

MEDIOS DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE PARA LA GEOMETRÍA EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICA

MEDIOS DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE PARA LA GEOMETRÍA

AUTORES: Arledis Cruz González¹Michel Enrique Gamboa Graus²DIRECCIÓN PARA CORRESPONDENCIA: arledis@ult.edu.cu

Fecha de recepción: 22 - 05 - 2020

Fecha de aceptación: 02 - 06 - 2020

RESUMEN

Los medios de enseñanza y aprendizaje constituyen una de las categorías importantes de la didáctica. Sus funciones favorecen la relación objetivo-contenido-método, así como la organización del proceso de enseñanza-aprendizaje. Su tratamiento en las clases de Geometría hace que se eleve la preparación de profesores y estudiantes, y que logre un proceso más desarrollador. La carencia de estos medios genera insuficiencias en los estudiantes de la carrera Licenciatura en Educación Matemática-Física de la Universidad de Las Tunas que afectan el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría. A partir de un análisis de los medios de enseñanza y aprendizaje en los diferentes planes de estudio de las especialidades pedagógicas de Matemática y Física, así como de los referentes filosóficos, sociológicos, psicológicos, pedagógicos y didácticos se diseñó e implementó un conjunto de medios de enseñanza y aprendizaje de diferentes generaciones, para su tratamiento en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Geometría. La proyección de las cuádricas y de las secciones cónicas mediante la implementación de estos medios incrementó la comprensión del contenido geométrico y la calidad del aprendizaje.

PALABRAS CLAVE: Medios de enseñanza y aprendizaje; Geometría.

TEACHING AIDS FOR GEOMETRY IN TRAINING MATHEMATICS TEACHERS**ABSTRACT**

Teaching aids is an important category of teaching-learning process. Its functions favor the objective-content-method relationship, as well as the organization of the teaching-learning process. Its treatment in Geometry

¹ Licenciada en Educación, especialidad Matemática-Computación. Máster en Educación. Departamento de Matemática-Física de la Universidad de Las Tunas, Cuba.

² Licenciado en Educación, especialidad Matemática-Computación. Doctor en Ciencias Pedagógicas. Centro de Estudios Pedagógicos de la Universidad de Las Tunas, Cuba. E-mail: michelgamboagraus@gmail.com

lessons increases the preparation of teachers and students, and achieves a more developmental process. The lack of these means generates insufficiencies in the students of the University of Las Tunas which affect the teaching-learning process of Geometry. From an analysis of the teaching and learning resources in the different curricula of the pedagogical specialties of Mathematics and Physics, as well as of the philosophical, sociological, psychological, pedagogical and didactic references, a set of teaching aids of different generations, for its treatment in the learning process of Geometry. The projection of the quadric surfaces and the conic sections through the implementation of these teaching aids increased the understanding of the geometric content and the quality of learning.

KEYWORDS: Teaching aids; Geometry.

INTRODUCCIÓN

La Licenciatura en Educación Matemática contribuye a satisfacer las demandas de preparación de sus estudiantes para su inserción en el mundo contemporáneo. Los profesores de esta carrera tienen la tarea de preparar a los estudiantes con contenidos matemáticos, donde los contenidos geométricos desempeñan un rol determinante (Fonseca y Gamboa, 2017a). El tratamiento de estos contenidos permite a los estudiantes apropiarse de conceptos propios de la Matemática, mediante el empleo de diferentes métodos y medios de enseñanza y aprendizaje. Estos constituyen un recurso didáctico que favorecen la unidad entre la instrucción, la educación y el desarrollo.

El Modelo del Profesional de esta carrera y sus documentos oficiales evidencian la necesidad de enseñar a formular y resolver problemas relacionados con diferentes aspectos de la realidad (Gamboa, 2006, 2018b). Esto es utilizando contenidos de la Matemática, con apoyo de asistentes matemáticos y de otras tecnologías de la información y la comunicación (Gamboa y Santiesteban, 2018).

Aunque el objetivo general y específico de la disciplina en el modelo evidencian la necesidad del tratamiento de los contenidos geométricos con la incorporación de asistentes matemáticos y otros medios de enseñanza y aprendizaje, la observación sistemática al proceso de enseñanza-aprendizaje, las reuniones metodológicas, el intercambio con otros profesionales, los resultados de las evaluaciones, las visitas de inspección, así como la experiencia de los autores, permitieron identificar manifestaciones de insuficiencias en los estudiantes vinculadas con el protagonismo en la producción de materiales de tipo manipulativo y de recursos que se puedan emplear en el aprendizaje de cuádricas y secciones cónicas, la fijación a largo plazo de los conceptos para que se apliquen al aprendizaje de otros contenidos, la calidad en los resultados del aprendizaje de los contenidos de Geometría y la motivación por el aprendizaje de la Geometría.

Lo anterior revela una contradicción entre la necesidad de lograr altos niveles de sistematización de los contenidos geométricos (Zaldivar, Cruz y Gamboa, 2015), necesarios en el desempeño profesional de los estudiantes (Gamboa, 2019b), y la realidad en la que se revelan bajos índices de calidad en los resultados del aprendizaje de estos contenidos (Cruz, 2017).

En el proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura Geometría todavía no se logra la proyección de las cuádricas y secciones cónicas con la combinación de medios de enseñanza y aprendizaje que garanticen la participación activa de los estudiantes en la búsqueda del conocimiento geométrico, así como que propicien un pensamiento productivo y creador. Esto constituye la insuficiencia teórica preliminar.

Tal escenario llevó a la necesidad de perfeccionar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría en la formación de profesores de Matemática. Como consecuencia, la investigación se dirigió a la implementación de un conjunto de medios de enseñanza y aprendizaje que permitiera optimizar dicho proceso en la carrera Licenciatura en Educación Matemática, con énfasis en la transformación del tratamiento de los medios de enseñanza y aprendizaje.

Esto se llevó a cabo defendiendo la idea de que el tratamiento de los medios de enseñanza y aprendizaje debe atender la diversidad evolutiva de los mismos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría. Así se revela una vía para favorecer la fijación de los contenidos geométricos y la calidad del aprendizaje de esta asignatura en la carrera Licenciatura en Educación Matemática.

DESARROLLO

Marco teórico

En el proceso de investigación se sintetizaron las ideas de varios trabajos de proyectos de investigación que incursionaron en la didáctica de la Geometría y en los medios de enseñanza y aprendizaje. Entre ellos destacan Fonseca y Gamboa (2004, 2010, 2011, 2017b), Cruz y Gamboa (2005), Carmenates y Gamboa (2005), Fernández y Gamboa (2005), Yoppiz, Gamboa y Cruz (2005), Gamboa, Carmenates, Borrego y Fernández (2005), Amat, González y Gamboa (2005), Gamboa (2007), Fernández y Gamboa (2012), Carmenates, Rodríguez y Gamboa (2014), Yoppiz, Cruz, Gamboa y Osorio (2016), Gamboa y Fonseca (2017), Santos, Gamboa y Silva (2017a, b), Santos y Gamboa (2018), Cruz, Gamboa y Rodríguez (2018), Gamboa y Yoppiz (2019), Gamboa (2020a), Castillo y Gamboa (2020).

Ellos constituyeron un punto de partida esencial para esta investigación. De forma general ellos coinciden que la enseñanza de la Geometría precisa la introducción de métodos y medios novedosos, especialmente en el tema de la geometría analítica, que posibiliten maniobrar las condiciones de los ejercicios propuestos y establecer conjeturas para analizar la variación o no de las propiedades de las figuras. Estos medios permiten crear las condiciones favorables para un enfoque vigotskiano planteado por Gamboa (2012), Gamboa,

Carmenates y Amat (2010), Gamboa y Carmenates (2011), Gamboa (2019), en aras del dominio del contenido y por tanto contribuyen a la formación de capacidades, hábitos, habilidades y actitudes.

