Lecturas Matemáticas
Volumen **41** (2) (2020), páginas 133-147
ISSN 0120-1980

Fórmula asintótica de Mehler-Heine correspondiente a los polinomios modificados de Charlier

Asymptotic Mehler-Heine formula corresponding to modified Charlier polynomials

Smith de Jesús Rosa Ulloa

Liceo Técnico Pastor Abajo, República Dominicana

Resumen. Uno de los temas principales en la teoría de los polinomios ortogonales es el estudio de sus asintóticas. Se pueden estudiar varios tipos de asintóticas correspondientes a los polinomios ortogonales, las cuales brindan información valiosa sobre los polinomios con grados suficientemente grandes. En particular, las fórmulas de Mehler-Heine, proporcionan las asintóticas locales de los polinomios que se escalan adecuadamente, y establecen una relación límite entre los polinomios y otros tipos de funciones. En el presente artículo se logró escribir los polinomios modificados de Charlier como combinación lineal de dos polinomios consecutivos de Charlier. Combinando los resultados obtenidos con la fórmula de Mehler-Heine de los polinomios de Charlier, se obtuvo la correspondiente a los modificados.

***Palabras clave*:** Fórmula de conexión, Fórmula de Mehler-Heine, Polimonios ortogonales de Charlier.

Abstract. One of the main topics in the theory of orthogonal polynomials is the study of their asymptotics. Various types of asymptotics corresponding to orthogonal polynomials can be studied, which provide valuable information on polynomials with sufficiently large degrees. In particular, the Mehler-Heine formulas provide the local asymptotics of the polynomials that are properly scaled, and establish a limit relationship between the polynomials and other types of functions. In this article, it was possible to write the modified Charlier polynomials as a linear combination of two consecutive Charlier polynomials. Combining the results obtained with the

Mehler-Heine formula of the Charlier polynomials, the one corresponding to the modified ones was obtained.

***Key words*:** Connection formula, Mehler-Heine formula, Orthogonal Charlier polynomials.

2010 AMS Mathematics Subject Classification. Primary 76M45; Secondary 33C50, Third 33D52.

1. Introducción

La fórmula clásica de Mehler-Heine, para los polinomios ortogonales, fue introducida por primera vez en el siglo XIX, por los célebres matemáticos, Heinrich Eduard Heine (1821-1881) [14, 15, 16] y Gustav Ferdinand Mehler (1835-1895) [22], quienes fueron motivados por un problema existente, de aquel entonces, de conocer la distribución de electricidad en dominios esféricos [22]. Dentro de sus resultados, obtuvieron el comportamiento asintótico de los polinomios de Legendre $P_n(z)$ cerca del punto final de su intervalo de ortogonalidad,

$$\lim_{n\to\infty} P_n\left(\cos\frac{z}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} P_n\left(1-\frac{z^2}{2n^2}\right) = J_0(z),$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$, donde los polinomios de Legendre $P_n(z)$ vienen dados explícitamente mediante [19]

$$P_n(z) = {}_2F_1\left(\begin{array}{c|c} -n, n+1 & \frac{1-z}{2} \\ 1 & \end{array}\right).$$

Por otro lado la función de Bessel de primer tipo viene definida como sigue

$$J_\nu(z) = \sum_{j\geq 0} \frac{(-1)^j (z/2)^{2j+\nu}}{j!\Gamma(j+\nu+1)} = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\, {}_0F_1\left(\begin{array}{c|c} - & -\frac{z^2}{4} \\ \nu+1 & \end{array}\right),$$

es la conocida función de Bessel de primer tipo [35]. Además, $\Gamma(x)$ es la función Gamma, la cual se define como

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$

Definición 1.1. *El símbolo de Pochhammer $(\cdot)_n$ de orden n, está definido mediante [27, 28, 30]*

$$(x)_n = \prod_{0\leq j\leq n-1} (x+j), \quad n\geq 1, \quad (x)_0 = 1.$$

Definición 1.2. *La serie hipergeométrica ordinaria* ${}_rF_s$*, está definida mediante [18, 19, 29]*

$${}_rF_s\left(\begin{array}{c|c} a_1,\dots,a_r & \\ & x \\ b_1,\dots,b_s & \end{array}\right)=\sum_{k\geq 0}\frac{(a_1,\dots,a_r)_k}{(b_1,\dots,b_s)_k}\frac{x^k}{k!},$$

donde

$$(a_1,\dots,a_r)_k=\prod_{1\leq i\leq r}(a_i)_k\,,$$

siendo $\{a_i\}_{i=1}^r$ *y* $\{b_j\}_{j=1}^s$ *números complejos sujetos a la condición* $b_j\neq -n$ *con* $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ *para* $j=1,2,\dots,s$.

