Historias de Matemáticas

El Problema de las Curvas y el Nacimiento del Cálculo

The Problem of Curves and the Birth of Calculus

Román Ceano

Revista de Investigación

G.I.E Pensamient Matemátic MAIC

Volumen X, Número 1, pp. 095–108, ISSN 2174-0410
Recepción: 10 Feb'20; Aceptación: 25 Mar'20

1 de abril de 2020

Resumen

En este artículo se explica a grandes rasgos cómo la matematización del conocimiento científico que se produjo en los siglos XVI y XVII exigió de las matemáticas una evolución súbita para poder hacer frente a las nuevas demandas. La matemática heredada de los griegos con su matriz geométrica, su aversión al infinito presente y su torpeza en el manejo de curvas era incapaz de satisfacer las nuevas demandas.

Palabras Clave: curvas, Cálculo Infinitesimal.

Abstract

In this paper we overview how the mathematization of the knowledge in the XVI and XVII centuries demanded from mathematics a sudden evolution to cope with the needs of the new science. The classical mathematics from Greek and Hellenistic period with its geometric focus, its reluctance to use infinites and its inability to deal with curves other than conics were unable to satisfy the challenge.

Keywords: curves, Calculus.

1. Necesidad de matemáticas

En el siglo XVIII la ciencia dio un salto intelectual que en el siglo XIX se convertiría en una revolución que cambio la humanidad para siempre. Si analizamos lo que sucedió en estos dos siglos y buscamos los antecedentes, de manera inevitable llegamos a la conclusión que el primer síntoma de lo que iba a ser el futuro se encuentra en la matematización de la ciencia durante el Renacimiento y la época inmediatamente posterior. El acontecimiento cumbre de esta matematización fue sin duda la creación del cálculo infinitesimal. Esta creación fue producto de la necesidad de herramientas que estuvieran a la altura del desafío que planteaba a las matemáticas el convencimiento en las élites intelectuales de que eran la clave para la comprensión del universo.

En el siglo XIII Tomás de Aquino promovió el aristotelismo entre los católicos y legalizó la prevalencia del conocimiento adquirido sobre el conocimiento innato o revelado en aquellos asuntos que no fueran estrictamente referidos a la Esencia Divina. A partir de entonces el creyente quedaba libre para examinar el mundo que le rodeaba y deducir él mismo sus leyes, en lugar de limitarse a preguntárselas a Dios. Este “nihil obstat” a la reflexión sobre el mundo físico, entró en relación simbiótica con la evolución económica y social que produjo en Europa la prosperidad que siguió al final de las epidemias de peste del siglo XIV, creando las bases de la revolución científica posterior. Sin embargo, el mismo aristotelismo que había sido revolucionario comparado con el platonismo obscurantista de la baja Edad Media, entró en crisis cuando en siglo XVI los descubrimientos científicos y la las invenciones tecnológicas mostraron su obsolescencia a todos los niveles.

No era solamente que sus afirmaciones sobre la estructura del universo se hubieran mostrado falsas o que sus ideas sobre física resultara incongruentes, era la propia concepción epistemológica del aristotelismo lo que se había convertido en un freno. Por ejemplo, su idea de que las cosas se mueven de manera natural hacia arriba o hacia abajo según su naturaleza, invitaba a discutir sobre esencias, no sobre dinámica. La tendencia del pensamiento aristotélico a la discusión cualitativa sobre esencias se reforzaba por sus reparos a la abstracción de cualidades geométricas o aritméticas (es decir cuantificables) desde objetos físicos. Para las personas que deseaban saber dónde caería una piedra lanzada desde una catapulta esta filosofía natural discursiva e imprecisa era desesperante.

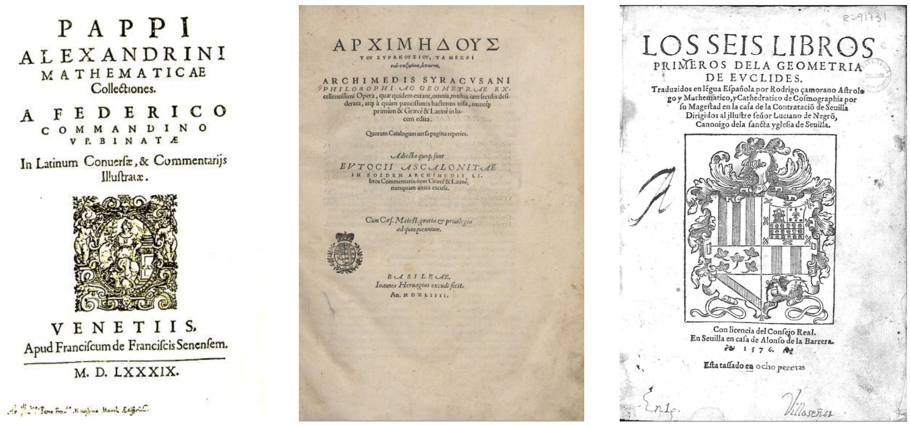
El exceso de precaución epistemológica de la filosofía natural aristotélica no exasperaba solo a las personas que buscaban aplicaciones prácticas del conocimiento teórico sino también a los metafísicos escolásticos. El paso de un conocimiento revelado a un conocimiento adquirido por observación activa no podía suponer para la humanidad sumirse en un limbo sin estructura. Para conocer el plan de Dios de forma exacta había que interrogar a la naturaleza en lenguaje matemático, aunque ello supusiera ignorar los escrúpulos de Aristóteles. Así fue como el platonismo volvió a dominar el paisaje intelectual europeo tras dos siglos de aristotelismo. Pero los dos siglos habían dejado su huella y ya no era posible restaurar la separación entre el mundo ideal perfecto y predecible y el mundo real. La misión de los sabios a partir de entonces sería extender a todo el universo la plácida y sólida certidumbre que emanaba de la aritmética y de la geometría euclidianas. Lo que sucedió en realidad fue que hubo que meter a martillazos las complejidades de la realidad en el mundo armónico ideal que habían creado los matemáticos griegos.

2. Antecedentes clásicos

Para que el universo fuera explicado como una analogía del espacio euclídeo debía ser uniforme, isótropo y de tamaño infinito, lo cual traía consigo dificultades epistemológicas y contradicciones con el cosmos aristotélico que no trataremos aquí. Las dificultades que si trataremos son las que se refieren a cómo describir curvas en el espacio euclídeo, unas formas que en el mundo real son con mucho las más habituales. El Renacimiento europeo cultivaba la nostalgia por el mundo perdido de la antigüedad clásica, del que se consideraba un humilde seguidor. En esta línea, se suponía que las matemáticas del mundo clásico habían sido infinitamente superiores a las que se conocían en ese momento. Cuando hizo falta representar curvas en el espacio euclídeo los sabios se volvieron hacia los matemáticos griegos y helenísticos en busca de ayuda.