Se parte del hecho de concebir el trabajo con la Geometría desde el abordaje científico del estudio de las figuras geométricas, considerándolo como un producto social, este trabajo se sustenta en las experiencias y en las vivencias del mundo que circunda a los estudiantes, lo que revela el rol de la teoría del conocimiento en el aprendizaje de los contenidos geométricos. Al ser el conocimiento de la Geometría una necesidad social, ello se traduce en una mayor eficacia del proceso de enseñanza-aprendizaje, y por tanto, de la calidad de la educación que reciben los miembros de la sociedad que la aprenden.

Con respecto a los medios, la recomendación es trabajar desde la perspectiva de medios de enseñanza y aprendizaje (Tabla 1). Esto potencia el desarrollo de las habilidades intelectuales como la utilización de estrategias cognitivas y metacognitivas, la formulación de ayudas ante diferentes necesidades y estilos de aprendizaje, la orientación de actividades para la investigación, la producción y las diferentes formas de evaluación del aprendizaje. Igualmente, de esta manera se prioriza un tipo de conocimiento metacognitivo, un aprendizaje estratégico, así como conocimientos sobre tareas cognitivas. Esto incluye un apropiado conocimiento contextual y condicional.

Tabla 1

Término/ Criterio	Medio	Medio de enseñanza	Medio de enseñanza y aprendizaje
Desarrollo de las habilidades intelectuales que se potencian	Adquisición de conocimientos, búsqueda, manejo y análisis de información.	La utilización de estrategias cognitivas, la estructuración de alternativas, y la orientación de actividades cognitivas, ideológicas y educativas, para la sistematización, el control.	La utilización de estrategias cognitivas y metacognitivas, la formulación de ayudas ante diferentes necesidades y estilos de aprendizaje, la orientación de actividades para la investigación, la producción y las diferentes formas de evaluación del aprendizaje.
Tipo de conocimiento que se prioriza	Fáctico (terminología, detalles específicos) y conceptual (clasificaciones y categorías, principios y generalizaciones, teorías, modelos, y estructuras).	Procedimental (habilidades específicas y algoritmos, técnicas y métodos, además de criterios para determinar cuándo usar procedimientos adecuados).	Metacognitivo (aprendizaje estratégico, conocimientos sobre tareas cognitivas, incluyendo apropiado conocimiento contextual y condicional).

Lo anterior evidencia la necesidad de concebir medios de enseñanza y aprendizaje para el tratamiento de los contenidos geométricos que posibiliten un aprendizaje en consonancia con las exigencias de la educación desarrolladora; aspecto que se ve afectado por la tendencia al empleo de un medio específico. Al respecto es común encontrar cierta propensión de los profesores hacia considerar el empleo de la pizarra y los instrumentos de

trazado y medición como los medios ideales para este fin, y relegan así las potencialidades de otros y de su combinación (Fernández, 2016).

Los fundamentos teóricos permiten identificar el significativo rol de los medios de enseñanza y aprendizaje como soportes del método, así como por su contribución al logro de los objetivos (Gamboa y Borrero, 2016, 2017, 2019). En su concepción y desarrollo se destaca el hecho de imprimir mayor protagonismo a la actividad de los estudiantes, sin embargo, los aportes en el sentido de concebir medios de enseñanza y aprendizaje que garanticen la participación activa de los estudiantes en la búsqueda del conocimiento geométrico es insuficiente.

Materiales y métodos

La investigación se desarrolló en la Universidad de Las Tunas, Cuba. En ella se forman estudiantes licenciados en educación en diferentes especialidades, entre ellas Matemática, carrera actualmente con una matrícula de 39 estudiantes. Se determinó una muestra constituida por los 10 estudiantes del tercer año que reciben la asignatura Geometría I. Todos son varones, provienen de la Educación Preuniversitaria, ocho optaron por la carrera en su primera opción y dos en la segunda, lo que evidencia la preferencia por las asignaturas de la especialidad. Como muestra complementaria se seleccionaron cuatro profesores que imparten la disciplina Geometría, con trece años promedio de experiencia.

En la caracterización se delimitó la variable de la investigación: tratamiento de los medios de enseñanza y aprendizaje en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las secciones cónicas y superficies cuádricas, la cual se define como los procedimientos empleados por profesores y estudiantes para la aplicación de los soportes materiales que garanticen el cumplimiento de los objetivos. De esta variable se delimitaron cuatro indicadores, que los autores redactaron mediante la cultura obtenida en la sistematización teórica de diferentes tesis e investigaciones consultadas:

- El grado de contribución al cumplimiento del objetivo que se refiere a la apropiación del contenido con la intervención de los medios de enseñanza y aprendizaje.
- El grado de relación con los contenidos, referido a la garantía que ofrecen los medios de enseñanza y aprendizaje para el abordaje del contenido.
- El grado de actualización, que considera la diversidad de los medios de enseñanza y aprendizaje seleccionados con la inclusión de los avances científico-técnicos.
- El nivel de interacción con los componentes personales del proceso, que se indica la medida en que los medios de enseñanza y aprendizaje favorecen la relación profesor-medio-estudiante-grupo.

Una vez delimitada la variable y sus indicadores, se procedió a diseñar, mediante una matriz, los métodos e instrumentos que permitieron evaluar sus

estados y la escala valorativa con sus correspondientes categorías (Cruz, 2017). Los instrumentos, técnicas y procedimientos utilizados durante la investigación, permitieron contrastar la información para acercarse lo más posible a la realidad. Con la tabulación de los resultados de los instrumentos aplicados se procedió a la valoración de cada indicador.

Indicadores	Evaluación	Variable	Evaluación
1. Grado de contribución al cumplimiento del objetivo.	Medio	Tratamiento de los medios de enseñanza y aprendizaje en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las secciones cónicas y superficies cuádricas.	No adecuado
2. Grado de relación con los contenidos.	Alto		
3. Grado de actualización.	Bajo		
4. Nivel de interacción con los componentes personales del proceso.	Bajo		

El primer indicador se evaluó de medio, debido a que en las técnicas aplicadas se demostró que la apropiación del contenido se produce indistintamente con la implementación de los medios de enseñanza y aprendizaje. El segundo de alto debido a que fue evidente la relación de los medios de enseñanza y aprendizaje empleados con el abordaje del contenido. El tercero se evaluó de bajo dado que se pudo comprobar la diversificación en la selección de los medios, pero igualmente estos no tuvieron en cuenta los avances científico-técnicos y otros aportes al proceso de enseñanza-aprendizaje. El cuarto de bajo toda vez que los medios de enseñanza y aprendizaje seleccionados, y aplicados en las clases, no garantizan ni favorecen las relaciones entre profesor-medio-estudiante-grupo y se centra en la actuación del profesor.

En correspondencia con lo anterior la variable se evaluó de poco adecuada, ya que los resultados obtenidos en los cuatro indicadores se revelan insuficientes no solo en la producción de materiales de tipo manipulativo y de recursos para el aprendizaje de los contenidos geométricos, sino que los estudiantes no interactúan con ellos. Esto afecta la fijación a largo plazo de los conceptos, la calidad en los resultados del aprendizaje y la motivación por el aprendizaje de la Geometría.

El tratamiento dado a los medios de enseñanza y aprendizaje se determinó como causa del problema. En tal sentido, se sobredimensiona el papel del profesor que enseña sobre el de los estudiantes que aprenden, y la jerarquización de los medios tradicionales en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría, con énfasis en el empleo de los instrumentos de medición y la pizarra.