En el caso de los polinomios de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(z)$, definidos mediante [19]

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(z)=\frac{(\alpha+1)_n}{n!}\,{}_2F_1\left(\begin{array}{c|c} -n,n+\alpha+\beta+1 & \\ & \dfrac{1-z}{2} \\ \alpha+1 & \end{array}\right),\quad \alpha,\beta>-1,$$

se dedujo la correspondiente fórmula de Mehler-Heine [31, 34]

$$\lim_{n\to\infty}n^{-\alpha}P_n^{(\alpha,\beta)}\left(\cos\frac{z}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}n^{-\alpha}P_n^{(\alpha,\beta)}\left(1-\frac{z^2}{2n^2}\right)=\left(\frac{z}{2}\right)^{-\alpha}J_\alpha(z).$$

Ambas fórmulas asintóticas se cumplen uniformemente sobre cada subconjunto compacto del plano complejo. Este comportamiento asintótico cerca del llamado *borde duro* brinda información detallada de los ceros de los polinomios de Jacobi cerca del punto final 1. Si

$$x_{k,n}=\cos\theta_{k,n},\quad 1\leq k\leq n,$$

son los ceros en orden decreciente de los polinomios de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(z)$, entonces para un k fijo se tiene que

$$\lim_{n\to\infty}n\theta_{k,n}=j_k,$$

donde j_k es el k-ésimo cero positivo de J_α. Más tarde, extensiones de estos resultados para algunos tipos de polinomios de Jacobi generalizados se obtuvieron en [13].

Similarmente, se obtuvo una fórmula asintótica para los polinomios de Laguerre, definidos mediante [19]

$$L_n^{(\alpha)}(z)=\frac{(\alpha+1)_n}{n!}\,{}_1F_1\left(\begin{array}{c|c} -n & \\ & z \\ \alpha+1 & \end{array}\right),\quad \alpha>-1,$$

los cuales satisfacen las siguiente fórmula de Mehler-Heine [8, 31]

$$\lim_{n\to\infty}n^{-\alpha}L_n^{(\alpha)}(z)\left(\frac{z^2}{4n}\right)=\left(\frac{z}{2}\right)^{-\alpha}J_\alpha(z).$$

En el caso de los polinomios ortogonales clásicos de Hermite, definidos mediante [19]

$$
\begin{aligned}
H_n(z) &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!(-1)^k (2z)^{n-2k}}{k!(n-2k)!} \\
&= (2z)^n \, {}_2F_0 \left(\begin{array}{c|c} -\frac{n}{2}, -\frac{n-1}{2} & \\ & -\frac{1}{z^2} \\ - & \end{array} \right),
\end{aligned}
$$

se tienen los siguientes dos casos, distintos

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!} \sqrt{n} H_{2n}\left(\frac{z}{2\sqrt{n}}\right) = \left(\frac{z}{2}\right)^{1/2} J_{-1/2}(z),
$$

y

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!} H_{2n+1}\left(\frac{z}{2\sqrt{n}}\right) = (2z)^{1/2} J_{1/2}(z),
$$

los cuales convergen uniformemente sobre cada subconjunto compacto de $\mathbb{C}$, donde los polinomios ortogonales Hermite de grados $2n$ y $2n+1$ vienen dados de la siguiente manera [2]:

$$
\begin{aligned}
H_{2n}(z) &= n! \sum_{0\le k\le n/2} \frac{(-1)^{n/2-k}}{(2k)!(n/2-k)!} (2z)^{2k} \\
&= (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)_n {}_1F_1 \left(\begin{array}{c|c} -n & \\ & z^2 \\ \frac{1}{2} & \end{array} \right),
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
H_{2n+1}(z) &= n! \sum_{0\le k\le n/2} \frac{(-1)^{(n-1)/2-k}}{(2k+1)!((n-1)/2-k)!} (2z)^{2k+1} \\
&= (-1)^n z \left(\frac{3}{2}\right)_n {}_1F_1 \left(\begin{array}{c|c} -n & \\ & z^2 \\ \frac{3}{2} & \end{array} \right),
\end{aligned}
$$

respectivamente.

Por otra parte, en [5, 23] aparece el siguiente resultado vinculado a los polinomios de Hermite:

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!} \sqrt{n+j} H_{2n}\left(\frac{z}{2\sqrt{n+1}}\right) = \left(\frac{z}{2}\right)^{1/2} J_{-1/2}(z),
$$

y

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!} H_{2n+1}\left(\frac{z}{2\sqrt{n+j}}\right) = (2z)^{1/2} J_{1/2}(z),
$$

los cuales convergen uniformemente sobre cada subconjunto compacto de $\mathbb{C}$ y uniformemente sobre $j \in \mathbb{N} \cup 0$.

Según el teorema de Hurwitz [23], la fórmula de Mehler-Heine brinda el comportamiento asintótico de los ceros más pequeños de los polinomios ortogonales correspondientes. Sean $h_{n,k}$ los ceros positivos de $H_n(z)$. Entonces, para los polinomios de Hermite se tiene lo siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} 2\sqrt{n}h_{2n,k} = (2k-1)\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{n\to\infty} 2\sqrt{n}h_{2n+1,k} = k\pi, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Curiosamente, los polinomios de Lommel modificados [7, 17] definidos mediante

$$h_{n,\nu}(z) = (\nu)_n (2z)^n \, {}_2F_3 \left(\left. \begin{array}{c} -\frac{n}{2}, -\frac{1-n}{2} \\ \\ \nu, -n, 1-\nu-n \end{array} \right| -\frac{1}{z^2} \right), \quad \nu > 0,$$

proporcionan un tipo de fórmula de Mehler-Hermite de alguna manera diferente, la cual viene dada en la forma

