comparaciones (Piaget *et al.*, 1960). En un primer nivel el niño concibe que dos objetos tienen la misma longitud, enfocándose en los puntos extremos: si coinciden, entonces tienen la misma longitud, independiente de si el objeto es recto. En otro nivel, el niño identifica que los objetos tienen distinta longitud una vez extiende el objeto curvo. En el último nivel, el niño identifica cuál de los objetos tiene mayor longitud sin extender el objeto curvo y ya no se fija en los puntos extremos para realizar la comparación.

Este artículo presenta un estudio realizado en el que se utilizó la teoría representativa del constructivismo radical en educación matemática y la teoría de *secuencias numéricas* de Steffe, construida en colaboración con Paul Cobb y Ernst von Glasersfeld. Se presentarán algunos elementos iniciales de la teoría, así como la descripción de las secuencias numéricas. Posteriormente, se encuentra el análisis realizado a una niña de ocho años, esto con la intención de usar los modelos de segundo orden para identificar su razonamiento en matemáticas. Finalmente, se concluye con la identificación del nivel de razonamiento de la niña, así como una reflexión acerca de las bondades y dificultades del modelo teórico asumido.

Esquemas y secuencias numéricas en la teoría de Steffe

De acuerdo con Steffe (1991, 1992, 1994), los niños construyen pensamiento matemático basados en la adaptación de sus esquemas previos. Piaget (citado en Steffe, 1994) define un esquema como "toda acción que es repetible o generalizable a través de la aplicación de nuevos objetos" (p. 17) mientras que para Vergnaud el término es "una organización invariante de acciones para cierto tipo de situaciones" (1994, p. 65). Dado que Vergnaud también considera las representaciones y los símbolos, añade invariantes operacionales desde los esquemas, como el núcleo de las representaciones. Adicionalmente, Norton y Wilkins (2012) establecen que un esquema es una estructura que constituye aquellos modelos por los cuales los estudiantes operan. De esta manera, un esquema determina una organización y puede variar dependiendo de la inclusión permanente de elementos nuevos.

Según Olive (2001), un esquema está compuesto por: un modelo de reconocimiento que le permite al niño identificar situaciones relevantes para tal esquema, acciones relacionadas con tales situaciones y los productos de tales acciones. De manera similar, Hackenberg y Tillema (2009) establecen que un esquema tiene tres partes "un mecanismo de asimilación, una actividad, y un resultado" (p. 2). En el proceso de construcción de conocimiento el sujeto asimila los objetos, sus experiencias y sus estructuras acomodando tales estructuras a las cosas que sean nuevas para él (Piaget, 1965).

En este marco dos procesos son importantes: la asimilación y la acomodación. El niño asimila una situación cuando reconoce que ella enmarca cierto tipo de actividad; ante tal reconocimiento, el niño se involucra en la actividad y produce un resultado que se encuentra en armonía con sus expectativas. Si el resultado no es el esperado, la asimilación no

ISSN 1657-9089 • Vol. 19, No. 1 (enero-junio 2020). pp. 33-45.

es posible y se genera un desequilibrio que genera la acomodación; en ella, el niño modifica sus esquemas a aquello nuevo que está reconociendo. Según Norton y Wilkins (2012), el mecanismo de asimilación activa el esquema en el que la situación fue asimilada; la actividad es "un conjunto ordenado de operaciones activadas" (p. 560), y el resultado es aquel esperado desde la forma de operar. En este marco los términos operaciones y estructuras incluidos por Piaget, hacen referencia a acciones interiorizadas (Norton y Wilkins, 2012) y sistemas coordinados de operaciones, respectivamente; además, la interiorización y la coordinación permiten la ampliación de la "esfera de la acción más allá del contexto en el cual fue abstraída" (p. 558).

El conteo y la fase prenumérica

Según Steffe (1991), el razonamiento cuantitativo inicia con la conceptualización de pulsos atencionales que constituyen elementos mediante los cuales el niño inicia su percepción acerca de *algo* que existe y observa. Son pulsos que llaman la atención del niño, ellos le dicen que allí hay *algo* que para tal momento no reconoce como unidad. La construcción de la unidad es una construcción mental necesaria para poder contar (Serrano y Denia, 1994) y de la que pueden emerger diferentes representaciones. El niño tiene un protoconcepto desarrollado desde el material sensorial y los pulsos centrados y no centrados (Steffe, 1991); la comparación entre tal protoconcepto y el ítem que experimenta es nombrado un acto de categorización —un ejemplo de categorización es el reconocimiento—. Siguiendo a Steffe (1991), a través de la categorización el niño puede crear un modelo que es un ítem unitario estructurado que al ser usado repetidamente forma una pluralidad; la conciencia de tal pluralidad se constituye en protonumeración. El niño ha interiorizado el modelo y se aleja de la pluralidad cuando recrea el ítem perceptual sin algún tipo de experiencia sensorial, entonces puede afirmarse que representa el material grabado porque ha usado su modelo más de una vez. Tal representación le permite crear una pluralidad figurativa y al comparar dos de ellas se activa de manera natural la actividad de contar.

Cuando un patrón perceptual ha sido internalizado, este se convierte en un patrón figural (Steffe, 1991). Al momento de unificar los elementos de un patrón figural tal operación produce patrones numéricos que anteceden a las secuencias numéricas en las que se tiene conciencia de la numerosidad. El reconocimiento de una numerosidad determinada es el primer paso hacia la interiorización de un esquema de conteo, necesario en los esquemas cuantitativos (Steffe, 1988). Así, el niño ha construido unidades perceptuales cuando necesita de elementos físicos para contar, mientras que las unidades figurales son representadas mentalmente, a pesar de requerir una asociación a un elemento perceptual (Ulrich, 2015).