Lo anterior provoca que se desaprovechen las potencialidades de las nuevas tecnologías para el aprendizaje desarrollador de los contenidos geométricos, así como la garantía de una activa participación de los estudiantes en este proceso, lo que limita la formación y desarrollo de habilidades geométricas en ellos que es donde se revelan las insuficiencias. No obstante, durante la caracterización se constataron aspectos positivos que favorecen a esta investigación principalmente en relación con la necesidad manifiesta por los profesores de

concebir medios pertinentes para el proceso de enseñanza-aprendizaje de los contenidos geométricos. Esto apunta a la necesidad de la elaboración de un conjunto de medios de enseñanza y aprendizaje para favorecer el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría en la carrera Licenciatura en Educación Matemática.

Resultados

En esta sección no se presenta en detalles cada una de las características de los medios propuestos por una cuestión de espacio. De tal forma la información que aquí se expone puede ser complementada en Cruz (2017). Como resultado de la indagación empírica se revela la necesidad de brindar mayor protagonismo a los estudiantes y actualizar didácticamente los medios que se emplean. Esto debe hacerse con el aprovechamiento de las potencialidades de las nuevas tecnologías para el desarrollo de habilidades en el proceso de enseñanza-aprendizaje. En este sentido, la implementación de un conjunto de medios de enseñanza y aprendizaje variados puede perfeccionar el aprendizaje desarrollador de los contenidos de la Geometría.

El conjunto de medios de enseñanza y aprendizaje para favorecer el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría tiene múltiples ventajas, entre ellas:

- Facilita una correcta interpretación de conceptos, procedimientos, relaciones y propiedades de secciones cónicas y superficies cuádricas, mediante el proceso de análisis, no solo desde la pizarra especializada, el libro, modelos a escalas, materiales didácticos; sino que cuenta con otros medios de enseñanza y aprendizaje que integran la representación analítica y gráfica de las superficies cuádricas.
- Mediante la visualización simultánea de la representación analítica y gráfica de las superficies cuádricas, con el asistente matemático Geogebra, se podrá observar el efecto que produce en la representación gráfica, la variación de los elementos que conforman su ecuación; a la vez que se evalúa el comportamiento de las propiedades en un intervalo determinado; se analizan las superficies en los diferentes octantes sobre la base de la movilidad que se adquiere con ese medio; por lo que se produce una integración de saberes que favorecen el aprendizaje desarrollador y permiten un alto grado de objetividad de la enseñanza. Esto se puede apreciar en trabajos de Fernández, Gamboa, Rodríguez y Alfonso (2016), Fernández y Gamboa (2016, 2017), Fernández, Gamboa y Rodríguez (2016, 2018).
- Contribuyen a desarrollar el pensamiento geométrico y el pensamiento lógico, dado que mediante su empleo se intensifica y racionaliza el proceso de enseñanza-aprendizaje.
- Se favorece la participación activa de los estudiantes en la búsqueda del conocimiento geométrico, y se propicia un pensamiento productivo y creador.

Estos medios fueron confeccionados en colaboración con uno de los estudiantes de los autores al impartir este contenido, quien se ha convertido actualmente

en profesor del departamento. Al respecto, su testimonio refiere que el hecho de participar en tal producción tuvo un efecto definitivamente superior al obtenido en las clases ordinarias. Aspecto que se convirtió en otra de las ventajas, pues estos medios incentivan la motivación de los estudiantes por el aprendizaje de los contenidos geométricos.

Fases de implementación de los medios de enseñanza-aprendizaje

La propuesta del conjunto de medios de enseñanza y aprendizaje precisan de un tratamiento que comprende tres fases esenciales. Estas se concibieron como parte de la sistematización teórica de las fases adoptadas para el trabajo con los medios de enseñanza y aprendizaje de Ávila (2011). Las tres fases se ejecutan durante las actividades evaluativas previstas en la dosificación de la asignatura Geometría I, de manera que las conferencias constituyen situaciones de enseñanza y aprendizaje previas a la ejecución de estas fases; donde el profesor y los estudiantes interactúan con el sistema de medios tradicionales y mediante el sistema de actividades evaluativas de la conferencia se sondean las opiniones de estos últimos respecto a la pertinencia y la objetividad de esos medios en su proceso de aprendizaje.

A continuación, se organizan las fases, las que se ejecutan mediante las acciones previstas:

Fase 1: Proyección. Este es el momento donde se realiza el análisis de los contenidos que permita proponer, desde sus particularidades, un conjunto de medios que resulten factibles para los objetivos a alcanzar.

En esta fase se llevan a cabo acciones como analizar los resultados de las primeras impresiones brindadas por los estudiantes respecto a los medios empleados en clases y su utilidad para el aprendizaje del contenido, organizar la clase por parejas de equilibrio de acuerdo con el diagnóstico integral y consultar las diversas fuentes bibliográficas acerca de los contenidos relacionados con secciones cónicas y superficies cuádricas. Igualmente, esta fase se centra en desarrollar lluvias de ideas para obtener propuestas de medios que favorezcan el tratamiento del contenido, analizar la relación de los medios propuestos con el objetivo y contenido de la clase y valorar las condiciones materiales existentes para la concepción de los medios propuestos. Al mismo tiempo, se busca determinar las posibilidades y limitaciones de cada medio de enseñanza y aprendizaje en correspondencia con los objetivos y seleccionar los que cumplan con los requisitos anteriormente analizados.

Fase 2: Diseño. Esta fase comprende la elaboración de los medios de enseñanza y aprendizaje seleccionados en la proyección, con la consideración de los diferentes códigos a emplear, ellos son: la forma, el color, el tamaño, las letras, la relación figura – fondo y los márgenes.

Para el desarrollo de esta fase se precisan acciones como analizar las características de los medios propuestos para su elaboración, consultar la bibliografía de Didáctica de la Matemática para delimitar su alcance en la clase

y elevar la preparación de los estudiantes para su elaboración y desarrollar las lluvias de ideas para intercambiar acerca de las particularidades de los medios propuestos y sugerir nuevas ideas al respecto. En correspondencia se pasa a elaborar los medios a cargo de cada pareja de equilibrio, desarrollar un intercambio entre estudiantes para que autoevalúen los productos elaborados y evaluarlos por parte del profesor.

Fase 3: Aplicación. Esta fase comprende aquellos aspectos del manejo del medio que el profesor y los estudiantes deben tener en cuenta en el momento de su empleo. Entre ellos se pueden mencionar: momento de su empleo, lugar de colocación, tiempo de permanencia o exposición, elementos a emplear para concentrar la atención de los estudiantes y la relación palabra – imagen.

Para el desarrollo de esta fase se precisan acciones como dominar el lenguaje del medio por parte de los estudiantes y profesores y valorar las particularidades de cada uno de los medios propuestos para evaluar su combinación durante la clase. Esta fase se enfoca en aplicar los medios propuestos y evaluar su efectividad.

La concepción de estas fases y su ejecución durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría I permitió la elaboración de cuatro medios de enseñanza y aprendizaje por parte de estudiantes y profesores. Estos favorecen intensivamente el tratamiento de los contenidos de secciones cónicas y superficies cuádricas.

Medios de enseñanza y aprendizaje propuestos

Estos cuatro medios de enseñanza y aprendizaje son el producto de la participación de estudiantes y profesores en su concepción. Son el aporte material de esta investigación y, por tanto, su empleo en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría por otros profesores y estudiantes puede prescindir de la aplicación de las fases. Estos medios se caracterizan a continuación:

Libro de secciones cónicas (Gamboa y Cruz, 2019)

Este es un material que contiene información veraz, actual y atractiva acerca de las secciones cónicas, sus orígenes y aplicaciones. Se concibió como un recurso para contribuir al dominio de este contenido y como una fuente de información. Ello propicia que se produzcan intercambios dinámicos entre estudiantes y profesores por medio de su empleo que favorezcan el dominio del vocabulario técnico de la profesión.