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2z)^{1-\nu-n}}{\Gamma(n+\nu)} h_{n,\nu}(z) = J_{\nu^{-1}}(z^{-1}), \quad z \neq 0,$$

sobre cada subconjunto compacto de $\mathbb{C}$. Por otro lado, si se fija el valor de z, por ejemplo $z = 1/2$, se obtiene entonces una familia diferente de polinomios ortogonales en la variable ν definida mediante [21]

$$R_n(z) = h_{n,z}\left(\frac{1}{2}\right).$$

Para estos nuevos polinomios se tiene la siguiente fórmula de Mehler-Heine:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\Gamma(n+z)} R_n(z) = J_{z-1}(2).$$

Unos de los resultados más brillantes alcanzados a finales del siglo pasado fue el propuesto por el prestigioso matemático Alexander Ivanovich Aptekarev, en [3], véase también [32], resultado que se plasma en el siguiente teorema.

Teorema 1.1. *Sea $q_n(z)$ un sistema de polinomios ortogonales definidos mediante*

$$zq_n(z) = b_n q_{n+1}(z) + a_n q_n(z) + b_{n-1} q_{n-1}(z),$$

con

$$a_n \to 0, \quad a_n \to 0,$$

y supuesto que

$$\frac{q_{n+1}(1)}{q_n(1)} = 1 + \frac{\alpha + 1/2}{n} + \mathcal{O}\left(n^{-1}\right), \quad \alpha > -1.$$

Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1/2}} q_n \left(1 - \frac{z^2}{2n^2}\right) = z^{-\alpha} J_\alpha(z),$$

uniformemente sobre cada subconjunto compacto de $\mathbb{C}$.

Dicho resultado fue extendido en [33].

Existe diferentes familias de polinomios ortogonales, para los cuales se han determinado las fórmulas de tipo Mehler-Heine, juntamente con sus consecuencias sobre el comportamiento asintótico de los ceros correspondientes a estos polinomios. Tal es el caso de las fórmulas de Mehler-Heine para los polinomios del disco, véase [4], así como para los polinomios ortogonales con respecto a un peso de Freud $e^{-|x|^\mu}$ con $\mu > 0$, para los cuales las fórmulas de Mehler-Heine pueden deducirse a partir de los resultados propuestos en [20].

Desde principios del siglo XXI hasta la actualidad, se han alcanzado valiosos resultados vinculados a estas importantes fórmúlas asintóticas, por citar, en [6] se consiguieron las fórmulas de Mehler-Heine para los polinomios ortogonales múltiples asociados con las funciones de Bessel modificadas de primer tipo, mientras que en [8, 9, 10] se introdujeron resultados similares para ciertos polinomios ortogonales discretos. Además, en [11, 12, 26], se obtuvieron las fórmulas de Mehler-Heine para algunos tipos de polinomios ortogonales de tipo Sobolev.

Para una correcta comprensión, análisis y desarrollo del comportamiento asintótico de los ceros más pequeños de los polinomios ortogonales, así como para el desarrollo de futuras investigaciones relacionadas a los distintos tipos de asintóticas, se hace necesario conocer, analizar y profundizar en las fórmulas de Mehler-Heine correspondientes a los polinomios modificados de Charlier.

En la sección 2 del presente artículo se describen las propiedades fundamentales de los polinomios de Charlier. En la sección 3 se muestran los resultados vinculados a la fórmula de Mehler-Heine correspondientes a los polinomios modificados de Charlier. Para finalizar, en la sección 4 se arriba a las conclusiones.

2. Los polinomios clásicos discretos de Charlier

Definición 2.1. *Los polinomios ortogonales clásicos discretos de Charlier* $c_n^{(\mu)}(x)$ *con* $\mu > 0$*, son aquellos polinomios que admiten la siguiente representación hipergeométrica [24]*

$$c_n^{(\mu)}(x) = {}_2F_0\left(\begin{array}{c|c} -n, -x & \\ & -\mu^{-1} \\ - & \end{array}\right), \quad \mu > 0,$$

y que satisfacen la siguiente ecuación en diferencias de segundo orden, conocida como ecuación de tipo hipergeométrica,

$$x\Delta\nabla c_n^{(\mu)}(x) + (\mu - x)c_n^{(\mu)}(x) + nc_n^{(\mu)}(x) = 0. \tag{1}$$

En particular, los polinomios

$$\widehat{c}_n^{(\mu)}(x) = (-\mu)^n c_n^{(\mu)}(x).$$

se les llama polinomios mónicos discretos de Charlier.

