Un principio de mínimo para socorrer a un bañista en apuros

A Minimum Principle to Help a Swimmer in a Hurry

Rosa M. Herrera

Revista de Investigación

G.I.E Pensamiento Matemático MAIC

Volumen X, Número 1, pp. 109–114, ISSN 2174-0410
Recepción: 15 Mar'19; Aceptación: 25 Mar'20

1 de abril de 2020

Resumen

El principio de Fermat de mínimo tiempo sirve para elaborar un modelo mecánico, que se puede ejemplificar en el ejercicio propuesto, en el que se compara la geometría de la ley de Snell de la óptica, que se corresponde con el principio de Fermat, con el problema físico idealizado.

Palabras Clave: Principio de Fermat, Ley de Snell, Principios de mínimo.

Abstract

The Fermat's Principle (Least Time Principle) serves to develop a mechanical model, which can be exemplified in the proposed exercise, in which the mathematics of Snell's law of optics is compared to the idealized physical problem.

Keywords: Fermat's Principle, Snell Law, Minimum Principle.

Introducción

La ley geométrica de Snell y el principio de mínimo tiempo son leyes de la óptica valiosas en la escala de la física clásica. Algunos principios optimizadores, de los cuales este es solo un ejemplo, son muy útiles también en el ambiente de las físicas del siglo XX y principios del XXI.

Un caso hipotético que propuso el físico R. Feynman (1918-1988) es el problema conocido como el del bañista a punto de ahogarse. Para afrontar este planteamiento se usa un razonamiento mecánico-matemático que establece un uso directo de un principio de mínimo -el citado de mínimo tiempo- y aquí sirve de motivo para la presentación de esta nota. Tenemos pues una situación en la que la física se puede usar para producir sorprendentes resultados en matemáticas. La inversa es muy bien conocida: las matemáticas son imprescindibles para la física.

1. La ley de Snell

Supongamos un rayo de luz que atraviesa la interfaz de dos medios, la ley de Snell establece que los senos de los ángulos respectivos α_1 y α_2 entre el rayo y la normal a la interfaz son proporcionales respectivamente a las velocidades c_1 y c_2 de la luz en ambos medios.

Pero, ¿esta observación empírico-geométrica qué significa físicamente? $c/\operatorname{sen}\alpha$ es la velocidad del punto donde el frente de onda interseca la interfaz de los dos medios. Según la ley de Snell los rayos incidente y refractado con la normal a la interfaz entre los dos medios diferentes son proporcionales:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha_1}{\operatorname{sen}\alpha_2} = n_{21}$$

donde n_{21} es el índice de refracción relativo característico de los dos medios situados a cada lado de la interfaz.

La ley de Snell se puede obtener sencillamente del principio de mínimo tiempo de Fermat, que discutimos brevemente en el apartado siguiente. Se puede también escribir así:

$$n_1 \operatorname{sen}\alpha_1 = n_2 \operatorname{sen}\alpha_2$$

Donde n_1, n_2 son las inversas de las velocidades en los dos medios.

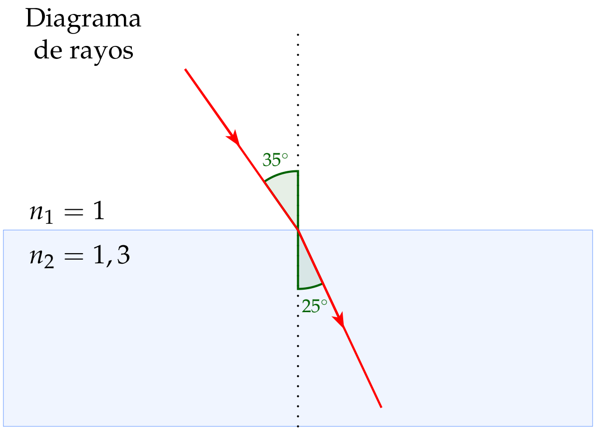

Figura 1. Un ejemplo de refracción de un rayo de luz.

2. Fermat y el principio de mínimo tiempo

Un rayo de luz viajando en el aire se refleja sobre un espejo siguiendo el camino más corto independientemente del punto en que la luz incida sobre el espejo, esa observación se remonta a tiempos de Herón (c. 125 a.C.) quien afirmaba que el ángulo formado por el rayo incidente y el rayo reflejado minimizan este camino de incidencia y reflexión.