Las operaciones y estructuras mencionadas corresponden a la fase prenumérica que se encuentra asociada con el período motor establecido por Steffe y Cobb (1988b). El niño puede usar patrones espaciales en sus actos de conteo aunque en el nivel perceptual requiere material físico (Thomas y Tabor, 2012) o alguna representación que le permita crear un material imaginario basado en las experiencias sensoriales, para el caso del nivel figural de conteo (Thomas y Tabor, 2012). El período verbal (Steffe y Cobb, 1988b) surge a través de la vocalización de algunas palabras numéricas (uno, tres, etc.). En este punto el niño aún no ha interiorizado el número cardinal de una colección y debe contar todos los ítems —incluso aquellos ya contados— al añadir otros a cierta colección.

Los tipos de unidades en la fase prenumérica son perceptuales y figurales (Ulrich, 2015). Los primeros corresponden al componente físico que el niño cuenta como "un suceso global que incluye señales visuales o auditivas, un acto motor como coger o señalar, la producción de palabras-número y el patrón de atención que estructura las señales perceptuales sensoriales en una 'cosa'" (Coello, 1991, p. 94). Las unidades figurales son representaciones que el niño usa para contar, reemplazando los ítems perceptuales.

Secuencias numéricas

Para Ulrich (2015) las secuencias numéricas son niveles de coordinación de unidades que representan puntos de giro importantes en la actividad numérica. El desarrollo de una secuencia numérica más sofisticada se encuentra asociado a la reorganización de la secuencia anterior; es decir, la acomodación que el niño hace de sus esquemas mentales (Steffe, 1992). Ulrich (2015 y 2016) y Olive (2001) describen las secuencias numéricas de Steffe de acuerdo con los esquemas aritméticos y de conteo así como los tipos de unidades que se identifican en cada secuencia. Los esquemas de conteo y los tipos de unidades constituyen los constructos analíticos mediante los cuales Steffe ubica los niños en diferentes niveles de razonamiento.

Secuencia numérica inicial (Initial Number Sequence) - SIN

La necesidad de contar todos los objetos en una colección conduce a la generación del primer esquema numérico de conteo (Olive, 2001). En este nivel el niño puede segmentar sus patrones (Steffe, 1988) y es consciente de unidades individuales, por lo que puede fragmentar colecciones de ítems unitarios. El número es visto como una composición numérica porque reconoce una secuencia de unidades abstractas y las cuenta, pero no reconoce el número como totalidad; pues, aunque es consciente de una secuencia limitada experiencial o atencionalmente, no la ha unificado concentrándola en la totalidad. El razonamiento aditivo se fortalece porque el niño puede descomponer los sumandos (viéndolos como unidades abstractas) en dos partes (Steffe y Cobb, 1988a). Adicionalmente, el niño tiene la posibilidad de contar de a dos aunque no reconoce dos como un ítem contable (Olive, 2001). Ulrich (2015) establece que el tipo de unidades en este nivel son las unidades aritméticas, un tipo de unidad que "resulta de la abstracción reflexiva de los estudiantes de su actividad de contar" (p. 4).

Secuencia numérica tácitamente articulada (Tacitly-nested Number Sequence) - SNT

La necesidad de hacer un seguimiento al conteo desde una cantidad diferente de uno, obliga al estudiante a reprocesar los ítems de unidades abstractas de su secuencia inicial numérica a ítems contables (Olive, 2001). Siguiendo a Ulrich (2015), "los estudiantes son tácitamente conscientes de la presencia de una secuencia numérica en otra" (p. 5). El niño construye unidades de composiciones abstractas (*abstract composite units*) porque la unidad es reconocida en conjunto. El acto de contar cumple entonces dos funciones: el de operar y el doble conteo (Steffe, 1992). El doble conteo emerge naturalmente en el niño como una práctica de asignar doble numeración a otros números cuando debe contar desde un número diferente a uno; por ejemplo, si debe contar tres a partir de ocho, entonces el niño verbalizará: ocho, nueve es uno, diez es dos, y 11 es tres, "once". El niño cuenta de a dos reconociendo al dos como una composición que puede ser usada para segmentar una secuencia. El tipo de unidad es la unidad compuesta (*composite unit*) porque el niño entiende, por ejemplo, el seis, como seis unidades de uno.

En este nivel el niño puede coordinar dos niveles de unidad: unidad compuesta e ítems unitarios. Norton y Boyce (2015) definen el término coordinación de unidades (*units coordinating*) como la actividad de incrustar una unidad compuesta en los elementos de una segunda unidad compuesta: "cuando la actividad mental es interiorizada, las acciones se organizan como operaciones dentro de unidades coordinando estructuras" (p. 212). Gracias a la construcción de unidades compuestas un número como el dos se vuelve un ítem contable cuando el niño cuenta de a dos (2, 4, 6, 8, …). En particular, la idea de agrupamiento empieza a aparecer porque el niño comprende que, por ejemplo: 1, 2, 3, 4 constituye la unidad compuesta de cuatro al igual que 85, 86, 87, 88.

Según Steffe (1992), la anterior comprensión es un primer paso para establecer unidades iterativas (iterating units). Al respecto, "las unidades compuestas son la base para construir razonamiento multiplicativo" (Norton y Boyce, 2015, p. 213).

Secuencia numérica explícitamente articulada (Explicitly Nested Number Sequence) - SNE

El niño puede interiorizar la SNT cuando se vuelve consciente de que los ítems de unidades abstractas son unidades iterables de uno; así, emerge la SNE.