Teorema 2.1. *Sean* $\widehat{c}_n^{(\mu)}(x)$*, los polinomios ortogonales clásicos mónicos discretos de Charlier, los cuales satisfacen la ecuación en diferencias de segundo orden de tipo hipergeométrica* (1)*. Entonces,*

1. *Dichos polinomios se expresan mediante la fórmula de Rodrigues*

$$\widehat{c}_n^{(\mu)}(x) = \frac{(-1)^n}{\widehat{c}_n^{(\mu)}(x)} \nabla^n \left[\rho(x+n) \prod_{1 \le k \le n} (x+k) \right], \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

   donde

$$\rho(x) = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{\Gamma(x+1)}.$$

2. *Satisfacen la siguiente relación de ortogonalidad*

$$\sum_{x \ge 0} \widehat{c}_m^{(\mu)}(x)\widehat{c}_n^{(\mu)}(x)\rho(x) = ||\widehat{c}_n^{(\mu)}||^2 \delta_{m,n},$$

   donde

$$||\widehat{c}_n^{(\mu)}||^2 = n!\mu^2. \tag{2}$$

3. *Satisfacen la siguiente relación de recurrencia, [1, 24]*

$$x\widehat{c}_n^{(\mu)}(x) = \widehat{c}_{n+1}^{(\mu)}(x) + (n+\mu)\widehat{c}_n^{(\mu)}(x) + n\mu\widehat{c}_{n-1}^{(\mu)}(x).$$

4. *Satisfacen la Fórmula de Christoffel-Darboux,* $\forall\, n \in \mathbb{N}$*, se tiene que*

$$\begin{aligned}
\mathbb{K}_{n-1}(x,y) &= \frac{\widehat{c}_n^{(\mu)}(x)\widehat{c}_{n-1}^{(\mu)}(y) - \widehat{c}_n^{(\mu)}(y)\widehat{c}_{n-1}^{(\mu)}(x)}{(x-y)||\widehat{c}_{n-1}^{(\mu)}||^2} \\
&= \frac{\widehat{c}_{n-1}^{(\mu)}(y)}{(x-y)||\widehat{c}_{n-1}^{(\mu)}||^2}\widehat{c}_n^{(\mu)}(x) - \frac{\widehat{c}_n^{(\mu)}(y)}{(x-y)||\widehat{c}_{n-1}^{(\mu)}||^2}\widehat{c}_{n-1}^{(\mu)}(x), \quad (3)
\end{aligned}$$

   donde $\mathbb{K}_{n-1}(x,y)$*, denota al* $(n-1)$*-ésimo núcleo reproductor dado mediante*

$$\mathbb{K}_{n-1}(x,y) = \sum_{0 \le k \le n-1} \frac{\widehat{c}_k^{(\mu)}(x)\widehat{c}_k^{(\mu)}(y)}{||\widehat{c}_k^{(\mu)}||^2}. \tag{4}$$

5. *Su valor en el extremo del intervalo de ortogonalidad es*

$$\widehat{c}_n^{(\mu)}(0) = (-\mu)^n. \tag{5}$$

2.1. Relaciones de los núcleos de los polinomios Charlier

Proposición 2.2. *Sean* $\widehat{c}_n^{(\mu)}(x)$ *con* $\mu > 0$*, los polinomios ortogonales clásicos mónicos discretos de Charlier, los cuales satisfacen la ecuación en diferencias de segundo orden de* *tipo hipergeométrica* (1)*. Entonces, el* $(n-1)$*-ésimo núcleo para dichos polinomios en el* $(0,0)$*, es decir,* $\mathbb{K}_{n-1}^{(\mu)}(0,0)$*, satisface la siguiente relación límite,*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{K}_{n-1}^{(\mu)}(0,0) = {}_0F_0\left(\begin{array}{c|c} - & \\ & \mu \\ - & \end{array}\right) = e^{\mu}.$$

Demostración. En efecto, teniendo en cuenta (4) se tiene que

$$\mathbb{K}_{n-1}^{(\mu)}(0,0) = \sum_{0\le k\le n-1} \frac{[\widehat{c}_k^{(\mu)}(0)]^2}{||\widehat{c}_k^{(\mu)}||^2}, \tag{6}$$

Luego, usando (2) así como el valor de $\widehat{c}_k^{(\mu)}(0)$ dado en (5), se deduce lo siguiente

$$\mathbb{K}_{n-1}^{(\mu)}(0,0) = \sum_{0\le k\le n-1} \frac{(-\mu)^{2k}}{k!\mu^k} = \sum_{0\le k\le n-1} \frac{(-1)^{2k}\mu^k\mu^k}{k!\mu^k} = \sum_{0\le k\le n-1} \frac{\mu^k}{k!}.$$

Finalmente, aplicando el límite a ambos miembros, se consigue (6), para más detalles, véase la ecuación (1.4.6) de [19]. □

Lema 2.3. *Sean* $\widehat{c}_n^{(\mu)}(x)$ *con* $\mu > 0$*, los polinomios ortogonales clásicos mónicos discretos de Charlier, los cuales satisfacen la ecuación en diferencias de segundo orden de tipo hipergeométrica* (1)*. Entonces, el* $(n-1)$*-ésimo núcleo para dichos polinomios en el* $(x,0)$*, es decir,* $\mathbb{K}_{n-1}^{(\mu)}(x,0)$*, satisface la siguiente relación*

$$\mathbb{K}_{n-1}^{(\mu)}(x,0) = \frac{\widehat{c}_{n-1}^{(\mu)}(0)}{x||\widehat{c}_{n-1}^{(\mu)}||^2}\,\widehat{c}_n^{(\mu)}(x) - \frac{\widehat{c}_n^{(\mu)}(0)}{x||\widehat{c}_{n-1}^{(\mu)}||^2}\,\widehat{c}_{n-1}^{(\mu)}(x). \tag{7}$$