Existían tres fuentes principales para conocer las matemáticas anteriores a la larga noche medieval. La más completa era la Synagogue de Pappus, una enciclopedia de ocho libros que describe detalladamente el saber aritmético y geométrico acumulado desde los tiempos de Thales de Mileto. Pappus escribió su obra en Alejandría poco antes de la caída de Roma y de la conversión del Imperio Bizantino al cristianismo, dos sucesos que marcan el final de la Edad

Antigua. Es probable que él mismo estuviera lleno de nostalgia mientras compilaba los brillantes logros de una tradición casi milenaria de la que iba a ser el último representante. Una copia de la Synagogue se conservaba en el archivo del Vaticano donde debió llegar en algún momento del siglo XIII. Además de esta obra monumental, los sabios del Renacimiento tenían también acceso a los Elementos de Euclides, traducidos del árabe poco después del año 1000 d.C. y cuya gran difusión los había convertido en el canon matemático desde su primera publicación en Alejandría, poco después de la muerte de Alejandro Magno. La tercera fuente clásica eran las obras completas de Arquímedes. Este autor no gozaba de la fama de Euclides pero era muy apreciado entre los ingenieros por su orientación eminentemente práctica y su concepción operativa del rigor y la exactitud. En cuanto en Europa se tuvo acceso a su obra se convirtió en el matemático más influyente y citado.


PAPPI
ALEXANDRINI
MATHEMATICAE
Collectiones.
A FEDERICO
COMMANDINO
VRBINATÆ
In Latinum Conuersæ, & Commentarijs
Illustratæ.
VENETIIS,
Apud Franciscum de Franciscis Senensem.
M. D. LXXXIX.

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ
ΤΟΥ ΣΥΡΑΚΟΥΣΙΟΥ, ΤΑ ΜΕΧΡΙ
νῦν σωζόμενα, ἅπαντα.
ARCHIMEDIS SYRACVSANI
PHILOSOPHI AC GEOMETRAE EXcellentissimi Opera, quæ quidem extant, omnia, multis iam seculis desiderata, atque à quàm paucissimis hactenus uisa, nuncque primùm & Græcè & Latinè in lucem edita.
Quorum Catalogum uersa pagina reperies.
Adiecta quoque sunt
EVTOCII ASCALONITAE
IN EOSDEM ARCHIMEDIS LIbros Commentaria, item Græcè & Latinè, nunquam antea excusa.
Cum Cæs. Maiest. gratia & priuilegio
ad quinquennium.
BASILEAE,
Ioannes Heruagius excudi fecit.
An. MDXLIIII.

LOS SEIS LIBROS
PRIMEROS DELA GEOMETRIA
DE EVCLIDES.
Traduzidos en légua Española por Rodrigo çamorano Astrologo y Mathematico, y Cathedratico de Cosmographia por su Magestad en la casa de la Contratació de Seuilla
Dirigidos al illustre señor Luciano de Negrõ,
Canonigo dela sancta yglesia de Seuilla.
Con licencia del Consejo Real.
En Seuilla en casa de Alonso de la Barrera.
1576.
Esta tassado en ocho pezetas

Figura 1. De izq. a drcha: Portadas de la edición de Comandino de la Synagogue de Pappus, de la edición de 1654 de la obra de Arquímedes y de la primera edición en castellano de los Elementos de Euclides.

El estudio de estas tres fuentes de saber matemático clásico no resultaba nada tranquilizadora para quién buscaba compatibilizar la geometría euclídea con las curvas. No existía ningún procedimiento general para calcular áreas, longitudes o tangentes. Tras nueve siglos de trabajo, los que van de Thales a Pappus, tan solo la circunferencia y hasta cierto punto la parábola podían considerarse terreno conocido. Y aunque sus áreas, longitudes y tangentes habían sido laboriosamente calculadas, la naturaleza de las curvas como objeto matemático y su taxonomía no quedaban nada claras.

Figura 2. Arquímedes, según óleo de Domenico Fetti (c. 1620).

Los métodos ofrecidos para calcular las áreas, desde siempre el principal propósito de la geometría, se basaban en aproximaciones mediante polígonos. Euclides describe el procedimiento llamado exhaución, popularizado por Eudoxo y que Arquímedes manejó con gran virtuosismo. No se trata realmente de un método sino de una idea genérica que permite construir procedimientos ad-hoc según el problema que se quiera tratar. Como es sabido, consiste en describir polígonos de tamaño creciente inscritos en curvas. Euclides nos dice que el requisito principal a cumplir por el procedimiento propuesto como candidato es que la diferencia entre el área del polígono "$n+1$" y el área de la curva sea menos de la mitad de la diferencia entre el área del polígono "n" y la de la curva. De esta manera podemos ir reduciendo la diferencia entre las dos áreas tanto como queramos. La misma idea puede aplicarse utilizando polígonos circunscritos y permite no solo el cálculo de áreas sino también el de longitudes (comparándolas con perímetros).

A pesar del aura de perfección que para los renacentistas tenía la matemática clásica era evidente que el método de exhaución era muy rudimentario, mucho más una técnica para gestionar la impotencia conceptual frente a las curvas que la expresión de un conocimiento solvente como el que se desplegaba frente a los polígonos y haces de rectas. El lector moderno se pregunta si lo que se está diciendo es que "se puede reducir la diferencia entre áreas tanto como se quiera" o que "que en el caso de polígonos de infinitos lados (o infinitos polígonos) ambas áreas se igualan". Arquímedes en el planteamiento del problema del cálculo del área del círculo parece afirmar que es lícito considerarlo un triángulo de altura igual al radio y base igual a la longitud de la circunferencia, es decir parece considerar que la iteración infinita que presenta a continuación puede considerarse como presente, aunque sea a nivel potencial. Sin embargo, en la práctica se molesta en ir calculando polígonos hasta llegar al polígono de noventa y seis lados, con lo que da la sensación de estar enfocando el problema como una aproximación "tan próxima como se desee", sin llegar nunca a dar el paso que hoy llamaríamos "pasar al límite". Trabajos de Arquímedes encontrados mucho después (en 1906) muestran que estaba muy próximo a manejar los conceptos del cálculo infinitesimal, pero el hecho de que se molestara en calcular el área del polígono de noventa y seis lados, así como algunas afirmaciones que han llegado hasta nuestros días señalan que no se sentía cómodo con esa aproximación. De hecho, el método de exhaución (un sinónimo de "agotar") no era llamado así por los griegos y no hay ninguna prueba que él objetivo del método fuera agotar el área entre el polígono y la curva. Hemos de recordar que la matemática griega sentía un gran respeto por el concepto de infinito y se negaba a convocarlo en modo presente. Lo más prudente es afirmar que Arquímedes consideraba el método de exhaución una forma rigurosa de aproximar curvas con la precisión que se quisiera, y la extrapolación de las áreas mediante una iteración infinita un recurso heurístico.

