# Juegos y Rarezas Matemáticas

# Curiosidad del número combinatorio (concepto de orden)

# Curiosity of the combinatorial number (concept of order)

Juan Patricio Ondo Ona Ayetebe

Revista de Investigación



Volumen X, Número 1, pp. 115–126, ISSN 2174-0410 Recepción: 5 Mar'20; Aceptación: 25 Mar'20

## 1 de abril de 2020

### Resumen

En este artículo se muestran una manera curiosa en la que se pueden comportar los números combinatorios dando lugar a un nuevo concepto curioso (orden de número combinatorio). Además del orden, se analiza la suma, el binomio y algunos números primos interesantes empleando dicho concepto.

Palabras Clave: Curiosidad del número combinatorio, orden del número combinatorio.

### **Abstract**

This article shows a curious way in which combinatorial numbers can behave giving rise to a curious new concept (order of combinatorial number). In addition to the order, the sum, the binomial and some interesting prime numbers using this concept are analyzed.

Keywords: Curiosity of the combinatorial number, order of the combinatorial number.

# 1. Un producto de números combinatorios

> Se considera:  $c_m^n \cdot c_n^k = {m \choose n} \cdot {n \choose k}$ ;

Si tomamos como referencia los índices superior e inferior, observamos que el índice superior del primer factor coincide con el índice inferior del segundo factor.

Como sabemos los números combinatorios se calculan de la siguiente manera:

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}; \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Entonces podemos establecer que:

$$c_m^n \cdot c_n^k = {m \choose n} \cdot {n \choose k} = \frac{m!}{n!(m-n)!} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Y a ese producto lo denotamos por:

$$\binom{m}{n}_{k}$$

Por lo tanto tenemos que:  $\binom{m}{n} = \frac{m!}{k!(m-n)!(n-k)!}$  siendo  $m \ge n \ge k$ 

Donde:  $m \to \text{indice superior}, n \to \text{indice medio}, k \to \text{indice inferior}$ 

## En conclusión:

El producto de dos números combinatorios cuyo índice superior del primer factor es igual al índice inferior del segundo factor, y el índice inferior del primer factor es igual al índice superior del segundo factor, es otro número al que llamaremos número combinatorio de orden 2 cuyo índice superior es el mayor de los índices superiores y cuyo índice medio es el índice común (que tienen en común) y cuyo índice inferior es el menor de los índices inferiores.

$$\binom{m}{n} \cdot \binom{n}{k} = \binom{m}{n}$$

Definición: Se llama número combinatorio de orden 2 a:

$$\binom{m}{n}$$

Ejemplos:

$$\binom{6}{6} \cdot \binom{9}{6} = \binom{9}{6} = \frac{9!}{6!(9-6)!(6-6)!} = 84$$

$$\binom{7}{3} \cdot \binom{3}{1} = \binom{7}{3} = \frac{7!}{1!(7-3)!(3-1)!} = 105$$

$$\binom{8}{5} \cdot \binom{9}{8} = \binom{9}{8}; \binom{11}{9} \cdot \binom{9}{3} = \binom{11}{9}; \binom{k}{s} \cdot \binom{s}{x} = \binom{k}{s} k \ge s \ge x$$

#### Igualdad de números combinatorios de orden 2 2.

También podemos proceder a establecer la igualdad, por ejemplo, si tenemos un número combinatorio de tipo:

$$\binom{m}{n}_k$$

Y otro de tipo:

$$\binom{m}{n}$$

**Entonces:** 

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{k!(m-n)!(n-k)!}$$

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{(n-k)!(m-n)![n-(n-k)]!} = \frac{m!}{k!(m-n)!(n-k)!}$$

Por lo tanto serán iguales cuando los índices superiores son iguales al igual que los índices medios y la suma de los índices inferiores sea igual al índice medio.

$$\binom{m}{n} = \binom{m}{n}$$

**Ejemplos** 

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 18 \\ 15 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 15 \\ 7 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 23 \\ 21 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 21 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ x \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 13 \\ x \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ x \\ 4 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = x + 2$$

$$3 + x = 5 \rightarrow x = 2 \qquad 5 + 4 = x \rightarrow x = 9 \qquad \frac{4!}{1!(4-2)!(2-1)!} = x + 2 \rightarrow x = 10$$

Esta expresión está relacionada con la expresión de la propiedad de igualdad de los números combinatorios normales (orden 1).