Demostración. En efecto, (7) es consecuencia directa de (3) para el caso de los polinomios mónicos de Charlier. □

2.2. Fórmulas de Mehler-Heine

Proposición 2.4 (Fórmulas de Mehler-Heine). *Sean* $c_n^{(\mu)}(x)$ *y* $\widehat{c}_n^{(\mu)}(x)$ *con* $\mu > 0$*, los polinomios ortogonales clásicos discretos de Charlier, los cuales satisfacen la ecuación en diferencias de segundo orden de tipo hipergeométrica* (1)*. Entonces,* $\forall\ z \in \mathbb{C}$*, se cumple que [8, 9]*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu^n}{\Gamma(n-z)} c_n^{(\mu)}(x) = \frac{e^{\mu}}{\Gamma(-z)},$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-z)} \widehat{c}_n^{(\mu)}(x) = \frac{e^{\mu}}{\Gamma(-z)}, \tag{8}$$

respectivamente, véase la figura 1.

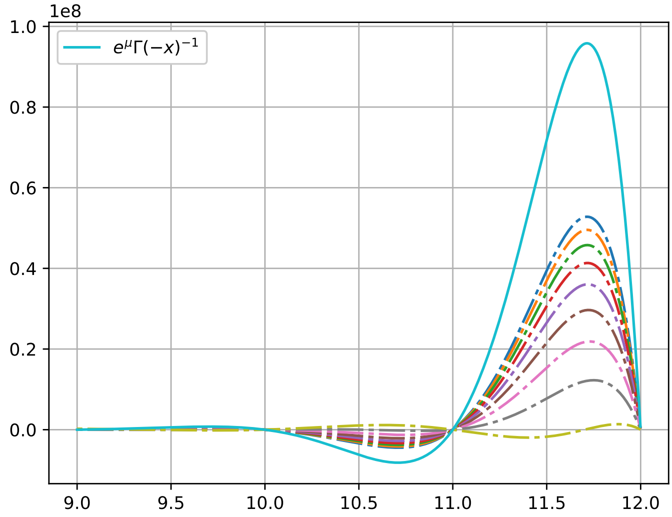

Figura 1. Representación gráfica de la fórmula de Mehler-Heine para los polinomios de Charlier

3. Polinomios ortogonales modificados de una variable discreta

3.1. Fórmulas de conexión

Definición 3.1. *Sean $\widehat{c}_n^{(\mu)}(x)$ con $\mu > 0$, los polinomios ortogonales clásicos mónicos discretos de Charlier, los cuales satisfacen la ecuación en diferencias de segundo orden de tipo hipergeométrica* (1). *Entonces, se define como los polinomios modificados de Charlier $\mathcal{C}_n^{(\mu,\psi)}(x)$, aquellos polinomios que son ortogonales con respecto al producto escalar [25]*

$$\langle f, g\rangle_{\psi} := \sum_{x\geq 0} f(x)g(x)\rho(x) + \psi f(0)g(0), \tag{9}$$

donde $\psi \in \mathbb{R}_+$.

Teorema 3.1 (Fórmula de Conexión I). *Sean $\mathcal{C}_n^{(\mu,\psi)}(x)$ con $\mu > 0$, los polinomios modificados de Charlier, los cuales son ortogonales con respecto al producto escalar* (9). *Entonces, se verifica la siguiente fórmula de conexión [25]*

$$\mathcal{C}_n^{(\mu,\psi)}(x) = \widehat{c}_n^{(\mu)}(x) - \psi\, \frac{\widehat{c}_n^{(\mu)}(0)}{1 + \psi\, \mathbb{K}_{n-1}^{(\mu)}(0,0)}\, \mathbb{K}_{n-1}^{(\mu)}(x,0). \tag{10}$$

Teorema 3.2 (Fórmula de Conexión II). *Sean $\mathcal{C}_n^{(\mu,\psi)}(x)$ con $\mu > 0$, los polinomios modificados de Charlier, los cuales son ortogonales con respecto al producto escalar* (9). *Entonces, se verifica la siguiente fórmula de conexión*

$$\mathcal{C}_n^{(\mu,\psi)}(x) = \Theta_{1,n}^{(\mu,\psi)}(x)\, \widehat{c}_n^{(\mu)}(x) + \Theta_{2,n}^{(\mu,\psi)}(x)\, \widehat{c}_{n-1}^{(\mu)}(x), \tag{11}$$

donde

$$\Theta_{1,n}^{(\mu,\psi)}(x) = 1 + \psi\,\frac{\mu^n}{[1+\psi\,\mathbb{K}_{n-1}^{(\mu)}(0,0)]x(n-1)!}, \tag{12}$$

y

$$\Theta_{2,n}^{(\mu,\psi)}(x) = \psi\,\frac{\mu^{n+1}}{[1+\psi\,\mathbb{K}_{n-1}^{(\mu)}(0,0)]x(n-1)!}. \tag{13}$$