Además de la aversión al infinito y de la suficiencia en la práctica de las aproximaciones del tipo "tanto como se quiera", debemos nombrar otra consideración que afectaba a los matemáticos griegos y helenísticos. En esa época, la geometría y la aritmética eran dos disciplinas separadas y lo eran por buenas razones. Al conocimiento desde tiempo inmemorial de la inconmensurabilidad de la razón entre la longitud de la circunferencia y el radio, se había unido en el siglo V a.C. el traumático descubrimiento de la inconmensurabilidad de la diagonal primero del pentágono y luego de la del cuadrado. La constancia de que había longitudes geométricas perfectamente determinadas que no podían expresarse como números tratables aritméticamente sugería una incompatibilidad ontológica entre ambas disciplinas o al menos un conflicto latente que no podía ser tratado a la ligera. Como ilustración del efecto de esta constatación diremos que las reglas y cartabones de la Grecia clásica no tenían números sino que eran completamente lisas. En este contexto intelectual, preguntarse si el cálculo del área de la circunferencia mediante exhaución implica un infinito presente o un infinito potencial es absurdo. Muchas magnitudes geométricas no pueden expresarse como cantidades aritméticas, entre ellas la relación entre longitud de la circunferencia y su radio, precisamente el producto que estamos buscando.

A pesar de las dificultades conceptuales, de la ausencia de un método general y de la sombría amenaza de la inconmensurabilidad, el ingenio y la paciencia habían permitido a los matemáticos clásicos calcular algunas áreas y volúmenes de algunas curvas, además de la circunferencia. Ya hemos dicho que Arquímedes era el maestro indiscutible de la exhaución. Tanto en sus libros como en la compilación de Pappus se encontraban los cálculos del área de la parábola, de la elipse y de la espiral.

La parábola forma parte de las cónicas, una familia de curvas que incluye ejemplares muy exóticos pero que gracias a su parentesco con la circunferencia tiene un aire doméstico. Dicha curva había sido estudiada exhaustivamente por Apolonio de Perga en una colección de ocho libros sobre las cónicas. Mediante razonamientos geométricos encuentra sus expresiones, determina la forma de obtenerlas así como de hallar ejes, asíntotas y tangentes. Para caracterizar los puntos utilizaba proyecciones de la curva sobre dos líneas perpendiculares, una idea que resultaría crucial para los matemáticos del siglo XVII. La importancia de las cónicas es que se habían convertido en los dos ejemplos de que el universo está regido por leyes matemáticas.

La parábola era conocida en óptica por su capacidad para concentrar los rayos de luz y en el siglo XVII se demostró lo que ya se sospechaba desde tiempo atrás, que describía la trayectoria de las balas de cañón. Para medir su área, Arquímedes traza una línea que intersecta la curva creando un segmento de parábola. Después construye un triangulo que tenga su base en la línea y el vértice en la parábola. A continuación traza dos triángulos que tienen como base los lados del triángulo original y su vértice también sobre la curva. Entonces demuestra que por construcción la suma de las áreas de los dos nuevos triángulos es un $1/8$ de la del triángulo original y que por tanto el área del polígono suma de los tres triángulos es $A_{T_1} + 2(1/8 \cdot A_{T_1})$. Iterando el proceso obtiene la serie $A_{T_1} + 2(1/8 \cdot A_{T_1}) + 4(1/8^2 \cdot A_{T_1}) + 2(1/8^4 \cdot A_{T_1}) + \ldots$ Utilizando exclusivamente métodos geométricos demuestra que la suma de la serie excluyendo el primer término se acerca indefinidamente a $1/3$ y que por ello la proporción entre el primer triangulo y el área comprendida entre el segmento y la curva es $4/3$. Aquí aplica otra vez la reflexión que hemos hecho más arriba sobre infinito presente e infinito potencial. Un ingeniero por riguroso que sea considerará que el área bajo la parábola es o bien $3/4$ la del triángulo, o bien algo tan cercano que la diferencia es irrelevante. Un matemático utilizará la expresión "aproximadamente igual".

Curiosamente, algunos sabios del Renacimiento que leyeron los resultados de Apolonio y Arquímedes llegaron a la conclusión de que era imposible que los hubieran encontrado sin la ayuda de un álgebra cuyo secreto se había perdido y que quizás aparecería en la biblioteca de algún monasterio o en un fajo de pergaminos salvado después de la caída de Constantinopla. No faltaba quién afirmaba que los autores clásicos habían ocultado deliberadamente los arcanos de esa álgebra. Estas creencias ilustran el cambio que estaba a punto de ocurrir y que llevaría a la fundación del cálculo. Instintivamente, incluso antes de que Descartes y Fermat consagraran la idea, los matemáticos se daban cuenta que la certidumbre que ofrece la geometría es ilusoria. La geometría organiza y sistematiza intuiciones basadas en nuestro sistema de percepción espacial del mundo físico pero no puede ofrecer la certeza universal que emana de la aplicación de un procedimiento algebraico riguroso.

Los éxitos en la domesticación de curvas que narraban los libros de Euclides, Arquímedes y Pappus eran espectaculares pero distaban mucho de ser la norma. Las cónicas son un subconjunto diminuto de las curvas posibles. Si los antiguos no habían fracasado más a menudo era porque se habían limitado a atacar objetivos asequibles. Además, al carecer de álgebra no podían crear curvas arbitrarias como empezaba a hacerse en esa época manipulando las potencias de los polinomios y/o combinando diferentes tipos de funciones. La única forma que conocían de crear curvas era aludiendo a la trayectoria de un punto situado sobre una figura geométrica o en la intersección de dos y que cambiaba de posición por variaciones de posición y/o orientación de la o las figuras que lo determinaban.