ISSN 1657-9089 • Vol. 19, No. 1 (enero-junio 2020). pp. 33-45.

De esta forma, puede iterar unidades compuestas y entiende relaciones parte-todo, comprendiendo que un número menor es parte de un número entero mayor. Como Ulrich (2016) señala, un niño SNT puede encontrar ocho contando desde siete hasta 15, mientras que un niño SNE también puede pensar en ocho como un subconjunto de 15 y comprender que el residuo de 15 representa cuánto más grande es este que siete; así, el niño comprende que siete es parte del número entero 15. La relación de inclusión entre números es simbolizada (Steffe, 1994), lo que implica la comprensión de que un número como ocho representa una unidad compuesta que contiene 1 hasta 5, así como una unidad de 1 que puede ser iterada 5 veces. El niño también comprende que "uno está incluido en dos, dos en tres, tres en cuatro, y así sucesivamente" (Steffe, 1994, p. 28). De acuerdo con Ulrich (2016), el tipo de unidad es unidad iterable de uno y el niño puede coordinar tres niveles de unidades, por lo que "está incrustando unidades de uno [...] en unidades compuestas (segundo nivel), que se convierten en incrustaciones de unidades de unidades de unidades (tercer nivel)" (p. 3).

En este nivel las operaciones reversibles aparecen porque el niño comprende, por ejemplo, 6 como 1+1+1+1+1+1 (unidades iterables de uno) así como un seis. De igual forma, el niño entiende la suma y la resta como operaciones inversas y utiliza estrategias coordinando las operaciones con símbolos aritméticos (Steffe y Cobb, 1988a).

Secuencia numérica generalizada (Generalized Number Sequence) - SNG

En este nivel las unidades compuestas son iterables, "esta iterabilidad permite una descomposición y recomposición más fluida de unidades compuestas" (Ulrich, 2016, p. 37). El niño puede operar con una composición de unidades compuestas, lo que significa que ha interiorizado la coordinación de tres niveles de unidades y el tipo de unidades son compuestas iterables (Ulrich, 2016). El desarrollo de estructuras multiplicativas alcanza la construcción de conceptos complejos como el mínimo común múltiplo de 2 números (Olive, 2001).

Metodología

Se realizó un estudio de caso (Yin, 2003) en el que se diseñaron y aplicaron tres entrevistas semiestructuradas con una semana de tiempo entre cada aplicación. El estudio se realizó a una niña de ocho años, Ana, quien se encuentra en tercero de primaria. Desde hace dos años Ana vive en Virginia (EE. UU.), entiende y habla tanto español como inglés de manera fluida. Sus estudios en EE. UU. iniciaron en primero de primaria; expresa que disfruta las clases de matemáticas en el colegio y se describe así misma como buena en el área, pues usualmente completa los módulos más rápido que sus compañeros.

El propósito de las entrevistas era identificar la secuencia numérica en la que se encontraba Ana a través del análisis de sus actos de conteo. Debido a su grado escolar, la hipótesis era que Ana se encontraba en alguno de los niveles SNT o SNE.

La primera entrevista tuvo el propósito de confirmar si Ana había superado el nivel SIN; tenía 4 actividades diferentes de un total de 15 minutos para resolverse. La segunda entrevista fue diseñada para identificar los actos de conteo de Ana, así como su razonamiento aditivo; tenía 4 actividades que tomaban en promedio 20 minutos. En la tercera entrevista se revisaron actividades de suma y resta; eran 6 actividades con 18 minutos para resolverse en total.

Todas las entrevistas tuvieron un protocolo que iniciaba con la introducción en la que se explicaba el propósito general de la entrevista y se señalaba que no importaba si las respuestas eran correctas o incorrectas, pues el interés se enfocaba en la forma en que ella resolvía las situaciones. También se le solicitaba que mencionara todo aquello que pensara mientras resolvía las diferentes actividades. En el siguiente ejemplo se explica la notación usada para las transcripciones que se presentan en este documento.

Tabla 1. Notación de transcripciones

I2 [12:34 – 13:13] donde: I2 refiere a la segunda entrevista. De esta forma, I3 o I1 significa la tercer o primera entrevista respectivamente. [ ] el tiempo de la transcripción se indica usando paréntesis angulares.

Fuente: elaboración propia de la autora.

Para analizar la información se realizó un primer audio de cada entrevista, en el cual se registraron los segmentos que proporcionaban información respecto a los procesos de conteo de Ana; es decir, que se descartaron aquellos momentos en los que Ana se distraía o había alguna interrupción. Posteriormente, se transcribieron los segmentos registrados. La transcripción se realizó mediante la visualización y escucha en repetidas veces de las audio-grabaciones de las entrevistas. De esta forma, quedaban plasmado en texto las expresiones verbales y corporales que permitían identificar el modelo de pensamiento de Ana. Se realizó una codificación abierta (Saldaña, 2013) de cada transcripción, señalando aquellas partes que mostraban cierto indicador del modelo de pensamiento de Ana.

Resultados

Ana puede contar objetos ocultos, así como contar de a dos. Sin embargo, su conteo pareciese figurativo porque usa sus dedos levantándolos cerca de los objetos cuando debe contar objetos ocultos en un patrón lineal. Este planteamiento puede ser deducido de la siguiente tarea (inspirada en Thomas y Tabor, 2012, p. 181) en la que se le pidió adivinar cuántos puntos estaban ocultos en el siguiente arreglo ubicado en una mesa:

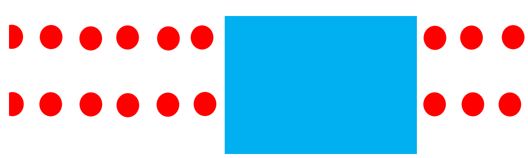

Figura 1. Primera actividad.