Demostración. En efecto, usando la fórmula de conexión (10) juntamente con (7), lema 2.3, se arriba a

$$\mathcal{C}_n^{(\mu,\psi)}(x) = \Theta_{1,n}^{(\mu,\psi)}(x)\,\widehat{c}_n^{(\mu)}(x) + \Theta_{2,n}^{(\mu,\psi)}(x)\,\widehat{c}_{n-1}^{(\mu)}(x),$$

donde

$$\Theta_{1,n}^{(\mu,\psi)}(x) = 1 - \psi\,\frac{\widehat{c}_n^{(\mu)}(0)}{1+\psi\,\mathbb{K}_{n-1}^{(\mu)}(0,0)}\,\frac{\widehat{c}_{n-1}^{(\mu)}(0)}{x||\widehat{c}_{n-1}^{(\mu)}||^2},$$

y

$$\Theta_{2,n}^{(\mu,\psi)}(x) = \psi\,\frac{\widehat{c}_n^{(\mu)}(0)}{1+\psi\,\mathbb{K}_{n-1}^{(\mu)}(0,0)}\,\frac{\widehat{c}_n^{(\mu)}(0)}{x||\widehat{c}_{n-1}^{(\mu)}||^2}.$$

Finalmente, usando (5) y el valor de la norma para los polinomios mónicos de Charlier dado en (2), se consigue

$$\begin{aligned}
\Theta_{1,n}^{(\mu,\psi)}(x) &= 1 - \psi\,\frac{\widehat{c}_n^{(\mu)}(0)}{1+\psi\,\mathbb{K}_{n-1}^{(\mu)}(0,0)}\,\frac{\widehat{c}_{n-1}^{(\mu)}(0)}{x||\widehat{c}_{n-1}^{(\mu)}||^2} \\
&= 1 - \psi\,\frac{(-\mu)^n}{1+\psi\,\mathbb{K}_{n-1}^{(\mu)}(0,0)}\,\frac{(-\mu)^{n-1}}{x(n-1)!\mu^{n-1}} \\
&= 1 + \psi\,\frac{\mu^n}{[1+\psi\,\mathbb{K}_{n-1}^{(\mu)}(0,0)]x(n-1)!},
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\Theta_{2,n}^{(\mu,\psi)}(x) &= \psi\,\frac{\widehat{c}_n^{(\mu)}(0)}{1+\psi\,\mathbb{K}_{n-1}^{(\mu)}(0,0)}\,\frac{\widehat{c}_n^{(\mu)}(0)}{x||\widehat{c}_{n-1}^{(\mu)}||^2} \\
&= \psi\,\frac{(-\mu)^n}{1+\psi\,\mathbb{K}_{n-1}^{(\mu)}(0,0)}\,\frac{(-\mu)^n}{x(n-1)!\mu^{n-1}} \\
&= \psi\,\frac{\mu^{n+1}}{[1+\psi\,\mathbb{K}_{n-1}^{(\mu)}(0,0)]x(n-1)!}.
\end{aligned}$$

□

3.2. Fórmula de Mehler-Heine para las polinomios de Charlier modificados

Lema 3.3. *Para el caso particular de los polinomios de Charlier cuando* $0 < \mu < 1$*, las siguientes relaciones límites se satisfacen:*

$$\lim_{n\to\infty} \Theta_{1,n}^{(\mu,\psi)}(x) = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \Theta_{2,n}^{(\mu,\psi)}(x) = 0.$$

Demostración. En efecto, a partir de (12) y de la Proposición 2.2, se deduce que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \Theta_{1,n}^{(\mu,\psi)}(x) &= 1 + \psi \lim_{n\to\infty} \frac{\mu^n}{[1+\psi\,\mathbb{K}_{n-1}^{(\mu)}(0,0)]x(n-1)!}\\ &= 1 + \frac{1}{x}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\psi\,\mathbb{K}_{n-1}^{(\mu)}(0,0)} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n-1)!}\lim_{n\to\infty}\mu^n\\ &= 1+\frac{1}{x}\frac{1}{1+\psi\, e^{\mu}}\cdot 0\cdot 0 = 1.\end{aligned}$$

De manera análoga, se procede con el segundo límite. □

Proposición 3.4 (Fórmula de Mehler-Heine). *Sean* $\mathcal{C}_n^{(\mu,\psi)}(x)$ *con* $0 < \mu < 1$*, los polinomios modificados de Charlier, los cuales son ortogonales con respecto al producto escalar* (9) *y satisfacen la fórmula de conexión* (11)*. Entonces,* $\forall\, z \in \mathbb{C}$*, se cumple que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-z)}\mathcal{C}_n^{(\mu,\psi)}(x) = \frac{e^{\mu}}{\Gamma(-z)}, \quad 0<\mu<1, \tag{14}$$

véase la figura 2.