Las curvas más famosas de este tipo (en realidad familias de curvas cuya morfología variaba dependiendo de los parámetros) eran la espiral de Arquímedes, la cisoide de Diocles y la concoide de Nicomedes. La espiral de Arquímedes es la trayectoria trazada por un punto que se mueve a velocidad constante sobre una línea que gira a velocidad también constante. La cisoide de Diocles era una curva extraña que representaba la trayectoria del punto medio de un segmento cuyos extremos estuvieran unidos, uno a una recta y otro a una circunferencia. Había sido creada como ayuda para resolver la duplicación del cubo, que junto a la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo formaba la triada de problemas geométricos imposibles que obsesionaban a los matemáticos clásicos. Finalmente, la concoide de Nicomedes se genera de forma parecida a la cisoide pero siguiendo las trayectorias dos puntos determinados sobre un diámetro de la circunferencia cuyo centro se mueve sobre la recta de que hablábamos en el caso de la cisoide. La concoide permite calcular la trisección de un ángulo pero cada ángulo requiere unos parámetros muy concretos por lo que no resulta un método realmente práctico. De las tres curvas, tan solo la espiral estaba mínimamente estudiada y se podía calcular el área, utilizando un método descrito por el propio Arquímedes. Es decir, que podemos resumir el conocimiento de las curvas en la Grecia clásica como escaso y concentrado de forma casi exclusiva en las cónicas, de las cuales las únicas realmente estudiadas exhaustivamente eran la circunferencia y la parábola. La conclusión era clara: los sabios de la nueva modernidad deberían trabajar mucho si realmente querían representar en el plano euclídeo el universo real y su infinita variedad de curvas.

3. Antecedentes próximos

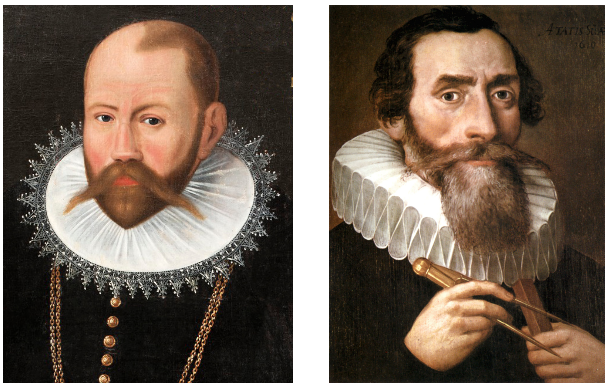


Figura 3. Tycho Brahe y Johannes Kepler.

A principios del siglo XVII el plan de matematizar la física y la astronomía consiguió su primer éxito resonante cuando Kepler logró encajar los datos de Tycho Brae en figuras geométricas sencillas. La hipótesis neoplatónica de un universo ordenado armónicamente por las leyes de la matemática recibió así una espectacular confirmación. Sorprendentemente, se trataba de elipses, no de los cinco sólidos platónicos como Kepler había supuesto. En tiempos de Kepler, las elipses eran ampliamente conocidas y estudiadas gracias a su aparición en los libros de Arquímedes, de los que circulaban numerosas traducciones y ediciones críticas comentadas. Kepler se reconcilio rápidamente con las elipses y afirmó que estaba de acuerdo con los que comparaban las curvas con Dios y las líneas rectas con Su creación. Desde este punto de vista, el estudio de las curvas desde una perspectiva lineal buscando sus áreas (cuadratura), líneas tangentes, ejes y diámetros, se convertía en la empresa mística de relacionar el universo con su Creador.

A pesar de esta altura de miras, la obra de Kepler sobre medición de volúmenes curvos giraba alrededor de un ejemplo completamente terrenal: la maximización del volumen de los toneles de vino. Utilizando esta base como excusa Kepler publicó un extenso estudio sobre volúmenes que resulta interesante para vislumbrar el eclecticismo y pragmatismo de su metodología. Kepler empezaba su estudio con algunas sorprendentes definiciones y en la tradición de Nicolás de Susa, asumía literalmente la afirmación heurística de Arquímedes de que un círculo es un triángulo cuya base es la circunferencia y cuya altura es el radio. No contento con esto, Kepler daba un nuevo salto diciendo que esto era equivalente a decir que que un círculo está formado por infinitos triángulos con vértice en el centro de la circunferencia. Extendía estas afirmaciones a la esfera, formada según él por infinitos conos pero puede ser considerada ella misma un cono de base curva cuya superficie es el área de la esfera. Con respecto a los toneles, los mercaderes utilizaban como medida del volumen de un barril la diagonal desde el agujero que había en el diámetro máximo hasta un punto situado al otro lado y sobre una de las dos bases. Esto intrigó a Kepler porque lo encontró arbitrario y decidió estudiar exhaustivamente el problema. Su enfoque consistió en suponer que el tonel estaba compuesto por cilindros de diferentes diámetros, medir sus volúmenes y luego sumarlos. Estudió como el número de cilindros afectaba a la exactitud del resultado para decidir cual era la cantidad óptima de estos, es decir aquella para la que la aproximación (número de iteraciones de la exhaución en términos clásicos) era suficiente. Después decidió utilizar el mismo método para buscar cual sería la silueta óptima y compiló series de volúmenes para cada forma de tonel. Llegó a algunos resultados interesantes que llamarían la atención a futuros estudiosos de las curvas, como por ejemplo su observación de que la velocidad con la que crece una media circunferencia va disminuyendo y se hace mínima (de hecho cero) en el punto máximo.

No está claro si Fermat conocía el libro de Kepler pero su ataque al problema de los máximos


Figura 4. François Viète y Pierre de Fermat.

de una función parece una continuación analítica de las conclusiones casi empíricas de este. Según propia confesión Fermat sacó su idea de la lectura de Viete y Pappus. Del primero sacó la pregunta de porqué todas las parábolas tienen dos raíces menos aquellas cuyo vértice es tangente a las abscisas, y del segundo un problema muy sencillo de optimización consistente en hallar el rectángulo con la mayor superficie posible de entre todos los que tienen un mismo perímetro. Con estos mimbres Fermat compone una serie de pasos algebraicos que al lector moderno le recuerdan extraordinariamente el cálculo de una derivada y su igualación a cero. Más allá de la discusión historiográfica sobre si eso es o no un antecedente del cálculo diferencial, queda clara la preeminencia del método algebraico sobre el geométrico. Fermat da una receta que conduce a un máximo en la función. No se puede considerar un método general, sobre todo porque en los ejemplos no triviales, su falta de fundamentos teóricos exige que en la aplicación a veces haya que ser más creativo de lo prudente. Sin embargo, vemos claramente la expresión algebraica de las dos ideas de Kepler en su estudio de los toneles, la evaluación del crecimiento y la búsqueda del punto en que esta es cero. Fermat utilizó este método de hallar máximos para atacar algebraicamente el problema de la determinación de las tangentes en un punto. Al principio el sistema era un poco confuso pero bajo la presión de sus críticos Fermat lo fue clarificando. En su forma más depurada quedaba claro que consistía en hallar el cero de una ecuación que evaluaba la diferencia entre la tangente a la curva y la curva en sí en función de la x. Utilizando su método, Fermat fue capaz de calcular la tangente de curvas mecánicas como la cisoide, la concoide, la cuadratriz, la cicloide (la curva más famosa del siglo XVII) y del folium, una curva algebraica inventada por Descartes.