Fuente: elaboración propia de la autora.

I2 [00:48-3:47]

A: (señalando al mismo tiempo el primer grupo de puntos visibles con 2 dedos) 2, 4, 6, 8, 13. (Comienza de nuevo indicando las columnas visibles de puntos con un dedo) 2, 4, 6, 8, 12 (continúa contando al mismo tiempo que señala el recubrimiento) 14, 16, 18, 20, 21, 22, 23. (Mueve su cabeza de izquierda a derecha) no, no, no, (cierra la mano derecha y toca su frente. Empieza de nuevo señalando las columnas visibles de puntos con un dedo, verbaliza más rápido que antes) 2, 4. (Empieza de nuevo y ríe, señalando las columnas visibles de puntos con un dedo verbalizando más rápido) 2, 4, 6, 8, 10. (Empieza de nuevo señalando los puntos visibles) 1, 2, 4, 6, 8, (señalando algunos puntos visibles. Indica los mismos puntos verbalizando) 20, 21 (al tiempo señala el cubrimiento), 12, 14, 16, 18 y allí es 20, 22, 24. ¿24?

E: ¿24 están cubiertos? (moviendo la mano derecha en forma circular).

A: Sí.

E: ¿Sí?

A: Si. De hecho, no, no en realidad 24. (Indicando el recubrimiento con 2 dedos y tocándolo 6 veces) si, no realmente, pero creo 14 o 18.

E: ok, ¿por qué crees eso? 14 o 18.

A: Porque todos estos están en filas de 2 (señalando los puntos visibles al mismo tiempo) entonces si cuentas de a 2 te voy a dar no una respuesta exacta porque algunas veces puedes contar como (señalando al tiempo los puntos visibles con 2 dedos) 2, 4, 6, 8, 12 en lugar de 10 como que lo hace un poco difícil, pero es lo que creo.

E: Esta bien. ¿Cuántos tienes allí? (Indica el grupo de puntos visible que se encuentra a la izquierda del recubrimiento).

A: (al tiempo señala el primer grupo de puntos visibles con 2 dedos) 2, 4, 6, 8, 10, 12. ¿12?

E: ¿12? ¿Y allí? En esta parte (señala con la mano el grupo de puntos visible a la derecha del cubrimiento).

A: (señala al tiempo el segundo grupo de puntos visibles con un dedo) 2, 4, 6, 8. 8.

E: 8 ok. Entonces, ¿cuántos están cubiertos? Aquí y aquí (señala el primer y segundo grupo de puntos visibles).

A: (señala al tiempo el primer grupo de puntos visibles con 2 dedos) 2, 4, 6, 8, 10, 12. 12, (mira el segundo grupo indicándolo con su mano derecha y mirando en una dirección diferente mientras mueve su mano) ¿20? 1, 2, 3, 4 (verbaliza estos números rápidamente y mueve su mano). ¡Si! 20.

No está claro por qué Ana contó los puntos visibles muchas veces para encontrar cuantos estaban cubiertos. En este proceso de contar el mismo grupo de puntos siempre empezó contando desde el comienzo y perdía el cardinal. También se puede inferir que ella monitoreaba su actividad de conteo porque se dio cuenta de que había 24 puntos entre los combinados y visibles. En este episodio sus unidades parecen ser composiciones numéricas porque entiende que la cantidad de puntos que encontró es el resultado de la secuencia que usó contándolos. Así, Ana reconoce la numerosidad del grupo de puntos (Steffe, 1991). Sin embargo, ella no considera el número que ha encontrado previamente al intentar encontrar el total de puntos descubiertos, pues cuenta desde el inicio como si fuese la primera vez.

Los actos de conteo de Ana se clarifican en la siguiente actividad, en la que se le preguntó cuántas flores había en un arreglo rectangular de 28 flores (7 por fila y 4 por columna).

> I3 [00:48-2:01]
>
> A: (señala el arreglo moviendo la mano de izquierda a derecha sobre las primeras 2 filas y señalando otras 2 filas con un dedo de izquierda a derecha) ¿28?
>
> E: ¿Cómo lo sabes?
>
> A: Porque contando de a 2 primero 2 filas (indica las primeras 2 filas) y entonces, entonces yo cuento estos de a 2, entonces técnicamente como (señala cada 2 elementos en las primeras 2 filas) cuando tengo esta (indica la última flor de la segunda fila) yo solo empiezo con la segunda línea (señala las 2 últimas filas).
>
> E: ok, ¿entonces contaste de a 2 aquí? Entonces tú dices 2, 4, ¿sí? (señalando las primeras 2 flores en la primera columna y las siguientes 2 flores en la segunda columna).
>
> A: Sí.
>
> E: ¿Y ahora? (quita la última fila de flores) ¿Cuántas flores hay?
>
> A: (señala las primeras 4 columnas) 3, 6, 9, 12, 15, 18 (pone arriba su mano abierta) No sé cuándo miro una (toca las primeras 2 flores de la última columna) 19, 20. 21.
>
> E: ¿Cómo lo sabes?
>
> A: Conté de a 3 pero tengo problemas con estas (señala la última fila) yo solo cuento para estas últimas.