Con el empleo de este libro se profundiza en el tema de secciones cónicas estudiado en la Educación Preuniversitaria y reafirmado en la Educación Superior por la importancia que brinda en los métodos y procedimientos de trabajo que influyen directamente en el estudio de las propiedades, elementos y representación gráfica de superficies cuádricas. Además, guarda estrecha relación con otras disciplinas como Análisis Matemático y Física General. Mediante su aplicación se evalúa el proceso con ejercicios que aparecen en él.

Esta evaluación pasa por la comprobación en la adquisición de estilos de trabajo en los estudiantes referentes al tratamiento de estos contenidos.

El libro se implementa como alternativa desde la posición que el profesor adopte. Entre las diferentes formas de empleo se reconoce:

- Como material de apoyo en la clase: en el libro se describen procedimientos a seguir para determinar elementos de las secciones cónicas, se le da relevancia y se vincula el contenido con los diferentes contextos de la vida. El profesor puede organizar la clase con su empleo mediante previa orientación del estudio del libro, o con ideas para compartir y enriquecer la forma de enseñar secciones cónicas desde los contextos de la vida y relacionarlo con otras disciplinas, así como algunas ideas necesarias para abordar la clase acerca de estos contenidos. Por ejemplo, previa orientación del estudio del libro, el profesor puede propiciar un intercambio con los estudiantes, donde se abunde acerca de los principales investigadores que hicieron sus aportes a esta rama de la ciencia, puede relacionar el contenido con la vida o con otras disciplinas, desarrollar la clase práctica y su evaluación a partir de los ejercicios propuestos.
- Como material de consulta para estudios individuales: el trabajo con el libro brinda definiciones, ecuaciones generales y canónicas de las curvas y sus elementos; además se combina con la ejemplificación de los mismos. Se sistematizan y consolidan los conceptos tratados en el tema y se vinculan estos contenidos con la vida. Al respecto, el material posibilita el trabajo independiente del estudiante, con el apoyo o aplicación del conocimiento en las clases prácticas. También el profesor puede orientar que se profundice en el tema y que a su vez resuelva ejercicios de los que se proponen, esto se convierte en otra forma didáctica de poner recursos en sus manos para modelar el proceso mediante la evaluación. Además de la bibliografía básica y complementaria del programa de Geometría, los estudiantes cuentan con el libro como material de consulta poniéndolo a su disposición en su autopreparación; pues el material contribuye a enriquecer su aprendizaje y amplía su cultura por la forma en que es abordado el contenido de secciones cónicas, por su integración con la Física y con la vida.
- Como bibliografía complementaria: el libro es un material que estudiantes y profesores pueden consultar para profundizar en los aspectos esenciales de las secciones cónicas y las relaciones de estos contenidos con diferentes disciplinas y contextos de la vida; así como estudiar los procedimientos y diseñar sus propios ejercicios a partir de los ya concebidos; pues en el libro se abordan cuestiones más específicas de las cónicas que en la clase.

Pizarra especializada

Es una pizarra magnética común que contiene graficado de forma permanente los ejes del sistema de coordenadas cartesianas rectangulares en \mathbb{R}^3 (Figura 1), y cuenta con imanes en formas circulares pequeñas que simulan puntos que pueden ser utilizados para las representaciones. Es un importante medio para

la racionalización del trabajo con este sistema de ejes (se refiere al sistema coordinado compuesto por el eje de las abscisas: X, el de las ordenadas: Y, y el de las cotas: Z). Este sistema se distingue por su permanente representación en la pizarra de manera que, cuando se grafiquen los puntos en \mathbb{R}^2 y en \mathbb{R}^3 , rectas paralelas y perpendiculares, planos, cuerpos, superficies cuádricas, o se quieran rotar los ejes coordenados y sea necesario representar otra información, no sea necesario graficar nuevamente este sistema.

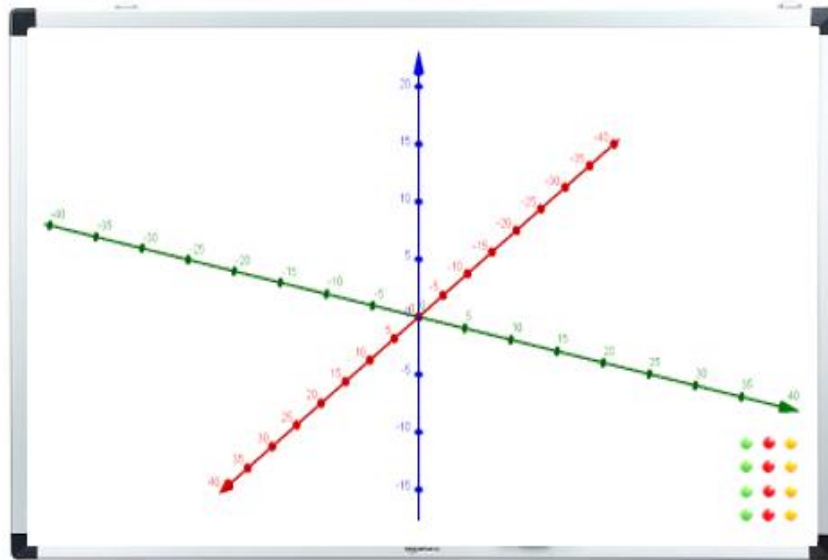


Figura 1

Su ventaja radica en la contribución al éxito de la clase por el tiempo que ahorra al representar el sistema de ejes coordenados con tizas en la pizarra para luego añadir otra información. Siempre está disponible en el aula para exponer los conocimientos, realizar los análisis, conjeturas, generalizaciones.

Modelo a escala de las superficies cuádricas (Figura 2)



Figura 2

Es una representación tridimensional de los objetos y fenómenos que se realizan con papel y engrudo, destinados al uso didáctico en el aula, ya sea colectivo o individual, en dependencia del tamaño de los objetos. Los modelos a

escala reducida del objeto, permiten a los estudiantes formarse representaciones correctas de las superficies estudiadas, formarse una idea acerca de la superficie en cuestión. Además, su valor didáctico depende del uso que de ellos haga el profesor, pues es él quien argumenta, integra, aporta, establece el ritmo de la presentación y orienta. Su valor se vincula con la palabra del profesor.

Ideas para enriquecer la enseñanza de las superficies cuádricas mediante la implementación de los modelos a escalas. Estas ideas son una alternativa que pueden ser aplicadas por el profesor o por los estudiantes. El objetivo es que se aprenda Geometría mediante su lenguaje técnico, que los estudiantes encuentren formas de crear estilos propios de enseñanza que contribuyan al interés y la motivación por los contenidos geométricos.

Los contenidos de superficies cuádricas son considerados esenciales en el aprendizaje de las funciones de dos variables, tanto en el cálculo diferencial, como en el cálculo integral. No reduzca las horas de su dosificación para favorecer otros que se consideren más importantes, sino se aprende bien, enseñar otros contenidos se dificultará más. Además, los estudiantes deben aprender a relacionar e interpretar las propiedades y los elementos de las cuádricas a partir de la observación y la manipulación de los modelos a escalas de las superficies. Permítales su consulta en todo momento para facilitar la aplicación de los conocimientos. Igualmente, los modelos de las superficies cuádricas deben relacionarse con los contextos donde se desarrolla el estudiante. Ejemplifique desde su propio contexto para que el conocimiento tenga una mayor significatividad.

Elipsoide con GeoGebra (Cruz y Gamboa, 2020e)

Este medio de enseñanza y aprendizaje se diseñó con el objetivo de representar superficies cuádricas con el GeoGebra. Al respecto, se puede apreciar un ejemplo desarrollado en el video de youtube “Elipsoides con GeoGebra” (<https://www.youtube.com/watch?v=j0tEY5iSb7g>). Se propone iniciar a partir de la definición de superficie cuádrica como toda superficie cuya ecuación sea de segundo grado. No es necesaria la existencia de las tres variables para que la ecuación represente una superficie. Por ejemplo, $x=3$ es una superficie que le corresponde a un plano paralelo al plano coordenado Oyz. Por otra parte, toda ecuación con tres variables no representa una superficie, tal es el caso de $x^2+y^2+z^2=0$ que solo satisface el origen de coordenadas O (0;0;0).