Figura 5. René Descartes.

Uno de los críticos más crueles con Fermat fue precisamente el propio Descartes que atacó con acidez las primeras versiones de su método de hallar tangentes. El motivo, aparte de cuestiones personales, era que Descartes era un seguidor acérrimo del método deductivo que había practicado Euclides. Su famoso lema "cogito ergo sum" llevaba tan lejos la búsqueda de los axiomas a partir de los cuales edificar el razonamiento que al final solo podía estar seguro de su propia existencia, y aún ello por reducción al absurdo. No es de extrañar que no le gustaran la heurística y los pasos ad-hoc de las primeras versiones del método de Fermat. Con el tiempo llegó a aceptar las ideas de Fermat hasta tal punto que las grandes líneas de las propuestas de Descartes tienen su origen en las reflexiones del primero. En su libro *"La geometrie"*, publicado como apéndice de su gran obra *"El discurso del método* y donde Descartes quiere sentar las bases de la nueva matemática, abraza las técnicas que Fermat había tomado de Viete, caracterizando las cónicas mediante sus expresiones algebraicas y dejando de considerar los cuadrados como áreas y los cubos como volúmenes. Descartes, al igual que Fermat abandona la idea del plano euclídeo como una superficie indiferenciada y sin orientación. Mediante el uso de los ejes de coordenadas -una versión estandarizada de las proyecciones sobre rectas ortogonales utilizadas por Apolonio- el plano euclídeo deja de ser un limbo indiferenciado y se convierte en un espacio ordenado donde los objetos matemáticos están localizados y orientados. Un efecto muy importante de esta innovación fue que terminó de facto con la separación clásica entre aritmética y geometría. Además de estar orientados y localizados, los objetos matemáticos que estuvieran sobre el plano tendrían dimensiones en unidades normalizadas, las divisiones establecidas sobre los ejes. Finalmente, al utilizar ejes perpendiculares Descartes le dio definitivamente al espacio euclídeo una textura cuadriculada.

Para delimitar el objeto de su estudio, Descartes realiza una discriminación taxonómica de las curvas que resultará fundamental. Por un lado están las cónicas que pueden ser representadas por polinomios y que llamó "algebraicas", y por otro las curvas que llamó "mecánicas", las que son generadas en la forma en que hemos visto más arriba. Descartes afirmó en un exceso de pesimismo que tan solo las curvas algebraicas son tratables analíticamente, lo cual estaba desmintiendo Fermat de forma contemporánea. Al separar las curvas en dos categorías y afirmar que debían ser estudiadas con métodos diferentes, Descartes facilitaban el estudio de las cónicas pero despreciaba la idea intuitiva de que todas las curvas pueden ser descritas como la composición de dos movimientos, una idea que resultaría fundamental para Newton.


Figura 6. Buenaventura Cavalieri.

A la vez que Descartes publicaba *"La geometrie"*, Buenaventura Cavalieri publicaba su *"Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota"*. Este libro retomaba el tema clásico del cálculo de áreas bajo las curvas y trataba de llevarlo más allá de donde lo había llevado Arquímedes, el maestro indiscutible durante doce siglos. La novedad que proponía Cavalieri era buscar un método general que funcionara para todas las curvas y que permitiera abandonar las técnicas de exhaución que requerían de un gran ingenio ad-hoc para cada situación y cuya aplicación numérica en los casos en que no se podía definir una creación algorítmica y/o calcular el área a la que tendía, resultaba extraordinariamente tediosa. Curiosamente, en los escritos de Arquímedes descubiertos en 1906 que hemos nombrado anteriormente, ya estudiaba, rechazándola, la alternativa a la exhaucion que proponía Cavalieri.

La obra de Cavalieri tiene fama de ser muy tediosa de leer por estar escrita mediante lemas verbales que se van encadenando, el paradigma del rigor en la Grecia clásica. Su base conceptual es el Libro V de Los Elementos de Euclides donde se trata el problema de las magnitudes y sus proporciones siguiendo las ideas de Eudoxo. Este Libro V contiene toda la aritmética aceptable para un geómetra griego y desarrolla los conceptos de suma, resta, multiplicación y división, así como las propiedades elementales de estas operaciones y de sus combinaciones. Su tradición geométrica queda clara cuando establece la homogeneidad de las magnitudes como un requisito necesario para que sea posible compararlas. Así cuando vemos un número nos hemos de preguntar si es una longitud, un área o un volumen ya que solo podremos trabajar con otros números que sean del mismo tipo.

A pesar de que Cavalieri cita explícitamente el Libro V, consciente o inconscientemente ignoró la homogeneidad de magnitudes. De hecho todo su trabajo se basa en ignorar esta homogeneidad y considerar la suma de todas las líneas (*"omnes liniae"*) como equivalente al área. Para ello, propuso imaginar un plano perpendicular al plano euclídeo y moverlo de manera que barra la figura que queremos estudiar. Sabemos por Euclides que en la intersección de ambos planos irán apareciendo líneas. El propio Euclides define las líneas en el Libro I como *"una longitud sin anchura"* lo cual asegura que no puedan dividirse. Las líneas son por tanto los "indivisibles" que forman el plano, una nomenclatura que haría fortuna para bien y para mal.

La intuición de Cavalieri era considerar que si un área es más ancha que otra, tendrá más líneas, asumiendo que como las áreas se definen sobre el plano euclídeo que preexiste a las figuras geométricas, la textura o la estructura interna o como le queramos llamar será siempre la misma. Si aceptamos esto, podemos definir el conjunto de todas las líneas y operar con él siguiendo las reglas definidas en el Libro V, es decir reglas aritméticas santificadas por la geometría. Al igual que un área más ancha tiene más líneas, las líneas de un área más alta son más largas. Y si la frontera superior del área es una curva, las variaciones en altura de las líneas determinarán el área. Así que tomaba la fórmula de las curvas que determinaban la frontera superior y las manipulaba para estudiar su influencia en el área.

La obra de Cavalieri tuvo una gran difusión y todos los eruditos de su tiempo estudiaron minuciosamente el laberinto de sus lemas. A sabiendas o no, Cavalieri se había metido en el pantano conceptual que está en el centro del paraíso Euclidiano. Tal como muchos filósofos descreídos y sin conocimientos matemáticos habían señalado en infinidad de ocasiones, si un punto euclidiano no puede ser dividido, es porque no tiene longitud y si no tiene longitud es imposible que se forme una recta por muchos puntos que pongamos uno detrás de otro. Y entre la recta y el plano pasa lo mismo. Por eso el Libro V contenía el *caveat* sobre homogeneidad de magnitudes que Cavalieri estaba ignorando.