Ana pudo contar de a tres, lo que significa que 3 es una unidad compuesta abstracta. De forma similar 2 es una unidad compuesta abstracta para ella porque contó de a dos en la actividad de la primera transcripción. Así, pudo contar de a tres y por uno a la vez. Cuando contó de a 3 hasta 18 y continuó 19, 20 y 21, ella comprendía que 18 era la numerosidad de una parte del arreglo. Adicionalmente, mostró actividad de conteo reflexiva al contar por uno como una estrategia cuando se les estaba dificultando contar más de 18. No obstante, Ana no usó estructuras multiplicativas para encontrar la cantidad de puntos o de flores más rápido.

Cuando Ana se enfrentaba a un problema aditivo usualmente aplicaba el algoritmo usual para resolverlo como se muestra en la siguiente actividad (inspirada en Steffe, 1991):

> I1 [1:58- 2:51]
>
> E: Tengo 33 cubos en este frasco y ahora voy a adicionar 7 cubos (muestra el frasco y tira los 7 cubos en él). ¿Puedes decirme cuántos cubos tengo ahora en el frasco?
>
> A: ¿Pusiste 7?
>
> E: Sí.
>
> A: Y eran 32 o 33.
>
> E: Al comienzo el frasco tenía 33 cubos.
>
> A: ¿40?
>
> E: ¿40? ¿Por qué?
>
> A: Porque 3 más 7 igual 10, pongo 1 encima de este lugar y entonces tengo 1 más 4 (al tiempo indica la operación con el dedo como si tuviese un papel enfrente).

Respuestas similares se encontraron en situaciones aditivas con números de 2 dígitos. Ana también indicó la sustracción como una operación inversa de la adición casi de manera automática cuando se le preguntó sobre la solución de un número faltante en una sustracción. En la siguiente transcripción (actividad inspirada en Norton y Boyce, 2015), Ana debía contestar cuántas barras cafés necesitaba para completar tres barras verdes; previamente, había encontrado que tres barras cafés eran equivalentes a una verde.

> I2 [10:18-10:56]
>
> A: (Cuenta 9 barras café) Creo que 9.
>
> E: ¿Por qué?

A: Porque esta (toma una barra verde) voy a tomar esta, esta era 3, 2 de estas (sostiene 2 barras verdes) entonces 3 más, y esta tiene exactamente la misma longitud (muestra las 2 barras verdes), entonces 3 más 3 (al tiempo coloca verticalmente 2 barras verdes) igual 6 y 3 igual 9 (al tiempo coloca verticalmente las últimas 3 barras verdes juntándolas con las otras 2).

Que Ana haya contestado inmediatamente nueve al contar las barras cafés sin compararlas con las verdes confirma que usa unidades compuestas abstractas. También, ella puede coordinar dos niveles de unidades porque cuando se le preguntó cuántas barras cafés completaban una azul, contestó nueve asociando que tres verdes completaban una azul.

Otra tarea (basada en Steffe y Cobb, 1988a, p. 86) consistía en encontrar un sumando faltante. Allí Ana mostró su comprensión de tareas aditivas más claramente, basada en su habilidad de sumar sin usar algún tipo de material figurativo.

I3 [5:18-6:01]

E: (Escribe la expresión 5 + ___ = 14). ¿Puedes decirme cuál es el número faltante?

A: ¿Puedo escribirlo? (toma un marcador).

E: Sí.

A: (Escribe 9 sobre la línea).

E: ¿Cómo lo sabes?

A: Porque 4 más 9 es igual a 13, pero si adiciono 1 igual 14 y 4 más 1 igual 5 el cual me da 14.

Para encontrar el número Ana segmentó 14 en 13 y 1; también identificó 4 como parte de 5 que era otro número dado. Ella usó el hecho de que la diferencia entre 14 y 13 es la misma que entre 5 y 4 para asociar la suma que pensó de 4+__=13 con la expresión dada. Este es un indicador de la buena comprensión que tiene de relaciones aditivas entre números y muestra que puede particionar unidades compuestas abstractas. De hecho, también revela que ha iniciado una comprensión de la relación parte-todo (Steffe y Cobb, 1988a). En la tarea en la que debía encontrar el número faltante de la resta 61-__=49 (basado en Steffe, 1988) se confirma su comprensión de que un número más pequeño es parte de otro; allí Ana escribió el algoritmo para la suma 61+49 verticalmente. Cuando obtuvo 150, se dio cuenta de que la respuesta estaba equivocada.

I3 [14:05-15:29]

A: No sé cómo arreglar esto.

E: ¿Por qué sumaste 61 más 49? ¿Porque piensas que esa es la forma de encontrar el número que falta?

A: Porque si tú lo sumas te debería dar la respuesta porque yo digo esto (señala la suma y la tarea del sustraendo faltante), resta es lo opuesto a la adición, pero si tu sumas te debería dar el mismo número; pero, te debería dar el mismo número como, el número que debería ir acá (señala el sustraendo faltante) pero no creo que sea cien… (señala el número 150).

E: ¿Por qué crees que este (señala 150) no sea de pronto la respuesta?

A: Porque yo sé que 49 está en 61, 61 es más que 49 (escribe 61>49). Entonces, pero no mucho, entonces 150, no creo que sea realmente eso.

Sin embargo, este es el único indicador de su comprensión de la relación parte-todo en las diferentes formas de resolver las actividades. Cuando se le preguntó por una forma diferente de encontrar el número solucionó la resta 61-49 y encontró el número. Su explicación refirió al hecho que la resta es inversa a la suma sin reflexión alguna sobre cómo la relación entre 49, 61 y el sustraendo permite deducir que la sustracción es una forma posible de resolver la tarea. Ana mencionó que la resta es una operación inversa a la suma y usó esta relación automáticamente muchas veces al resolver restas, tal como se identifica más claramente en la siguiente actividad (inspirada en Steffe y Cobb, 1988b, p. 86).