Demostración. En efecto, multiplicando ambos miembros de la fórmula de conexión (11) por

$$\frac{(-1)^n}{\Gamma(n-z)},$$

y luego aplicando el límite, se deduce

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-z)}\mathcal{C}_n^{(\mu,\psi)}(x)\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-z)}\,\Theta_{1,n}^{(\mu,\psi)}(x)\,\widehat{c}_n^{(\mu)}(x) + \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-z)}\,\Theta_{2,n}^{(\mu,\psi)}(x)\,\widehat{c}_{n-1}^{(\mu)}(x),\\ &= \lim_{n\to\infty}\Theta_{1,n}^{(\mu,\psi)}(x)\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{\Gamma(n-z)}\,\widehat{c}_n^{(\mu)}(x) + \lim_{n\to\infty}\Theta_{2,n}^{(\mu,\psi)}(x)\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{\Gamma(n-z)}\,\widehat{c}_{n-1}^{(\mu)}(x).\end{aligned}$$

Así, teniendo en cuenta el lema 3.3

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-z)}\mathcal{C}_n^{(\mu,\psi)}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-z)}\,\widehat{c}_n^{(\mu)}(x).$$

Finalmente, considerando la fórmula de Mehler-Heine (8), a partir de lo anterior, se obtiene (14). □

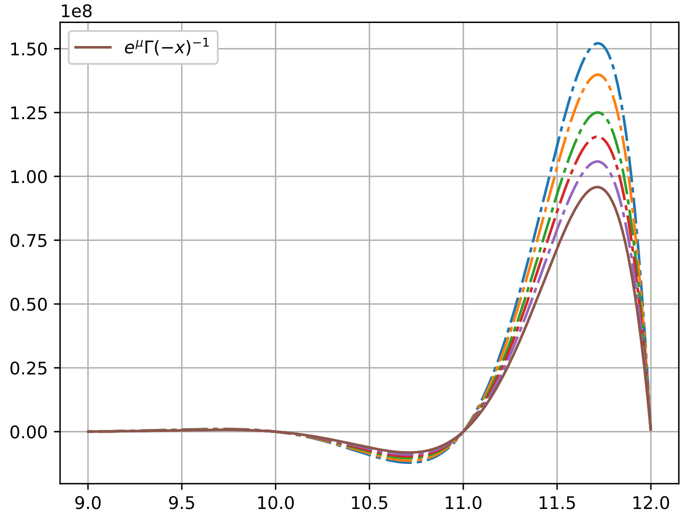

Figura 2. Representación gráfica de la fórmula de Mehler-Heine para los polinomios modificados de Charlier

4. Conclusiones

Teniendo en cuenta ciertas relaciones límites de los núcleos en $(0,0)$, así como la segunda fórmula de conexión propuesta en este artículo, fue posible demostrar la existencia de la fórmula de Mehler-Heine correspondiente a los polinomios modificados de Charlier.

Agradecimientos

El autor agradece sinceramente todos los señalamientos por parte de los revisores, pues esto permitió mejorar la primera versión de este artículo.

Referencias

[1] Renato Álvarez-Nodarse, *Polinomios hipergeométricos y q-polinomios*, Monografías del Seminario Matemático García de Galdeano, No. **26**, Zaragoza. In Spanish, 2003.

[2] Renato Álvarez-Nodarse, *Polinomios hipergeométricos clásicos y q-polinomios*, Monografías del Seminario Matemático García de Galdeano, Zaragoza: Presas Universitarias de Zaragoza, 2003.

[3] Alexander Ivanovich Aptekarev, *Asymptotics of orthogonal polynomials in a neighborhood of the endpoints of the interval of orthogonality*, Russian Academy of Sciences. Sbornik Mathematics **76** (1993), no. 1, 35.

[4] Mostafa Bouhaik & Léonard Gallardo, *A Mehler-Heine formula for disk polynomials*, Indagationes Mathematicae **2** (1991), no. 1, 9-18.

[5] Laura Castaño-García & Juan J Moreno-Balcázar, *A Mehler-Heine-type formula for Hermite-Sobolev orthogonal polynomials*, Journal of Computational and Applied Mathematics **150** (2003), no. 1, 25-35.

[6] Els Coussement & Walter Van Assche, *Asymptotics of multiple orthogonal polynomials associated with the modified Bessel functions of the first kind*, Journal of Computational and Applied Mathematics **153** (2003), no. 1-2, 141-149.

[7] David Dickinson, *On Lommel and Bessel polynomials*, Proceedings of the American Mathematical Society **5** (1954), no. 6, 946-956.

[8] Diego Dominici, *Mehler-Heine type formulas for Charlier and Meixner polynomials*, The Ramanujan Journal **39** (2016), no. 2, 271-289.

[9] ———, *Mehler-Heine type formulas for Charlier and Meixner polynomials ii. higher order terms*, J. Class. Anal. **12** (2018), no. 1, 9-13.

[10] ———, *Mehler-Heine type formulas for the Krawtchouk polynomials*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **486** (2020), no. 1, 123877.