Se sugiere que se considere la ecuación general de segundo grado con tres variables: $Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Iz+K=0$, donde uno, por lo menos, de los coeficientes de los términos de segundo grado, es diferente de cero. En GeoGebra se pueden crear deslizadores para cada uno de los coeficientes de la A a la K (Cruz y Gamboa, 2020d). Se puede visualizar cualquier superficie cuádrica por estudiar si se mueven estos deslizadores (Figura 3).

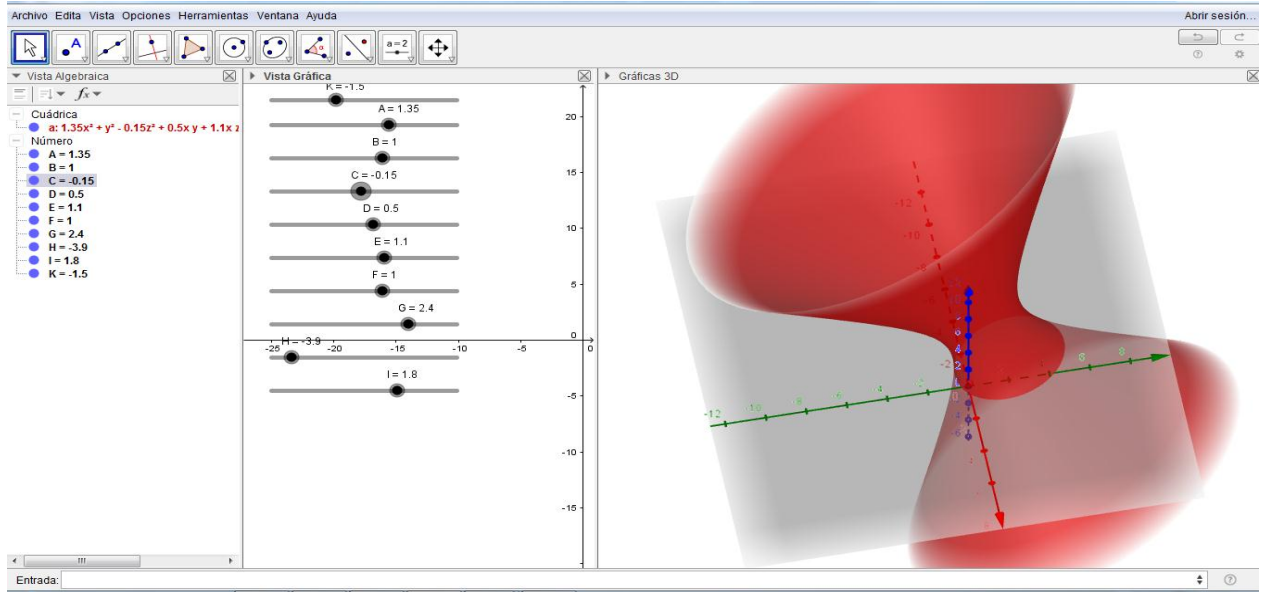


Figura 3

Esta ecuación general no es lo suficientemente sencilla como para estudiar las propiedades geométricas de las superficies que ellas representan. Por lo que, realizando transformaciones de coordenadas, se recomienda llevar la ecuación a una forma algebraica más simple sin términos rectangulares: xy , xz , yz , que se suprimen por rotación de ejes, y sin términos de 1er grado que se eliminan mediante una traslación de ejes coordenados. Generalizando, para una tercera dimensión, se obtienen dos tipos de ecuaciones. La primera ecuación se refiere a las cuádricas centradas. Tendrá solamente los términos cuadrados y un término independiente de las variables. La forma general es: $Mx^2 + Ny^2 + Pz^2 = R$. Aquí se pueden crear deslizadores para cada uno de los coeficientes M , N , P y R (Cruz y Gamboa, 2020b). Se puede visualizar cualquier superficie cuádrica centrada al mover estos deslizadores (Figura 4).

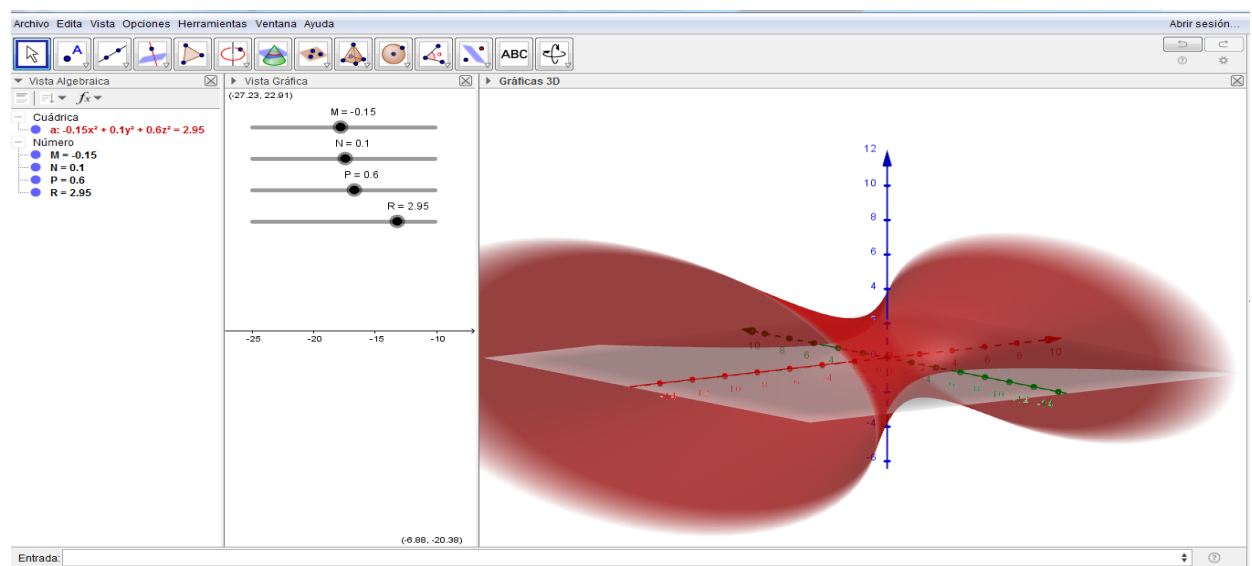


Figura 4

La segunda ecuación se refiere a las cuádricas no centradas. Aparecerán dos variables al cuadrado y una lineal. La forma general es: $Mx^2 + Ny^2 = Sz$. Aquí también se recomienda crear deslizadores para cada uno de los coeficientes M , N y S (Cruz y Gamboa, 2020c) para el reconocimiento de patrones (Figura 5).