I3 [3:52-4:52]

E: Si a 17 le quitas 6 es 11, ¿sí?

A: Sí.

E: Entonces, ¿cuánto es si a 17 le quitas 8?

A: 1, quiero decir no 1, ¿9? Sí, sí 9.

E: ¿Cómo lo sabes?

A: Porque yo sé que 9 más 8 es igual a 17, ¿cierto? ¿Era 17? (mira a la entrevistadora).

E: ¿9 más? ¿8?

A: 9 más 8 igual 17 y, y yo sé que aún mas es como que 9 más 8. Si yo cambio este alrededor (mueve su dedo en forma de semicircunferencia) como 2 menos, esta va a seguir siendo mi respuesta, quiero decir como 17 menos 9 igual 8, es solo cambiar, pero por los mismos números.

Ana mencionó una relación inversa entre sustracción y adición explicando su respuesta. Sin embargo, su explicación refería la posición de los números al expresar el cambio del sustraendo como un sumando. Esta clase de relación explica porque sumó 49 más 61 en la otra actividad. De acuerdo a la última tarea y a otras, cuando Ana cambia la sustracción por una adición su estrategia al resolver la sustracción es la estrategia inversa (*inverse strategy*) mencionada por Steffe y Cobb (1988b) y descrita de la siguiente forma: "Primero, el minuendo es descompuesto en las partes que corresponden al sustraendo y a la diferencia desconocida. El minuendo es entonces visto como la suma del sustraendo y la diferencia desconocida" (p. 253). Ana siempre expresó la sustracción como una suma; no obstante, no hay evidencia que indique que lo hacía porque descomponía el minuendo.

En una tarea (inspirada en Norton y Boyce, 2015) Ana debía coordinar diferentes tipos de unidades. En el análisis se confirmó que aunque maneja unidades compuestas abstractas, utiliza cantidades conocidas contables.

Previo a lo presentado en la siguiente transcripción, Ana dedujo que tres barras cafés equivalían a una verde y tres barras verdes correspondían a una azul.

I2 [12:35-14:50]

E: Voy a poner estas 2 barras azules. ¿Sabes cuántas barras azules necesito para completar toda esta longitud? (señala la línea de 2 barras azules).

A: (toma 3 barras verdes) ¿Si necesito más puedo tomar más?

E: Sí claro. Lo que necesites.

A: (Toma otras 3 barras verdes, organiza las 6 barras en 2 grupos de 3 comparando el tamaño de los grupos y toca cada una de las barras verdes) ¿18? (sostiene las 6 barras verdes) Bueno 6, no 18, 6 (muestra las 6 barras verdes).

E: ¿6?

A: Sí, exactamente estas.

E: ¿6 de estas? (señala las barras verdes que Ana está sosteniendo).

A: Sí.

E: ok, ¿y cuántas son de la más pequeña?, de esta (sostiene una barra café) para completar esta (señala la línea de 2 barras azules).

A: (aparta 5 barras verdes, toma 3 cafés y las pone junto a la verde que queda) solo (mirra la barra verde un momento y toma más barras cafés creando una línea hasta completar 18) 16, 17, 18, 18.

E: ¿18? ¿Cómo lo sabes?

A: Porque las verdes (toma la barra verde y la pone junto a las 3 barras café en línea) y 3, entonces si las combino todas estas juntas (sostiene 6 barras verdes en sus manos) voy a hacer como 18 allá (…).

I2 [16:57-18:02]

E: ¿Cuántas barras azules necesitamos para completar esta longitud? (señala una línea de 9 barras verdes).

A: Ok, sí (toma 3 barras café y las pone junto a una barra verde, quita las 3 barras café y toca la tercer barra verde separándola un poco de la cuarta, toca la sexta y toca las últimas 3 barras verdes). ¡3!

E: ¿3? ¿Por qué?

A: Porque estas (señala las 3 primeras barras verdes) son iguales a las barras azules (toma una azul) son 3, igual 3 de estas (indica sobre las 3 primeras barras verdes) y entonces estas otras 3 (indica los 3 grupos de barras verdes con la azul) son 3 entonces 3, 3, 3 (señalando cada grupo al tiempo que menciona cada 3), entonces son del exacto mismo tamaño, creo que va a ser 3.

Ana ya conocía la respuesta cuando vio las 2 barras azules. Ella movió las barras para completar la línea y mostrar su respuesta. Este es otro elemento que confirma que Ana usa unidades compuestas abstractas. Aparentemente ella puede trabajar con tres niveles de unidades, lo que se evidencia cuando puede vincular las barras cafés con las azules. Sin embargo, emplea las barras cafés para compararlas con una verde antes de contestar que 18 barras café equivalían a 2 azules. Tal situación genera dudas sobre la coordinación que hace de tres niveles de unidades. Como las situaciones de las dos primeras transcripciones, Ana no consideró la composición una vez la encontró, ella volvió al inicio en sus actos de conteo y no hizo la coordinación mental para asociar la composición con la cantidad de elementos que tenía. Además,

ISSN 1657-9089 • Vol. 19, No. 1 (enero-junio 2020). pp. 33-45.

el hecho que dijera 18 en la pregunta en la que se le preguntó cuántas barras verdes se requerían para completar dos azules, es un indicador de que comprendió la relación entre la barra café y la azul sin la mediación de la verde. Así, ella puede coordinar tres niveles de unidades (Norton y Boyce, 2015), pero no ha interiorizado tal coordinación. Su comprensión sobre 3 como una unidad compuesta abstracta la permite reversar las relaciones entre las barras y encontrar que 3 barras azules equivalían a 9 verdes.