[11] Herbert Dueñas & Francisco Marcellán, *Asymptotic behaviour of Laguerre-Sobolev-type orthogonal polynomials. A nondiagonal case*, Journal of Computational and Applied Mathematics **235** (2010), no. 4, 998-1007.

[12] ———, *The Laguerre-Sobolev-type orthogonal polynomials*, Journal of Approximation Theory **162** (2010), no. 2, 421-440.

[13] Bujar Xh Fejzullahu, *Mehler-Heine formulas for orthogonal polynomials with respect to the modified Jacobi weight*, Proceedings of the American Mathematical Society (2014), 2035-2045.

[14] E. Heine, *Handbuch der kugelfunctionen. theorie und anwendungen. band i, ii. zweite umgearbeitete und vermehrte auflage. thesaurus mathematicae, no. 1*, Physica-Verlag, Würzburg **1961** (1961).

[15] Eduard Heine, *Handbuch der kugelfunctionen, theorie und anwendungen*, vol. 1, G. Reimer, 1878.

[16] ———, *Theorie der kugelfunctionen und der verwandten functionen*, Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2019.

[17] Mourad EH Ismail, *The zeros of basic Bessel functions, the functions jv+ ax (x) & associated orthogonal polynomials*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **86** (1982), no. 1, 1-19.

[18] Taekyun Kim, Dae San Kim, Hyunseok Lee & Jongkyum Kwon, *Degenerate binomial coefficients and degenerate hypergeometric functions*, Advances in Difference Equations **2020** (2020), no. 1, 1-17.

[19] Roelof Koekoek, Peter A Lesky & René F Swarttouw, *Hypergeometric orthogonal polynomials and their q-analogues*, Springer Science & Business Media, ISBN 978-3-642-05013-8, DOI 10.1007/978-3-642-05014-5, 2010.

[20] T. Kriecherbauer & K. TR McLaughlin, *Strong asymptotics of polynomials orthogonal with respect to freud weights*, International Mathematics Research Notices **1999** (1999), no. 6, 299-333.

[21] Daniel Maki, *On constructing distribution functions; with applications to Lommel polynomials and Bessel functions*, Transactions of the American Mathematical Society **130** (1968), no. 2, 281-297.

[22] Ferdinand Gustav Mehler, *Ueber die vertheilung der statischen elektricität in einem von zwei kugelkalotten begrenzten körper.*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **1868** (1868), no. 68, 134-150.

[23] Juan José Moreno-Balcázar, *Smallest zeros of some types of orthogonal polynomials: asymptotics*, Journal of Computational and Applied Mathematics **179** (2005), no. 1-2, 289-301.

[24] A. V. Nikiforov & V. B. Uvarov, *Special functions in mathematical physics*, Birkhauser Verlag, Basel, 1988.

[25] A. Nodarse, A. Garcia & F. Marcellán, *On the properties for modifications of classical orthogonal polynomials of discrete variables*, Journal of Computational and Applied Mathematics **65** (1995), no. 1, 3-18.

[26] A. Peña & M.L. Rezola, *Connection formulas for general discrete sobolev polynomials: Mehler-Heine asymptotics*, Applied Mathematics and Computation **261** (2015), 216-230.

[27] Aleksandar Petojević, *A note about the Pochhammer symbol*, Mathematica Moravica (2008), no. 12-1, 37-42.

[28] Recep Şahin & Oğuz Yağcı, *A new generalization of Pochhammer symbol and its applications*, Applied Mathematics and Nonlinear Sciences **5** (2020), no. 1, 255-266.

[29] Yilmaz Simsek, *Generating functions for finite sums involving higher powers of binomial coefficients: Analysis of hypergeometric functions including new families of polynomials and numbers*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **477** (2019), no. 2, 1328-1352.

[30] Hari Mohan Srivastava, Gauhar Rahman & Kottakkaran Sooppy Nisar, *Some extensions of the Pochhammer symbol and the associated hypergeometric functions*, Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science **43** (2019), no. 5, 2601-2606.

[31] Gabor Szeg, *Orthogonal polynomials*, vol. 23, American Mathematical Soc., 1939.

[32] Tomohiro Takata, *Certain multiple orthogonal polynomials and a discretization of the Bessel equation*, Journal of Mathematics of Kyoto University **49** (2009), no. 4, 747-769.

[33] Dmitrii Nikolaevich Tulyakov, *Local asymptotics of the ratio of orthogonal polynomials in the neighbourhood of an end-point of the support of the orthogonality measure*, Sbornik: Mathematics **192** (2001), no. 2, 299.

[34] Walter Van Assche, *Mehler-Heine asymptotics for multiple orthogonal polynomials*, Proceedings of the American Mathematical Society **145** (2017), no. 1, 303-314.

[35] Tie-Hong Zhao, Lei Shi & Yu-Ming Chu, *Convexity and concavity of the modified Bessel functions of the first kind with respect to hölder means*, Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas **114** (2020), no. 2, 1-14.

Recibido en julio de 2020. Aceptado para publicación en noviembre de 2020.

SMITH DE JESÚS ROSA ULLOA
LICEO TÉCNICO PASTOR ABAJO
REPÚBLICA DOMINICANA
e-mail: smithdejesusrosa@gmail.com