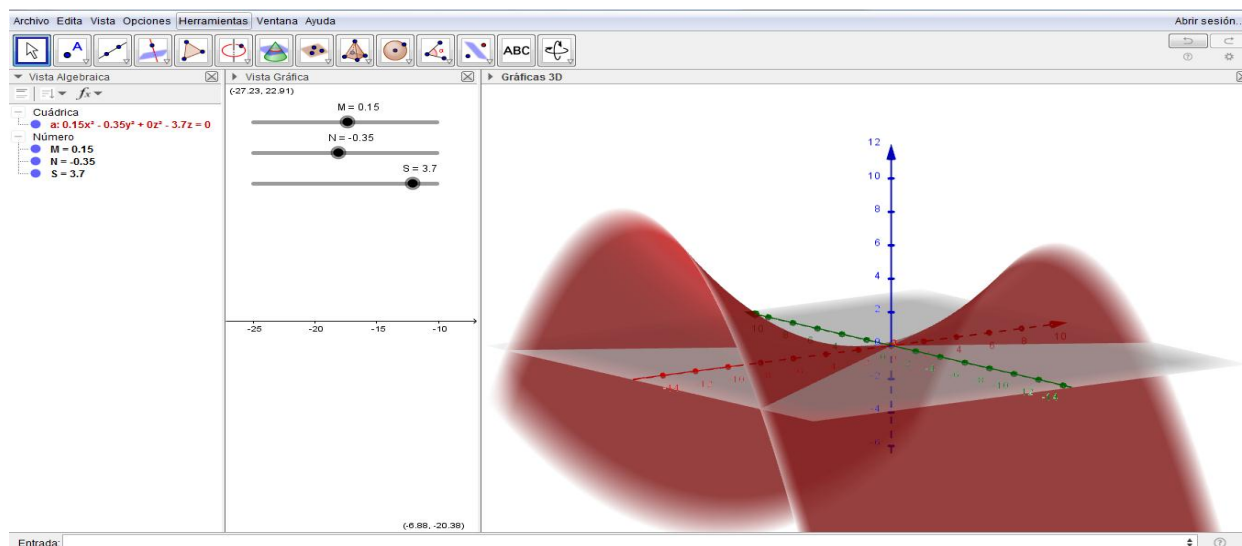


Figura 5

Estas imágenes representan un momento de trabajo con los estudiantes en interacción con Geogebra para estimular que aprendan a preguntar, plantear y justificar conjeturas, estimular su protagonismo y potenciar el reconocimiento de modelos, la búsqueda de patrones y conjeturas. Esto es a partir de mover los deslizadores y así poder visualizar en la vista en 3D la superficie que se forma.

En el elipsoide que se trabaja durante la implementación de este medio, solo se va a enfatizar en las cuádricas centradas. Se debe resaltar la característica esencial que la hace ser una superficie centrada, y es el hecho de que las mismas poseen en su ecuación tres variables cuadráticas y un término independiente de las variables (Tabla 2). Al respecto, se recomienda realizar una transformación en la ecuación de forma que se obtiene la ecuación canónica del elipsoide.

Tabla 2

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Elipsoide: nombre del Cuerpo geométrico engendrado por una elipse que gira alrededor de uno de sus ejes. La gráfica de la siguiente ecuación, en la que a , b y c son números reales positivos, es un elipsoide, como característica fundamental de la ecuación se encuentra que los tres coeficientes de las variables cuadráticas son positivos.

En este caso los deslizadores a crear son a , b , c (Cruz y Gamboa, 2020a). Se puede visualizar cualquier elipsoide al mover estos deslizadores (Figura 6).

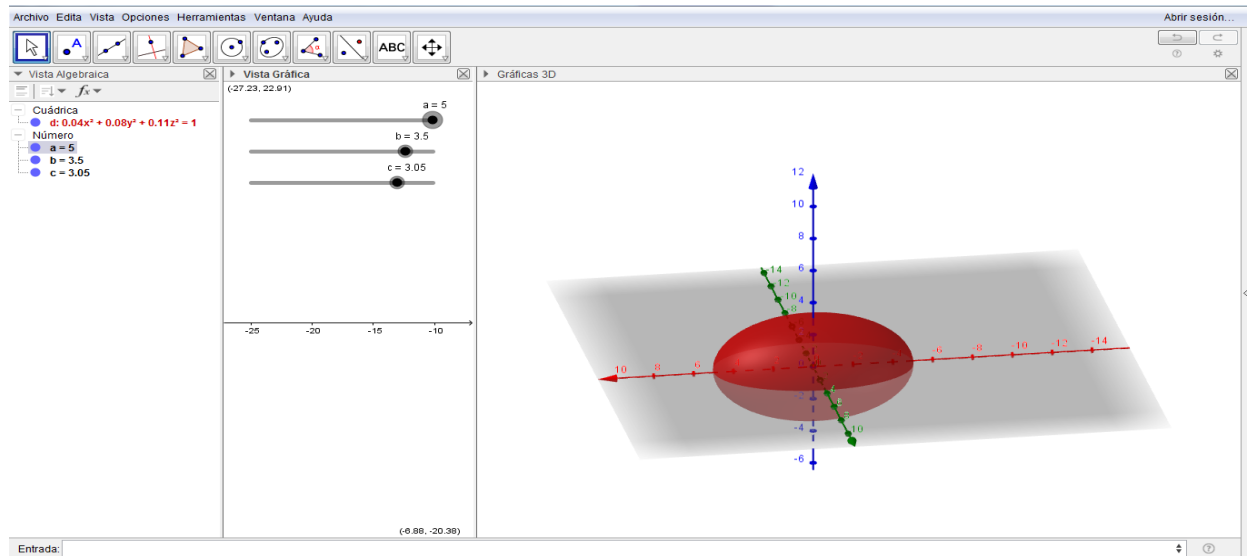


Figura 6

Si $a=b=c$ se obtiene el caso particular del elipsoide, la esfera de radio $r=a$. De tal forma solo sería necesario un único deslizador para valores de a (Figura 7).

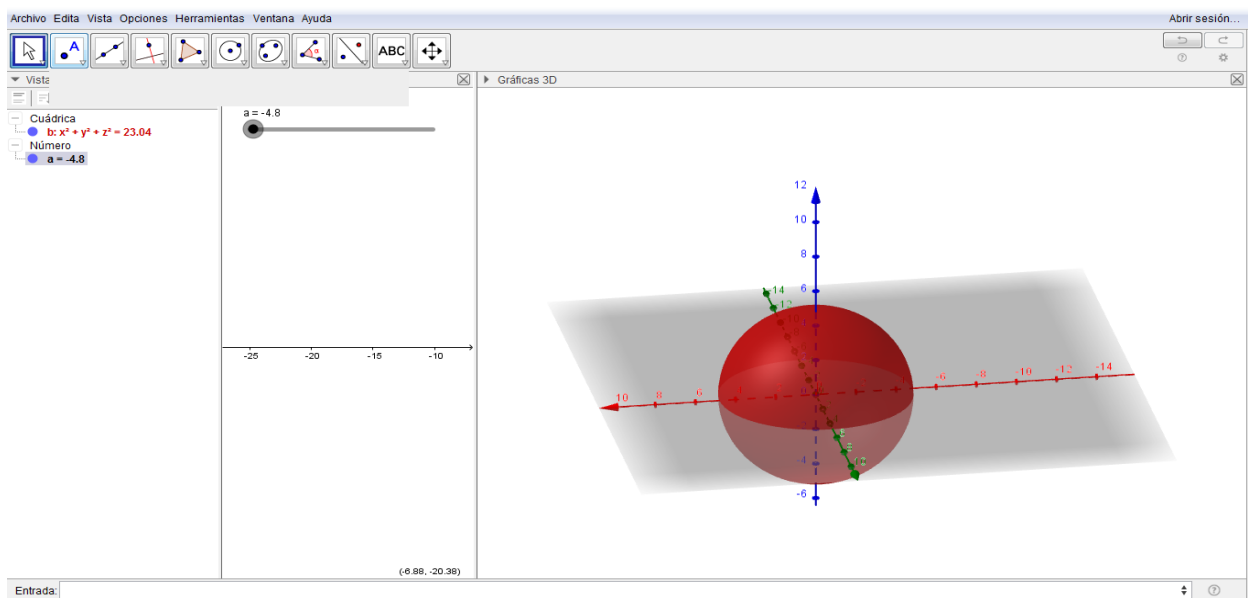


Figura 7

Se recomienda representar gráficamente un elipsoide y analizar sus propiedades, mediante el uso del GeoGebra, teniendo en cuenta los seis pasos lógicos para el procedimiento algorítmico de las superficies cuádricas:

- Intercepción con los ejes coordenados.
- Trazas sobre los planos coordenados.
- Simetría respecto a planos coordenados, ejes coordenados y origen.
- Secciones planas paralelas a los planos coordenados.