Sabemos que: 
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Al ser iguales podemos multiplicar a la expresión  $\binom{m}{n}$  por  $\binom{n}{k}$  y por  $\binom{n}{n-k}$  obtenemos:

$$\binom{m}{n} \cdot \binom{n}{k} = \binom{m}{n} \cdot \binom{n}{n-k}$$

Con lo establecido en la sección 1 obtenemos que:

$$\binom{m}{n} = \binom{m}{n}$$

# 3. Suma de números combinatorios de orden 2

Para la suma, si tenemos un número combinatorio de tipo:

$$\binom{m}{m}$$

Y otro de tipo:

$$\binom{m}{m}$$

**Entonces:** 

$$\binom{m}{m} + \binom{m}{m} = \binom{m+1}{m+1}$$

Lo vemos:

$$\begin{split} \frac{m!}{n!(m-m)!(m-n)!} + \frac{m!}{(n+1)!(m-m)!\left[m-(n+1)\right]!} \\ &= \frac{m!}{(n+1)!\left[(m+1)-(m+1)\right]!\left[(m+1)-(n+1)\right]!} = \\ &= \frac{m!}{n!0!(m-n)!} + \frac{m!}{(n+1)!0!(m-n-1)!} = \frac{(m+1)!}{(n+1)!0!(m-n)!} \end{split}$$

Entonces tenemos:

$$\frac{m!}{n! \, 0! \, (m-n)!} + \frac{m!}{(n+1)! \, 0! \, (m-n-1)!} = \frac{(m+1)!}{(n+1)! \, 0! \, (m-n)!}$$

$$\frac{m!}{n! \, (m-n)(m-n-1)!} + \frac{m!}{(n+1)! \, (m-n-1)!} = \frac{(m+1)m!}{(n+1)! \, (m-n)(m-n-1)!}$$

$$\frac{m! \, [(n+1)! + n! \, (m-n)]}{n! \, (n+1)! \, (m-n)(m-n-1)!} = \frac{(m+1)m!}{(n+1)(m-n)(m-n-1)!}$$

$$\frac{(m+1)! + n! \, (m-n)}{n!} = m+1 \rightarrow \frac{n! \, [(n+1) + (m-n)]}{n!} = m+1 \rightarrow n+1 + m-n = m+1$$

Sumando y restando nos queda: m = m

Se ha deducido que: la suma de dos números combinatorios cuyos índices superiores y medios son iguales entre sí y los índices inferiores difieren en una unidad, da como resultado otro número combinatorio cuyos índices superior y medio son mayores en una unidad a los índices superiores y medios de los sumandos y cuyo índice inferior es el mayor de los índices inferiores.

Ejemplos:

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Al igual que la igualdad de los números combinatorios de orden 2, la suma también está relacionada con los números combinatorios normales (orden 1) ya que:

$$\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \binom{m+1}{n+1}$$

#### Un triángulo de números combinatorios de orden 2 4.

En esta sección vamos a desarrollar un análogo del triángulo de Pascal o Tartaglia para los números combinatorios de orden 2.

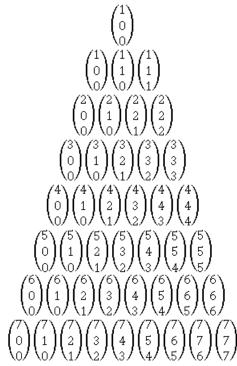


Figura 1: Triángulo de Tartaglia para números combinatorios de orden 2.

```
1
1 1 1
1 2 2 1
1 3 6 3 1
1 4 12 12 4 1
1 5 20 30 20 5 1
1 6 30 60 60 30 6 1
1 7 42 105 140 105 42 7 1
```

Figura 2: resultados de la figura 1 aplicando la fórmula para números combinatorios de orden 2

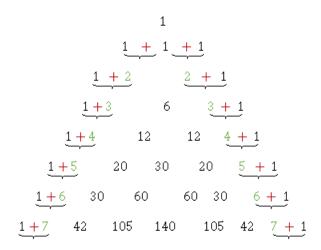


Figura 3: el primer término de una fila y el segundo término de la misma da como resultado el segundo término de la fila siguiente

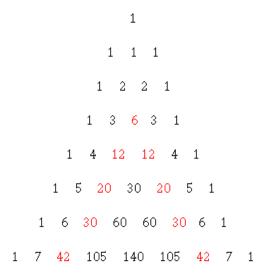


Figura 4: el producto entre el segundo término de una fila y el segundo término de la fila situada debajo de ella da como resultado el tercer término de la fila situada debajo de ella

```
1

1 1 1

1 2 2 1

1 3 6 3 1

1 4 12 12 4 1

1 5 20 30 20 5 1

1 6 30 60 60 30 6 1

1 7 42 105 140 105 42 7 1
```