Sorprendentemente, la inconsistencia teórica del método de Cavalieri no impidió que hallara las fórmulas que relacionaban con sus áreas a las curvas algebraicas correspondientes a los polinomios de casi todas las potencias entre dos y diez. A pesar de que la vocación de rigor formal es evidente en todo el planteamiento de su trabajo, cuando Cavalieri fue atacado duramente por sus críticos, pudo defenderse aludiendo a la practicidad de los resultados obtenidos. Galileo, de quien Cavalieri se sentía discípulo, no rechazaba sus escritos pero tampoco los aprobaba. Galileo era un entusiasta de la matematización de la ciencia que se pasaba los días y las noches haciendo experimentos numéricos a pesar de que sus instrumentos eran tan rudimentarios que los resultados no servían para nada. Como buen neoplatonista pensaba que aunque no pudiera constatarlas por lo precario de su tecnología, las leyes de la física matemática existían realmente. Deseaba encontrar una solución al problema que estudiaba Cavalieri y veía que los resultados estaban al alcance la mano. Como tantos matemáticos de ese siglo, sentía la llamada del pragmatismo radical, pero pensaba que el abandono del rigor llevaría a un abandono de la certidumbre, precisamente aquello que estaban buscando.


Figura 7. Blaise Pascal.

Blaise Pascal fue uno de los que reflexionó sobre el trabajo de Cavalieri, encontrando una forma de esquivar el problema de inhomogeneidad de las magnitudes área y longitud. Su idea era un cruce entre la exhaución y el concepto de *"omnes liniae"* de Cavalieri. Inscribamos bajo la curva un cierto número de rectángulos de una cierta anchura igual para todos. Construyamos el sumatorio de las áreas de todos esos rectángulos. Ahora, procedamos de manera análoga a la que Arquímedes proponía cuando aproximaba el área de la circunferencia utilizando polígonos formados por triángulos. Al igual que él aumentaba el número de triángulos, nosotros aumentamos el número de rectángulos y análogamente a como él reducía el ángulo del vértice de sus triángulos nosotros reducimos la longitud de la base. Pascal afirmaba que cuando el número de rectángulos se hiciera infinito, la suma de sus áreas igualaría el área bajo la curva. Una vez obtenido el resultado, Pascal no dudaba en atacar el principio de la homogeneidad de magnitudes que había vulnerado Cavalieri. En una carta a un amigo decía que los que no comprendían que un área es la suma de las líneas que la forman es un ignorante.

Despejado el camino conceptual de esta forma tan contundente, quedaba por hallar el método práctico. Pascal concentró sus esfuerzos en una curva no algebraica, el seno, y logró calcular su área. Para hacerlo utilizó el triángulo característico, un concepto desarrollado para calcular tangentes. Se trata del triángulo que forma la tangente a la curva en un punto con segmentos paralelos a los ejes de coordenadas y que tiene al propio punto como uno de los dos vértices de la hipotenusa. Este triangulo aparecía una y otra vez en la literatura porque es semejante con el triángulo que forma la subtangente y sus proyecciones sobre los ejes pero al no estar ligado a nada sugiere el concepto de "hacerlo tan pequeño como se quiera" hasta que sea un solo punto sobre la curva, pero heredando del triángulo la pendiente de la hipotenusa.

Otro lector de Cavalieri que reflexionó extensamente sobre su fracaso en fundamentar resultados correctos fue John Wallis, geómetra en la universidad de Oxford. A pesar de ser geómetra, Wallis comprendió que la continua referencia a entidades geométricas era un lastre insoportable. Pensaba que las leyes de la aritmética heredadas por el álgebra tenían rigor suficiente y resultaban más flexibles porque no dependían de nuestra intuición espacial. De hecho, una vez Cavalieri había obtenido resultados correctos con su método había que preguntarse si su vulneración del principio de la homogeneidad de magnitudes no era completamente legítimo, otra forma de decir que la aritmética en su forma algebraica debía prevalecer sobre la geometría.

Figura 8. John Wallis.

Para convertir las intuiciones de Cavalieri en un modelo aritmético riguroso Wallis proponía trabajar de manera inversa a como lo había hecho este. En lugar de tomar "todas las líneas" directamente, construía el conjunto de líneas añadiendo una cada vez. Para estudiar el caso de x^3 construía una proporción en la que el numerador era la suma de los cubos de las líneas de un triángulo y el denominador la suma de los cubos de las líneas de un cuadrado. Así podía comparar la proporción entre ambas áreas. Calculaba este resultado para infinitas líneas y obtenía $x^4/4$. Tras este primer éxito reprodujo todos los resultados de Cavalieri para las primeras diez potencias de x^n y llegó a la fórmula general $x^{n+1}/n+1$. Se ha dicho que la falta de rigor de Wallis fue una bendición porque consagró el álgebra literal sin referencias geométricas como método de análisis de una forma que le habría resultado imposible si hubiera querido construir los razonamientos de forma deductiva y obsesivamente perfecta como dictaba la tradición euclidiana. Mediante inducciones y analogías deambuló por los problemas que planteaba la incipiente integración, encontrando resultados útiles y equivocándose de cuando en cuando.

Figura 9. Isaac Barrow.

Barrow, era un contemporáneo de Wallis pero al contrario que él, luchaba por recuperar el enfoque de Euclides y su visión geométrica en la que los números que carecían de representación como longitudes debían ser considerados como ajenos a la matemática. En cambio, Barrow si que simpatizaba con la idea moderna que había expresado Torricelli de considerar las curvas como puntos en movimiento. Esto le sumergió en versiones actualizadas de la paradoja de Zenón que eran a su vez las versiones físicas de los problemas conceptuales sobre el continuo que habían de perseguir a muchas generaciones de matemáticos durante dos siglos. Sin embargo, planteados como problemas físicos resultaban menos conflictivos porque estaba claro que las flechas reales llegaban al blanco y por tanto si el objetivo era representar la realidad el error tenía que estar en las flechas propuestas por Zenón. Analizando un gráfico que relacionaba el tiempo con la velocidad y en el que por tanto el área bajo la curva representaba la distancia recorrida, afirmó que era indiferente si se hablaba de líneas sin dimensión o de rectángulos muy pequeños pero que estaba claro que había unas unidades indivisibles como las que había defendido Cavalieri. Barrow recuperó además el triángulo característico de Pascal que si bien insinuaba el paso al límite, en realidad no lo requería porque bastaba con pensar que era "muy pequeño". Esta posición confortable y ortodoxa en el plano teórico le permitió realizar un trabajo exhaustivo en el cálculo de tangentes y áreas, refinando el método de Fermat. Barrow fue el primero que realmente manejó la diferenciación y la integración como inversos aunque nunca acabara de comprender la importancia que tenía esto.