- Extensión.
- Representación gráfica.

La intención es seguir los pasos con casillas de control, como una de las potencialidades del GeoGebra para este tipo de trabajo. Al respecto el siguiente ejemplo es una alternativa que se propone.

Ejemplo1: Represente gráficamente el elipsoide cuya ecuación se brinda a continuación, y analice las propiedades teniendo en cuenta los pasos del procedimiento algorítmico.

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$$

Para el caso de la superficie del ejemplo que se muestra, se entra la ecuación del elipsoide y a los deslizadores se les dan valores $a=2$, $b=4$ y $c=3$. Luego se recomienda crear la casilla de control “Interceptos” para el análisis del primer paso del procedimiento.

El primer paso a seguir para la representación y análisis de las propiedades de la superficie, y siguiendo el procedimiento, es encontrar cuáles son los puntos donde la gráfica de la superficie interseca a cada uno de los ejes coordenados, y para su determinación analítica en cada eje, se igualan a cero las demás variables. En el GeoGebra, en la “Vista Gráfica en 3D” aparece el sistema de coordenadas en el espacio. Se debe accionar la casilla de control “Interceptos”, una vez creada y determinados los interceptos mediante el comando “Interseca”; luego se representarán estos puntos en los ejes coordenados.

Luego se procede a determinar las trazas de la superficie sobre los planos coordenados, que consiste en determinar la curva de intersección de la superficie con el plano seleccionado. Su expresión analítica está dada por la consideración simultánea de las ecuaciones de la superficie y el plano coordenado. Analíticamente en cada plano se iguala a cero la variable que no forma parte del mismo, dando como resultados: cónicas, puntos o rectas. En la “Vista Gráfica en 3D” aparecerán estos elementos representados, una vez que se accione la casilla de control “Trazas” y se accione, además la casilla correspondiente al plano que se desee conocer. En este caso se debe, realizar análogamente al caso anterior, pero intersecando la ecuación de la superficie con el plano en cuestión. Esto da como resultado la traza sobre el plano coordenado.

Posteriormente se analiza la simetría, la cual es un aspecto a tener en cuenta para la representación gráfica de la superficie. Se determina respecto a: ejes coordenados, planos coordenados y origen de coordenadas. Si la ecuación resultante en cada eje, plano y origen de coordenadas es igual a la ecuación original, entonces la gráfica de la superficie es simétrica respecto a ese eje, plano u origen de coordenadas.

- Simetría respecto a ejes: cuando se marque la casilla de control “Ejes” aparecerán los puntos en las Trazas, y sus simétricos respecto a su eje correspondiente, los que se mueven a medida que se desplazan los puntos que le dieron origen.
- Simetría respecto a planos: cuando se marque la casilla de control “Planos” aparecerán los puntos en las Trazas, y sus simétricos respecto a los planos correspondientes, los que se mueven a medida que se desplazan los puntos que le dieron origen.
- Simetría respecto al origen de coordenadas: cuando se marque la casilla de control “Origen” aparecerán los puntos en la superficie, y sus simétricos respecto al origen de coordenadas, el que se moverá a medida que se desplace el punto que lo origina.

Luego se procede al estudio de las secciones planas paralelas a los planos coordenados, las cuales brindan la valiosa información de cuáles figuras se forman si se le hace un “corte” imaginario a la superficie cuádrlica, en un valor determinado, de cualquiera de los tres ejes, con planos paralelos a los planos coordenados. Analíticamente en cada plano se sustituye la variable que no corresponde al mismo por K . En la “Vista Gráfica en 3D”, se debe activar la casilla de control “Secciones planas paralelas a los planos coordenados”, una vez creada y luego aparecerá una casilla de control cada vez que activemos el plano coordenado respecto al cual se quiere conocer (Oxy , Oxz , Oyz). Una vez que accionemos las casillas de control correspondiente a cada plano estos pueden ser desplazados a partir de los deslizadores f_2 , f_1 , y f respectivamente. A medida que sean desplazados se representará la curva (o ente geométrico) que se obtiene al interceptar la superficie cuádrlica con dichos planos. Se recomienda para lograr este efecto, que se relacionen los valores de los interceptos con los ejes coordenados, con las secciones planas paralelas a los planos coordenados mediante los deslizadores.

Luego, cuando se active la casilla de control “Extensión” desaparecerán los planos representados en el paso anterior, pero se conservan los interceptos de dichos planos con la superficie. Para analizar la extensión de la figura, se procede a mover los deslizadores f_2 , f_1 , y f para que en el sistema de ejes coordenados se perciba si la parte de la cuádrlica correspondiente a cada semieje termina en un punto. Si esto ocurre en las seis direcciones de los semiejes, entonces la cuádrlica será cerrada.

Finalmente se debe crear y luego activar la casilla de control “Representación gráfica”, luego aparecerá la representación gráfica, pero conservando todos los elementos encontrados con anterioridad: los interceptos, las trazas y las secciones planas paralelas a los planos coordenados. Se pueden ocultar los mismos, si se desea para poder visualizar mejor la gráfica de la superficie.

Una vez concluido el ejemplo, como parte de la implementación del medio, presentado mediante el GeoGebra, donde se desarrolló el procedimiento algorítmico con los pasos correspondientes en función de las diferentes casillas

de control, entonces es una excelente oportunidad para reflexionar con los estudiantes. Esto incluirá que se realicen comparaciones con diferentes valores a partir de cambios de elipsoides con los deslizadores, valoraciones de las propiedades a partir de esas transformaciones, incluyendo el caso en que todos los semiejes sean iguales (Esfera), y generalizaciones de ese procedimiento a partir de las valoraciones hechas (Figura 8).