Figura 5: resto de números que no se obtienen por los criterios anteriormente mencionados

Para la obtención de los números restantes basta observar que todos los números equidistantes son iguales debido a la propiedad vista en la sección 2 por lo que basta con una pequeña fórmula para obtenerlos, por ejemplo para obtener el 30 vemos que se encuentra en la posición número 3 si contamos desde la izquierda o desde la derecha sin tener en cuenta las unidades, en este caso comenzaríamos contando desde el número 5.

Ahora si contamos otra vez desde la derecha o desde la izquierda empezando desde el segundo término sin tener en cuenta las unidades el número 30 ocuparía la posición número 2.

De donde:

5 es el primer término de la derecha o la izquierda (sin tener en cuenta las unidades),

3 es la posición que ocupa el número 30

Y por último le añadimos el término factorial a la posición que ocupa el número 30 respecto al segundo término (sin tener en cuenta las unidades), es decir, posición número 2 (2!) y entonces nos quedaría:

$$J = \frac{n!}{a! \, b!}$$

Siendo:

n el primer término localizado en la derecha o en la izquierda (sin tener en cuenta las unidades)

*a* el número que se obtiene al restar el primer término de la derecha o de la izquierda (sin tener en cuenta las unidades) con respecto a la posición que ocupa el número buscado respecto al mismo

*b* el número que se obtiene al contar desde el segundo (sin tener en cuenta las unidades) hasta el número o término buscado.

Por ejemplo, el 30:

$$n! = 5!$$
,  $a! = (5-3)! = 2!$ ,  $b! = 2!$   
$$J = \frac{5!}{2!2!} = 30$$

Para 60, 105 y 140:

$$n! = 6!$$
,  $a! = (6-3)! = 3!$ ,  $b! = 2!$ 

$$J = \frac{6!}{3!2!} = 60$$

$$n! = 7!$$
,  $a! = (7-3)! = 4!$ ,  $b! = 2!$ 

$$J = \frac{7!}{4!2!} = 105$$

$$n! = 7!$$
,  $a! = (7-4)! = 3!$ ,  $b! = 3!$ 

$$J = \frac{7!}{3!3!} = 140$$

Al ser todos los números equidistantes iguales, al obtener uno se conoce inmediatamente el otro.

Nota: Esta forma de sacar números no es eficiente, ya que al final tenemos que hacer factoriales.

Otra forma mucho más fácil de obtener los números sería: primero dividiremos el triángulo en filas.

$$1 \rightarrow fila \ 0$$

$$1 \ 1 \ 1 \rightarrow fila \ 1$$

$$1 \ 2 \ 2 \ 1 \rightarrow fila \ 2$$

$$1 \ 3 \ 6 \ 3 \ 1 \rightarrow fila \ 3$$

$$1 \ 4 \ 12 \ 12 \ 4 \ 1 \rightarrow fila \ 4$$

$$1 \ 5 \ 20 \ 30 \ 20 \ 5 \ 1 \rightarrow fila \ 5$$

$$1 \ 6 \ 30 \ 60 \ 60 \ 30 \ 6 \ 1 \rightarrow fila \ 6$$

$$1 \ 7 \ 42 \ 105 \ 140 \ 105 \ 42 \ 7 \ 1 \rightarrow fila \ 7$$

Figura 6: triangulo dividido en filas

Conociendo ya la manera en la que se distribuyen las filas, vamos a proceder a obtener los números que arriba habíamos encerrado; por ejemplo, el 30 (figura 5), en un triángulo.

Primero si no hubiéramos colocado ya el **30** sabríamos que el número que estamos buscando se encuentra en la fila **5**, y de antemano ya habríamos obtenido los números de la fila **4**, por lo que para obtener el treinta, basta con sumar **12+12** y dividirlo entre **4** ya que son de la fila **4**, y por último multiplicar por **5** ya que el número que queremos obtener es la fila **5**. (Figura **7**)

```
1
          1 1 1
         1 2 2 1
        1 3 6 3 1
      1 4 12 12 4 1
    1 5 20 30 20 5 1
   1 6 30 60 60 30 6 1
1 7 42 105 140 105 42 7 1
          Figura 7
```