4. Newton

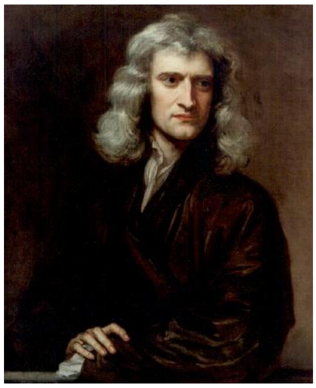


Figura 10. Isaac Newton.

Newton fue alumno de Barrow y su sucesor en la cátedra. Heredó de él las técnicas para calcular áreas y tangentes, así como el enigma de qué había detrás de todas aquellas correspondencias bidireccionales entre funciones. Al principio, Newton estuvo trabajando en los mismos problemas que habían ocupado tanto a sus contemporáneos como a las generaciones anteriores: el cálculo de áreas bajo curvas arbitrarias y la búsqueda de tangentes. Gracias a los trabajos de Cavalieri, Wallis y otros, resultaba habitual aplicar la fórmula $x^{n+1}/n+1$ para calcular el área bajo la curva x^n que hemos nombrado más arriba y que es hoy universalmente conocida. El programa de Descartes de averiguar las áreas de las cónicas y del resto de curvas polinómicas utilizando métodos algebraicos estaba por tanto casi terminado. La idea de Newton era extender el estudio a las curvas mecánicas utilizando series polinómicas para aproximarlas. Las aproximaciones por series polinómicas simplificaban las operaciones ya que el álgebra de polinomios es trivial y como decimos, su integral era ampliamente usada. El hecho de que las series contuvieran infinitos términos no asustaba a Newton que tenía un enfoque ingenieril y se contentaba con métodos que aproximaran todo lo que se quisiera, dejando al usuario decidir el nivel de precisión deseado. Por lo que respecta al tema de las tangentes, Newton descubrió que el método del paralelogramo, que había sido usado con profusión desde los tiempos de Kepler, no era correcto. Este método consiste en considerar las dos componentes del movimiento, dibujar sus vectores y considerar que el vector resultante determina la tangente. Esto es cierto en muchos casos, como por ejemplo con la elipse, cuya tangente calculaba Kepler con este método pero funciona por motivos equivocados y cuando Newton lo aplicó a la cuadratriz descubrió que era erróneo. Newton determinó la verdadera tangente de la cuadratriz pero lo más importante es que las reflexiones sobre la composición del movimiento le permitieron encontrar no solo una forma de fundamentar los métodos ya conocidos de cálculo de áreas sino crear un método general.

Su idea fue revertir la clasificación de Descartes. En lugar de distinguir las curvas algebraicas de las que no lo eran y tratarlas de manera diferente, Newton decidió mirarlas todas igual. Y en lugar aproximar curvas mecánicas convirtiéndolas en series polinómicas como había estado haciendo, decidió mirar todas las curvas como el producto de dos movimientos. Si tomamos una recta vertical y una horizontal que se alejen del origen de coordenadas, su intersección se moverá por el primer cuadrante trazando trayectorias que dependerán de la velocidad relativa de las dos generatrices. Al principio Newton tenía reparos con el concepto de velocidad instantánea pero finalmente los abandonó y aceptó la versión física de la paradoja del continuo, un problema heredado de Euclides que iba tomando diferentes formas y que como se ha dicho perseguiría a los matemáticos durante dos siglos. Newton no buscaba una justificación exhaustiva sino una metáfora intuitiva que vistiera sus manipulaciones algebraicas. La encontró en la idea de analizar la componente vertical y horizontal del movimiento de un punto es decir la variación simultánea de cada una con respecto al tiempo. Newton denominó a la variables "fluente" y a su variaciones "fluxión" y creo sobre la marcha una notación para operar con estos conceptos. No era una idea óptima porque en lugar de una sola cantidad como tenemos ahora, él manejaba la razón entre las dos derivadas respecto al tiempo pero el resultado práctico era el mismo y para evitar las dificultades era fácil considerar constante la variación respecto al tiempo de una de las dos variables.

Esta conceptualización de la relación entre una variable y su cambio le permitió ser el primero en darse cuenta de la importancia teórica y práctica de que el cálculo de tangentes y el cálculo de áreas sean inversos. Esta idea le vino como consecuencia de otra previa. En lugar de tomar curvas y buscar su área, se le ocurrió hacer lo contrario, estudiar qué curva tiene un área que crece al ritmo de una función determinada. Así fue como encontró que tomando una fluxión, la fluente sería la fórmula del área, lo que hoy conocemos como teorema fundamental del cálculo diferencial.

A partir de un momento Newton ya no buscaba resolver casos sueltos porque se daba cuenta que tenía en la mano un método general. Por ello estudió las composiciones de fluxiones para muchas curvas utilizando su arsenal de series polinómicas. El patrón general era el que sus predecesores habían ido fijando: tomaba la ecuación de la curva en un punto cualquiera, le sumaba un incremento a las dos variables y luego operaba buscando encontrar un momento propicio en el que hacer tender a cero ambos incrementos. De esta forma obtenía las razones entre la variación de coordenadas en un punto, es decir las tangentes del ángulo que formaba la tangente con el eje de abscisas. Y para calcular el área solo tenía que hacer la operación inversa.

5. Leibniz

Figura 11. Gottfried Leibniz.

Ya hemos dicho que Newton a partir de un momento no quería resolver casos sueltos sino que buscaba un método general para resolver problemas tanto de áreas como de tangentes. Leibniz fue mucho más lejos desde el principio y su objetivo fue crear un armazón conceptual y una notación. En nomenclatura moderna podríamos decir que Leibniz estaba interesado en el metaproblema. Por ello no arrancó como Newton buscando casos particulares sino que directamente se centró en los conceptos. Su forma de trabajar se parecía mucho más al enfoque euclidiano y en lugar de resolver problemas buscando patrones de manera inductiva, Leibniz definió primero todos los conceptos para luego deducir sus consecuencias. En primer lugar puso fin al problema de las líneas sin anchura que forman áreas. Sus curvas no eran verdaderas curvas sino polígonos con infinitos lados. Estos lados tenían una longitud muy pequeña y que se podía despreciar pero que era una auténtica longitud. Gracias a que la curva era en realidad un polígono, las líneas tenían anchura y podían sumarse para crear áreas. Leibniz respetaba la homogeneidad de dimensiones de Euclides y Eudoxo por lo que siempre tenía en cuenta si la cantidad que iba a operar era una longitud o un volumen. Además de la dimensión, las cantidades que manejaba tenían una cierta magnitud que cambiaba el operador como veremos más abajo.