Conclusión y discusión

La inclinación de Ana por resolver las actividades usando algoritmos comunes dificulta la comprensión de su pensamiento matemático. Ella mostró esquemas preestablecidos que aparecían instantáneamente en sus actos de conteo cuando resolvía tareas aditivas. Sin embargo, las entrevistas permitieron la identificación de algunos elementos clave en sus esquemas de conteo.

Cuando Ana tiene arreglos con pocos elementos cuenta los objetos sin un esquema avanzado; lo que es propio de un esquema de conteo de un SNT o SNE. Aunque cuenta muchas veces desde el comienzo sin considerar tal número como punto de partida, incluso conociendo la numerosidad del arreglo, a lo largo de las entrevistas se evidenció que entiende los números como unidades compuestas abstractas.

Además, puede coordinar al menos dos niveles de unidades pues cuenta números diferentes como unidades compuestas y unidades de 1 a la vez. Puede hacer la operación de integración progresiva (Steffe y Cobb, 1988a) porque su comprensión de las unidades es más que composiciones numéricas y puede referir un número y su numerosidad específica estructurada como "una parte" y la "otra parte". Ana también puede contar de a dos y de a tres usando tales números repetidamente como composiciones numéricas abstractas. Así, Ana se encuentra en el nivel de *secuencia numérica tácitamente articulada* (SNT).

Durante las entrevistas hubo elementos que sugirieron que su nivel podría ser *secuencia numérica explícitamente articulada* (SNE). En particular el surgimiento de la relación parte-todo y la coordinación de tres niveles de unidades. Sin embargo, no hay evidencia de que las unidades compuestas abstractas sean iterables para ella. Adicionalmente, aunque siempre expresa que la sustracción es inversa a la adición, es un acto de memoria. Ella usa tal relación solamente para cambiar el orden de la información que tiene. Retoma el algoritmo y cambia el orden sin una clara comprensión de las razones que expliquen la utilidad de tal cambio. De hecho, algunas veces el algoritmo obstaculiza su pensamiento; Ana usa la adición para encontrar números faltantes en una actividad de sustracción, pero no descompone el minuendo. Así, la evidencia no permite concluir que comprende la relación entre la adición y la sustracción más allá del hecho memorístico de que son operaciones inversas.

Para ayudar a Ana a alcanzar el nivel SNE se podrían introducir algunas actividades multiplicativas que envuelvan procesos aditivos y que muevan su pensamiento hacia un camino diferente del algoritmo. De esta forma, su pensamiento se abriría a nuevas posibilidades en las que se fortalezca las unidades compuestas abstractas, lo que le permitiría usarlas incluso en actos de conteo simple como puntos iniciales para contar. También se le pueden proponer actividades de sustracción que le fomenten una comprensión mejor de la relación entre la adición y la sustracción. Siguiendo a Norton y Boyce (2015), se deberían proponer actividades que promuevan la interiorización de la coordinación de tres niveles de unidades, que permita manejar cuatro niveles de unidades.

El modelo teórico de Steffe permitió identificar los esquemas de conteo de Ana, ubicándola en el nivel SNT. No obstante, el análisis arrojó resultados en los que Ana presenta algunos elementos propios del nivel SNE. No es entonces del todo clara la conclusión de que el nivel de Ana es SNT, ¿está en el nivel SNT acercándose al SNE? Una vez identifique la descomposición del minuendo y la relación entre sustracción y suma, ¿está en un nivel bajo de SNE? Ulrich y Wilkins (2017) identificaron que varios niños permanecen durante años en el nivel SNT y que, por ejemplo, había niños que podían usar unidades compuestas de diversas maneras sin haberse familiarizado a ellas y sin encontrarse en ENS. En contraste, estos autores introducen dos subniveles a la SNT: bSNT (eTNS, early TNS) en el que se ubicarían niños que estén en un nivel básico en SNT; y aSNT (advanced TNS) en el que los niños pueden hacer operaciones avanzadas del nivel SNT. Queda abierta la exploración de estos subniveles en niños como Ana y mayores, identificando no solo relaciones aditivas sino también multiplicativas.

Finalmente, la forma de entender la construcción del conocimiento desde el constructivismo radical permite, como en este caso, entender desde los modelos de segundo orden cómo piensan los sujetos y cómo desarrollan conocimiento matemático. Esto permite el diseño de actividades de enseñanza en las que se consideren las asociaciones que el niño hace durante la acomodación, o particularmente aquellas asimilaciones que estructuran su pensamiento. Sin embargo, la construcción de un modelo acerca de cómo piensa el otro constituye interpretaciones de lo que el otro hace y de cómo entiende lo que está haciendo. En esta medida, el modelo debe estar sujeto a cierto nivel de objetividad en las distintas interpretaciones logradas en los diversos análisis, como los múltiples casos que permitieron que Steffe y colaboradores construyeran el modelo teórico asumido en este estudio.

Agradecimientos

Agradezco a los profesores Catherine Ulrich de Virginia Tech y José Torres Duarte de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas por las sugerencias dadas en los diferentes momentos de elaboración del artículo.

Referencias

Brooks, J. J. G. y Brooks, M. G. (1999). In search of understanding: The case for constructivist classrooms. *Association for Supervision and Curriculum Development*, 1-DOI: 10.1007/s13398-014-0173-7.2

Camargo, L. (2011). El legado de Piaget a la didáctica de la geometría. *Revista Colombiana de Educación*, 60, 41-60.

Coello, M. T. (1991). El proceso de contar: una perspectiva cognitiva. *Estudios de Psicología*, 46, 91-105. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=66084

Doolittle, P. y Hicks, D. (2003). Constructivism as a theoretical foundation for the use of technology in social studies. *Theory and Research in Social Education*, *31*(1), 72-104.