Pierre de Fermat (1601-1665) conocía algunos de los aspectos más importantes de la geometría de los rayos ópticos y esto le sirvió para hacer una buena descripción: I) la luz viaja en línea recta en un medio uniforme; II) la luz se refleja en un espejo como una bola de billar que rebota en el borde de la mesa; III) los rayos de luz al pasar de un medio más denso a uno menos denso se inclinan (o se refractan) hacia la normal a la interfaz (esto se observa muy bien cuando la luz pasa del aire al agua); IV) los rayos de luz pueden seguir la misma trayectoria en los dos sentidos (son reversibles).

Estos comportamientos de los rayos ópticos son una consecuencia del principio de *mínimo tiempo* que relaciona la longitud y la orientación de un rayo luminoso[1] con el tiempo necesario para que se propague según la trayectoria que hace este tiempo el menor posible. En realidad este enunciado empírico tiene una carencia, tal y como históricamente fue usado, y es que los puntos tienen que estar suficientemente próximos.

Fermat[2] lo presentó en 1662 y en los libros actuales de texto se usa como modelo para otras situaciones cuya geometría es similar, que se pueden tratar matemáticamente escribiendo el punto de contacto en la interfaz de ambos medios como una incógnita x, y encontrando el mínimo por diferenciación. Esto es un principio de optimización de la naturaleza, un principio de forma perfecta coherente con la ley de Snell que vimos en el apartado 1.

El principio de Fermat con condiciones de contorno es un principio finalista; de hecho, la diferencia con el problema dinámico newtoniano resuelto por las leyes del movimiento (concretamente la segunda ley de Newton) estriba en que estas se refieren a un problema de condiciones iniciales. En ese sentido el enfoque de Fermat y los similares se denominan de causa final, mientras que el planteamiento clásico newtoniano corresponde con el tratamiento de causa eficiente[3].

2.1. Principios variacionales. El principio de mínima acción

Por otra parte, el principio de Fermat forma parte de un cierto tipo de principios matemáticos muy útiles en física, los *principios variacionales*.

Veamos: estos principios se asocian con una descripción global de la evolución del sistema físico; en sentido matemático, se pueden leer porque expresan la optimización del proceso, y mecánicamente vienen descritos mediante las leyes de Newton, para ello se debe considerar un suceso cuyas condiciones iniciales son conocidas (posición y tiempo), y un suceso final caracterizado por la posición y el tiempo final. Esta optimización significa que entre todos los caminos posibles de evolución, el realmente seguido (siempre compatible con las restricciones y las condiciones impuestas por la situación del problema) es el que minimiza, o hace minimal, una magnitud característica del sistema llamada *acción*, S.

En sentido general y clásico, en realidad se convierte casi siempre el proceso en estacionario, es decir, invariante por perturbación infinitesimal del camino seguido. De hecho, posiblemente la generalización más destacable en el ámbito de la física clásica es el principio de Hamilton de acción estacionaria (físicamente equivalente al principio de conservación de la energía): considérese una partícula en un campo gravitatorio uniforme, moviéndose de un punto, A, a otro, B, en un cierto tiempo. Es plausible imaginar que dicha partícula puede seguir una ruta diferente para moverse entre esos dos puntos (A y B) en la que invierta el mismo tiempo. Pues bien, si se calcula en cada instante la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial, el *lagrangiano*, y se halla la media de esta diferencia a lo largo de la trayectoria imaginaria (realizada invirtiendo el mismo tiempo), entonces el resultado es un valor siempre mayor que el encontrado para la trayectoria real: la que de hecho sigue la partícula para desplazarse entre las dos posiciones.

Observación: En la formulación matemática debida a J. L. Lagrange (1736-1813) de la física newtoniana, se define, L, el lagrangiano como $L = E_c - E_p$, una cierta función diferencia de la

[1] O. Römer (1644-1710) en 1675 infirió que la luz se desplaza indefinidamente, a velocidad finita, al observar la velocidad en el vacío interplanetario de la variación anual en el periodo de la luna Io de Júpiter.

[2] Pero no fue el único que trabajó en este tema, otros científicos como Maupertius, Euler, Lagrange, Gauss, Hamilton, Dirac, Feynman y algunos más fueron descubriendo una gran cantidad de generalizaciones espectaculares.

[3] Una discusión muy interesante se encuentra en el libro de Lemons [3] *Perfect Form*.

energía cinética y la potencial, y a partir de ella se define la acción, S, del modo siguiente:

$$S = \int L\, dt$$

donde la integral se realiza a lo largo de la trayectoria recorrida. La trayectoria de mínima acción verifica:

$$\delta S = 0$$

Aquí δ representa una variación infinitesimal de la acción.