Para el 60, haríamos lo mismo, sumar 20+30 al ser números de la fila 5 lo dividimos entre 5 y por último, el resultado lo multiplicamos por 6, ya que el número que queremos obtener se encontraría en la fila 6. (Figura 8).

```
1 1 1
         1 2 2 1
        1 3 6 3 1
      1 4 12 12 4 1
    1 5 20 30 20 5 1
   1 6 🜃 60 🚾 30 6 1
1 7 42 105 140 105 42 7 1
          Figura 8
```

Ahora, si aislamos aquellos términos que se obtienen dentro del triángulo indicado en la figura 9 y dividimos cada término entre el número de la fila que ocupa obtenemos los números marcados en la figura 10:

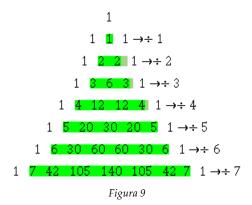


Figura 10: resultados obtenidos al dividir los números marcados en verde entre el número de la fila que ocupa

Que es conocido como el triángulo de Pascal

# 5. Números combinatorios de orden superior

Se puede extender la definición de los números combinatorios a cualquier orden de la siguiente manera:

$$\binom{m}{n}{k} = \frac{m!}{p! (m-n)! (n-k)! (k-p)!}$$

$$\begin{pmatrix} m \\ n \\ k \\ \vdots \\ j \\ n \end{pmatrix} = \frac{m!}{p!(m-n)!(n-k)!\dots(j-p)!}$$

El orden lo obtenemos aplicando la siguiente fórmula: N=t-1, donde N representa el orden y t el número de índices.

# 6. Números primos curiosos

En esta sección se aplican los números combinatorios de orden 2 la obtención de una curiosidad acerca de ciertos números primos: 3, 5, 7, 13, 37, 41. La curiosidad radica en que a partir de ellos podemos obtener otros números primos mediante la siguiente expresión.

$$L_{P} = \begin{bmatrix} 2p-1\\p-1\\p-3 \end{bmatrix} - 1 \end{bmatrix} \frac{1}{p}$$

Ejemplo: si p=3 tenemos

$$L_{3} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 - 1 \\ 3 - 1 \\ 3 - 3 \end{bmatrix} - 1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Aplicando la fórmula:

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{k! (m-n)! (n-k)!}$$

Obtenemos que:

$$\binom{5}{2}_0 = \frac{5!}{0!(5-2)!(2-0)!} = 10$$

$$L_3 = [10 - 1] \frac{1}{3} = 3 \rightarrow L_3 = 3$$

Así:

$$L_5 = 151$$
  
 $L_7 = 3677$   
 $L_{13} = 26401523$ 

Probando con los primeros valores de  $L_P$ , se observa que es posible plantear la siguiente conjetura:  $L_P$  es natural si y sólo si p es primo o cuadrado.

#### Identidad notable 7.

Se plantea ahora establecer el binomio de Newton utilizando los números combinatorios de orden 2:

$$(a+b)^n = b^n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Ejemplos:

$$(x+3)^{2} = 3^{2} + \frac{1}{1} \binom{2}{1} x^{1} 3^{2-1} + \frac{1}{2} \binom{2}{1} x^{2} 3^{2-2} = 9 + 6x + x^{2}$$

$$(m+n)^{4} = n^{4} + \frac{1}{1} \binom{4}{1} m^{1} n^{4-1} + \frac{1}{2} \binom{4}{2} m^{2} n^{4-2} + \frac{1}{3} \binom{4}{3} m^{3} n^{4-3} + \frac{1}{4} \binom{4}{4} m^{4} n^{4-4} = n^{4} + 4mn^{3} + 6m^{2} n^{2} + 4m^{3} n + m^{4}$$

La expresión se obtiene de forma inmediata utilizando la fórmula clásica del binomio de Newton y que  $\binom{n}{k} = \frac{1}{k} \binom{n}{k}$  si  $k \neq 0$ 

Como consecuencia de la identidad se obtiene:

$$1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \binom{n}{k} = 2^{n}$$

## Referencias

[1] FERNÁNDEZ, Justo. Combinatoria: Variaciones, permutaciones y combinaciones. Fórmulas, https://soymatematicas.com/combinatoria/

[2] PÉREZ, Victoria. *Números combinatorios*, https://matematica.laguia2000.com/general/numeros-combinatorios

## Sobre el autor:

Nombre: Juan Patricio Ondo Ona Ayetebe Correo Electrónico: juanpatricio965@gmail.com

Institución: Alumno de ingeniería de la Universidad de Alicante, España.