Todo este entramado de definiciones permitía esquivar tanto los problemas que habían perseguido a Cavalieri como los que suscitaba operar el incremento de las variables para de pronto decir que "era como si fueran cero", quitando sus magnitudes pero dejando su razón (el método adoptado por Newton que Leibniz no conocería hasta unos años después). En el esquema de Leibniz, los rectángulos bajo los lados de su curva poligonal tenían todos una anchura fija que valía "dx" (la diferencia de una x a la siguiente) y se relacionaban mediante una cierta proporción ("dx/dy") con las diferencias de altura con el rectángulo siguiente que llamaba (diferencial de y). Desde el primer momento Leibniz tuvo claro que la derivación y la integración eran inversas porque tenían su origen en operaciones inversas, concretamente la suma y la resta. A Leibniz le gustaba mucho la sencillez con que se pueden operar entre sí las series de diferencias e incluso las sumas en serie que son algo más engorrosas. El cálculo de áreas representaba sumar rectángulos mientras el cálculo de tangentes consistía en restar sus alturas, es decir tomar las diferencias de "y". La magnitud de las variables a que hemos hecho alusión más arriba no era absoluta sino relativa. "dx" es infinitesimal con respecto a "x" que a su vez es infinitesimal con respecto a su integral. Por eso la integral de "x" se ha de multiplicar por "dx", para igualar su magnitud a "x".

Leibniz no fue como Newton estableciendo la notación sobre la marcha sino que la planeó a conciencia. Al principio a la integral la llamaba "omn" como había hecho Cavalieri pero a sugerencia de uno de los hermanos Bernouilli cambió a la S estilizada que conocemos hoy. Ya hemos hablado de la "d" que encontramos en "dx" y "dy". Con el tiempo añadiría "dx/dy" entendido como un solo signo. La forma de operar que utilizaba era mucho más clara que la de Newton porque deliberadamente buscó crear un lenguaje algebraico organizado y completo.

6. Conclusión

Newton y Leibniz enfrentaron por separado el mismo problema y llegaron a soluciones análogas. Sin embargo cada uno de ellos plasmó la solución de forma diferente. Newton no tenía más deseo de generalizar que el que le permitiera solucionar toda la problemática del cálculo de áreas y tangentes con un método estandarizado que obedeciera a reglas bien establecidas. En cambio Leibniz quería ir mucho más allá y fundar una nueva rama de las matemáticas con su notación diferenciada y sus conceptos perfectamente establecidos. Podríamos decir que la vocación de Newton era inductiva y buscaba lo que tenían en común todos los casos para definir un sistema mientras Leibniz trabajaba de manera deductiva y quería partir de unos axiomas "evidentes por si mismos" para construir sobre ellos un edificio solido y duradero. Los matemáticos que vinieron después, pulieron el cálculo infinitesimal y crearon la síntesis que llegó a su apogeo a principios del siglo XIX. Hoy podemos ver como a la larga se prefirió el infinito presente y el paso al límite que se desprende de la visión de Newton sobre las curvas poligonales y las líneas rectangulares de Leibniz. En cambio la notación de Leibniz, pensada y estudiada para ser práctica y lógica perduró sobre la de Newton creada apresuradamente sobre una intuición de cinemática. Los infinitésimos no lograron el estatuto de "clase de números" que les quería dar Leibniz pero dejaron de ser las aberraciones lógicas o los fantasmas que mucha gente veía en ellos. Hoy en día los infinitésimos son actores secundarios que son convocados para desaparecer poco después gentilmente, como el gato de Chesire que nos deja su sonrisa.

No queremos acabar sin decir que en el siglo XVII no se resolvió el problema del continuo que visualizan las paradojas de Zenón, que hacen que el Libro I y el Libro V de Los Elementos sean incompatibles y que persiguió a Cavalieri. Newton, Leibniz y todos los que trabajaron sobre los cimientos que ellos crearon, solo hicieron que enterrar la paradoja en axiomas y conceptos cada vez más refinados. Dos siglos después, la generación de Hilbert tuvo que reconocer por fin que la paradoja no tenía solución y que los axiomas no podían elegirse porque fueran "claros y distintos" en nuestra mente sino porque permitían llevar a cabo los cálculos de la forma que nos era necesaria. Que incluso la aritmética que Fermat y Descartes adhirieron a la recta, no es ni completa, ni consistente. La matemática no puede dar la certidumbre que el neoplatonismo buscaba en ella.

Referencias

[1] AYERBE TOLEDANO, José María, *Los métodos infinitesimales para el cálculo de tangentes*. § Historias de Matemáticas, Revista "Pensamiento Matemático", Vol. VII. Núm. 2. pp. 65-86, Oct. 2017. ISSN: 2174-0410. G.I.E. Pensamiento Matemático, Universidad Politécnica de Madrid, España.

[2] BERNAL, John D., *La proyección del hombre. Historia de la Física Clásica*, Trad. María-Carmen Ruiz de Elvira Hidalgo. Siglo XXI. Ciencia y Técnica, Madrid, 1975. ISBN-13: 978-8432301865.

[3] BOYER, Carl B., *The history of calculus and its conceptual development*. Dover Books on Mathematics, 1959. ISBN: 9780486175386.

[4] DURÁN, Antonio José, *Historia con personajes, de los conceptos del Cálculo*. Alianza Universidad, 1996. ISBN: 84-206-2861-1.

[5] GRATTAN-GUINESS, Ivor, *Del cálculo a la teoría de conjuntos (1630-1910)*. Alianza Editorial, Madrid, 1984. ISBN: 84-206-2387-3.

[6] LAKATOS, Imre, *Matemáticas, ciencia y epistemología*. Alianza Editorial, Madrid, 2007. ISBN: 9788420687223.

[7] KOYRÉ, Alexandre, *Del mundo cerrado al universo infinito*. Trad. Carlos Solís Santos. Siglo XXI Editores, 1979. ISBN: 978-84-323-0349-4.

[8] KLINE, Morris, *Matemáticas, la pérdida de la Incertidumbre*. Trad. Andrés Ruíz Merino. Siglo XXI Editores, 1985. ISBN-13: 978-8432305290.

Sobre el autor:
Nombre: Román Ceano
Correo electrónico: roman.c@vector3.es
Autoría: Monografía sobre la máquina Enigma publicada en Kriptopolis.