Este principio suscitó en sus primeras formulaciones muchas controversias metafísicas y análisis sobre el carácter y el sentido profundo del mismo, porque según interpretaciones de talante filosófico, esto significaría que es como si los sistemas mecánicos "deciden al modo de un organismo consciente" su propia evolución.

Como pequeña curiosidad animamos al lector a indagar por ejemplo en que Feynman y Dirac con sus trabajos en Mecánica Cuántica proporcionaron una explicación a la causa final, apoyándose en el cálculo de interferencia de funciones de onda; R. Feynman escribió en 1964 con su estilo provocativo y señalando el aspecto físico que representa la mínima acción en "Physics Lectures":

> *¿Es cierto que la partícula "mira" todas las demás trayectorias posibles? [...] Una partícula rechaza todos los caminos de alrededor y elige el que tiene la mínima acción [...].*

3. El problema del bañista a punto de ahogarse salvado por la física

Un socorrista, S, ve a un nadador, N, que se está ahogando. El socorrista corre en dirección al agua a una velocidad, v, se tira al agua y nada con una velocidad, w. ¿En qué punto el socorrista se debe lanzar para invertir el menor tiempo posible? (se supone que la velocidad de la persona que se está ahogando es $v_a = 0$.

Esta situación constituye un problema parecido al de la figura 1, que representa un caso arbitrario de la trayectoria de un rayo de luz refractado.

Así el socorrista sigue el principio de Fermat de mínimo tiempo, de la misma manera que el rayo de luz representado en la figura 1; esto nos hace pensar que se puede usar la ley de Snell para modelizar su movimiento. La ley de Snell, que es coherente con el principio de Fermat, identifica cada una de las variables que lo definen con las variables de este proceso de carácter cercano a la mecánica.

Imaginemos la línea de costa como una recta unidimensional tipo alambre y una arandela que se desliza por dicho alambre, que está unido en cierto punto A en el agua[4] a un resorte de tensión constante, de tal manera que dicha tensión sea $1/v$ (la inversa de la velocidad de carrera del socorrista), el sistema tiene otra conexión, un punto B, mediante otro resorte a tensión constante, $1/w$ (la inversa de la velocidad del socorrista nadando), y el tercer punto interesante, C, será el punto de la interfaz (la orilla ideal o la línea de borde de piscina ...) en el cual el corredor se convierte en nadador, el punto donde se traza la normal a la interfaz. La energía potencial de este sistema tipo resorte a tensión constante es el trabajo necesario para estirar el resorte desde una longitud de referencia, que tomamos como cero, a otra longitud dada. Este trabajo es igual a la fuerza (el peso, la tensión) por la distancia.

[4] El punto A representaría al bañista en apuros.

Trasladado este concepto a nuestro sistema problema, la energía potencial de este sistema mecánico en el que la tensión se ha sustituido por la inversa de la velocidad es:

$$\frac{AC}{v} + \frac{CB}{w}$$

Esta expresión coincide con el tiempo que invierte el socorrista en viajar desde A hasta B. Es una manera de trasladar al tiempo el significado mecánico de energía potencial. Si el tiempo de viaje es mínimo, entonces la energía es mínima y por tanto el sistema está en equilibrio.

La ley de Snell da el mínimo tiempo en el punto C que verifica:

$$\frac{1}{v} \operatorname{sen} \alpha_1 = \frac{1}{w} \operatorname{sen} \alpha_2$$

Donde α_1 es el ángulo en la interfaz entre la trayectoria en la tierra y la normal en el punto de contacto y α_2 el ángulo entre la normal y la trayectoria en el medio acuático.

Por tanto el socorrista tendrá que entrar en el agua en ese punto C (quizá el socorrista es físico y ya lo sabe ...).

Nota: la idea básica de este articulito está recogida de una lección de Feynman e inspirada básicamente en los libros de Levi [4] y Lemons [3].

Referencias

[1] BASDEVANT, Jean-Louis. *Le príncipe de moindre action et les principes variationnels en physique*, Vuibert, Paris, 2010.

[2] BOURGUIGNON, Jean-Pierre. *Calcul variationnel*, Les editions de l'ecole polytechnique, Palaiseau Cedex, 2010.

[3] LEMONS, Don S. *Perfect form, Variational Principles, methods and Aplications in Elementary Physics*, Princenton University Press, Princeton, 1997.

[4] LEVI, Mark. *The Mathematical Mechanic*, Princenton University Press, Princeton, 2009.

Sobre la autora:
Nombre: Rosa M. Herrera
Correo electrónico: herrera.rm@gmail.com
Institución: Research Group of Celestial Mechanics (SEAC).