Hackenberg, A. J. y Tillema, E. S. (2009). Students' whole number multiplicative concepts: A critical constructive resource for fraction composition schemes. *Journal of Mathematical Behavior*, *28*(1). 1-18. DOI: 10.1016/j.jmathb.2009.04.004

Hernández, G. (2008). Los constructivismos y sus implicaciones para la educación. *Perfiles Educativos*, *30*(122), 38-77. http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0185-26982008000400003&lng=es&tlng=es

Moore, T. J., Guzey, S. S., Roehrig, G. H., Stohlmann, M. S., Park, M. S., Kim, Y. R. y Teo, H. J. (2015). Changes in faculty members' instructional beliefs while implementing model-eliciting activities. *Journal of Engineering Education*, *104*(3), 279-302. DOI: 10.1002/jee.20081

Norton, A. y Boyce, S. (2015). Provoking the construction of a structure for coordinating n+1 levels of units. *Journal of Mathematical Behavior*, 40, 211-232. DOI: 10.1016/j.jmathb.2015.10.006

Norton A. y Wilkins J. L. M. (2012). The splitting group. *Journal for Research in Mathematics Education*, 43(5), 557-583. DOI: 10.5951/jresematheduc.43.5.0557

Olive, J. (2001). Children's number sequences: an explanation of Steffe's constructs and an extrapolation to rational numbers of arithmetic. *The Mathematics Educator*, 11, 4-9. http://math.coe.uga.edu/TME/Issues/v11n1/2olive.pdf

Piaget, J., Inhelder, B. y Szeminska, A. (1960). *The child's conception of Geometry*. Basic Books.

Piaget, J. (1965). *The child's conception of number. The Norton Library*. Norton Library. DOI: 10.2307/2088144

Saldaña, J. (2013). *The coding manual of qualitative researchers*. Sage Publications.

Serrano, J. M. y Denia, G. (1994). ¿Cómo cuentan los niños? Un análisis de las teorías más relevantes sobre la construcción de los esquemas de conteo. I. U. Instituto de Ciencias de la Educación.

Steffe, L. P. y Cobb, P. (1988a). Strategies for finding sums and differences: Tyrone, Scenetra and Jason. En L. Steffe y P. Cobb (eds.), *Construction of arithmetical meanings and strategies* (pp. 252-283). Springer.

Steffe, L. P. y Cobb, P. (1988b). The construction of abstract unit items: Tyrone, Scenetra, and Jason. En L. Steffe y P. Cobb (eds.), *Construction of arithmetical meanings and strategies* (pp. 65-95). Springer.

Steffe, L. P. y Olive, J. (2009). *Children's fractional knowledge*. Springer.

Steffe, L. P. y Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En R. Lesh y A. E. Kelly (eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267-307). Erlbaum.

Steffe, L. P. (1988a). Children's construction of number sequences and multiplying schemes. En J. Hiebert y M. Behr (eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 119-140). National Council of Teachers of Mathematics.

Steffe, L. P. (1988b). Lexical and syntactical meanings Tyrone, Scenetra and Jason. En L. Steffe y P. Cobb (eds.), *Construction of arithmetical meanings and strategies* (pp. 148-234). Springer.

Steffe, L. P. (1991). Operations that generate quantity. *Learning and individual differences*, *3*(1), 61-82. DOI: 10.1016/1041-6080(91)90004-K

Steffe, L. P. (1992). Schemes of action and operation involving composite units. *Learning and Individual Differences*, *4*(3), 259-309. DOI: 10.1016/1041-6080(92)90005-Y

Steffe, L. P. (1994). Children's multiplying schemes. En J. Guershon, Harel y Confrey (eds.), *Development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 3-41). State University of New York Press.

Thomas, J. N. y Tabor, P. D. (2012). Developing quantitative mental imagery. *Teaching Children Mathematics*, *19*(3), 174-183. https://www.jstor.org/stable/10.5951/teacchilmath.19.3.0174

Ulrich, C., Hackenberg, A. J., Tillema, E. y Norton, A. (2014). Constructivist model building: Empirical examples from mathematics education. *Constructivist Foundations*, *9*(3), 328-339.

Ulrich, C. y Wilkins, J. L. (2017). Using written work to investigate stages in sixth-grade students' construction and coordination of units. *International Journal of STEM Education*, *4*(23). DOI: 10.1186/s40594-017-0085-0

Ulrich, C. (2015). Stages in constructing and coordinating units additively and multiplicatively (Part 1). *For the Learning of Mathematics*, *35*(3), 2-7.

Ulrich, C. (2016). Stages in constructing and coordinating units additively and multiplicatively (Part 2). *For the Learning of Mathematics*, *36*(1), 34-39.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: what and why? En Guerson, Hareal y Confrey (eds.), *Development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 41-60). State University of New York Press.

von Glasersfeld, E. (1981). An attentional model for the conceptual construction of units and number. *Journal for Research in Mathematics Education*, *12*(2), 83-94.

von Glasersfeld, E. (1984). An introduction to radical constructivism. En P. Watzlawick (ed.), *The invented reality* (pp. 17-40). Norton.

von Glasersfeld, E. (2001). The radical constructivist view of science. *Scientific Reasoning Research Institute University of Massachusetts*, *6*(1), 1-12. DOI: 10.1023/A:1011345023932

Yin, R. K. (2003). *Case study research* (3ª ed.). Sage Publications.

ISSN 1657-9089 • Vol 19, No 1 (enero-junio 2020). pp. 33-45