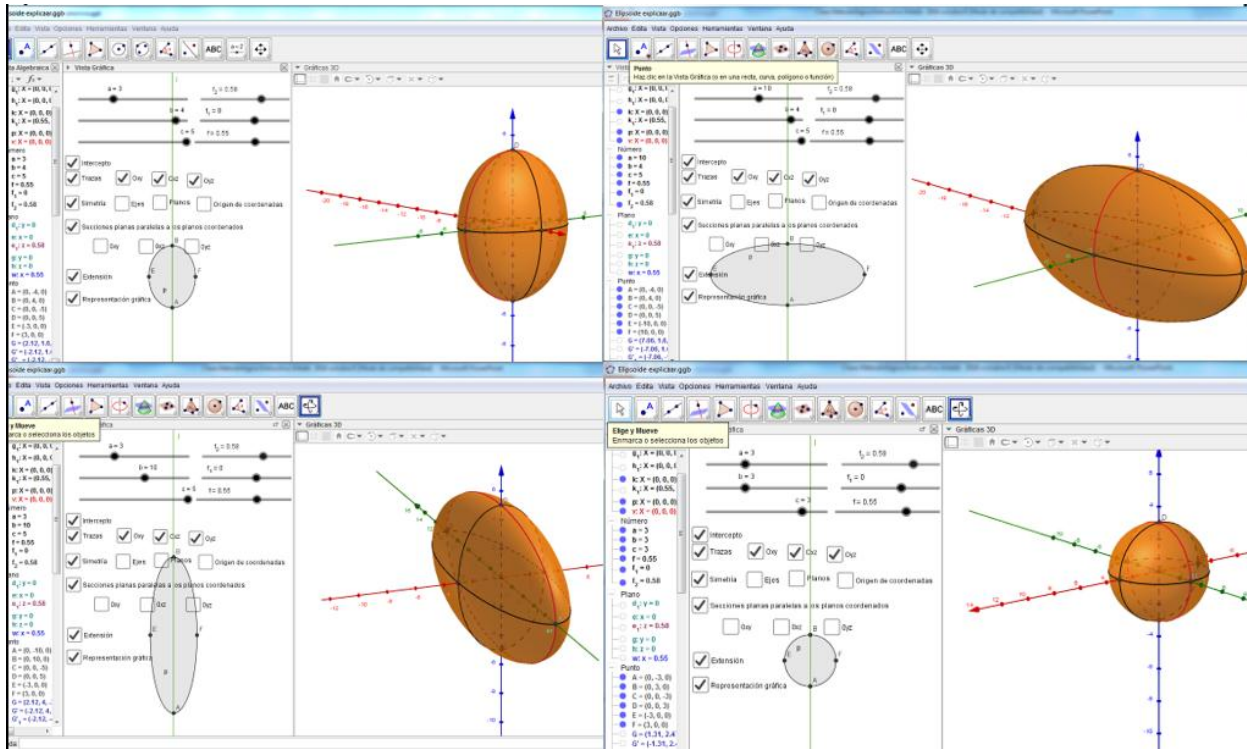


Figura 8

Se realizaron talleres y seminarios donde los estudiantes elaboraron medios de enseñanza y aprendizaje, planificaron y expusieron clases donde implementaron creativamente los medios. El empleo de los medios de enseñanza y aprendizaje adquiere cada vez mayor relevancia sobre la base del desarrollo científico-técnico, lo que significa el fácil acceso a estos medios y las condiciones para su empleo. Es por ello que una sugerencia en correspondencia con lo anterior reside en un aula especializada que contenga un conjunto de medios de enseñanza y aprendizaje con condiciones de acceso, listos para su empleo, de manera que se conduzca en forma racional la clase. Esto significa que el trabajo del profesor pase a un nivel más alto, convirtiéndose en un trabajo más calificado y variado, la clase se estructura de una forma más interesante y efectiva.

En tal sentido, GeoGebra permite el trazado dinámico de construcciones geométricas, así como el tratamiento algebraico y otras bondades muy útiles para el trabajo educativo. Esto genera actividades, ejercicios y problemas más desarrolladores, diferentes a los usuales con lápiz y papel. Es necesario estimular que aprendan a preguntar, buscar ejemplos y contraejemplos,

plantear y justificar conjeturas, establecer diferencias y semejanzas, buscar argumentos, así como a reflexionar con interrogantes como ¿qué pasaría si...?

La aspiración es estimular el protagonismo de los estudiantes y que estos puedan manipular las condiciones de los ejercicios propuestos y establecer productivas conjeturas para analizar la variación o no de propiedades y relaciones al modificarlas, obtener ideas para argumentar su validez, entre otras cuestiones. De tal forma se puede potenciar el reconocimiento de modelos, la búsqueda de patrones, la generalización, la abstracción, la comprobación, la refutación, la demostración y el planteamiento de conjeturas, tanto por los estudiantes como por los profesores.

Análisis de resultados

La valoración de la efectividad de los medios de enseñanza y aprendizaje se realizó con la consideración de dos elementos importantes en la constatación de resultados de naturaleza cualitativa y cuantitativa (Gamboa, 2017, 2018a, 2020b; Gamboa y Borrero, 2020). De forma simultánea se aplicó el experimento pedagógico formativo. Este se evaluó mediante los diferentes instrumentos que permitieron apreciar, desde lo cuantitativo, el comportamiento de los indicadores y de la variable, lo que facilitó la comparación de los resultados iniciales y finales con la demostración de los avances alcanzados. Para la medición de los resultados se diseñaron y aplicaron los instrumentos que permitieron comprobar el estado final de la variable. Los resultados cuantitativos de dichos instrumentos (Cruz, 2017) son la base de las siguientes apreciaciones.

La guía para la revisión de planes de clases, aplicada para comprobar el grado en que los profesores relacionan los medios de enseñanza y aprendizaje empleados en la clase con los contenidos y su actualización, permitió obtener los siguientes resultados:

- En el 100 % de los planes de clases se hace corresponder con efectividad el contenido abordado con la concepción de los medios de enseñanza y aprendizaje, se diversifica su empleo y este se planifica en momentos específicos de la clase. Además, se consideran los últimos avances de la ciencia y la técnica en la concepción de los medios de enseñanza y aprendizaje.

Para comprobar el grado en que los profesores prevén el empleo de los medios de enseñanza y aprendizaje en correspondencia con el cumplimiento del objetivo, su relación con los contenidos y su actualidad, se aplicó una guía de revisión de las actas del colectivo de disciplina que proporcionó los siguientes resultados:

- En el 90 % de las actas se valoran los medios de enseñanza y aprendizaje desde los aportes más actualizados de la didáctica y estos se corresponden con los objetivos del programa.
- En el 100 % de las actas se registran diversas opiniones acerca de la

pertinencia de los medios de enseñanza y aprendizaje y se valora su actualidad.

La guía de observación a clases se centró en comprobar durante el desarrollo de la clase la relación de los componentes personales del proceso con la implementación de los medios de enseñanza y aprendizaje, en correspondencia con el cumplimiento del objetivo, su relación con los contenidos y el nivel de actualización que presentan. Esta guía ofreció los siguientes resultados:

- En el 100 % de las clases existe correspondencia entre los medios de enseñanza y aprendizaje empleados, los objetivos y el contenido de la clase. Además, se emplean medios de enseñanza y aprendizaje actualizados.
- En el 75 % de las clases los estudiantes interactúan con los medios de enseñanza y aprendizaje y en igual por ciento el profesor gestiona esa interacción del grupo con los medios.

Luego de la observación a clases se aplicó un guía de encuesta a estudiantes para analizar su opinión acerca de la relación de los medios de enseñanza y aprendizaje empleados con los componentes personales del proceso. Dicha encuesta permitió arribar a los siguientes resultados:

- Todos los estudiantes afirmaron que sus profesores emplean medios de enseñanza y aprendizaje en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los contenidos geométricos.
- El 100 % de la muestra valora con palabras positivas la correspondencia de los medios de enseñanza y aprendizaje utilizados con los objetivos de la clase. Además, igual por ciento asegura que su profesor les permite interactuar con los medios de enseñanza y aprendizaje durante la clase.
- Todos los estudiantes plantearon argumentos satisfactorios acerca de su participación en las clases de la asignatura Geometría I donde se emplean los medios de enseñanza y aprendizaje. Estos argumentos consideran que hoy esta actividad es más protagónica y les permite apropiarse de un grupo de acciones para diseñar sus medios. Consideran estos actualizados y novedosos y por tanto se identifican y motivan por el contenido.

La entrevista a profesores se realizó para conocer su opinión acerca de la contribución de los medios de enseñanza y aprendizaje al cumplimiento del objetivo de su clase y a la interacción con los componentes personales del proceso. Al respecto esta entrevista ofreció como resultados:

El 100 % de la muestra valora positivamente el empleo de los medios de enseñanza y aprendizaje en las clases de Geometría y de igual forma dominio por sus estudiantes de las definiciones y propiedades de las secciones cónicas y las superficies cuádricas.

Todos los profesores coinciden en que los medios de enseñanza y aprendizaje propuestos contribuyen al cumplimiento del objetivo de la clase. Sin embargo,

no todos comparten el criterio (25 %) de que los estudiantes interactúen con efectividad con los medios durante la clase. La tabulación de los resultados de los instrumentos aplicados (Ta) posibilitó arribar a la valoración final de cada indicador.

Tabla 3: Comparación de los resultados de la caracterización inicial y final

Indicadores	Evaluación inicial	Evaluación final	Variable	Evaluación inicial	Evaluación final
Grado de contribución al cumplimiento del objetivo.	Medio	Alto	Tratamiento de los medios de enseñanza y aprendizaje en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las secciones cónicas y superficies cuádricas.	No adecuado	Bastante adecuado
Grado de relación con los contenidos.	Alto	Alto			
Grado de actualización.	Bajo	Alto			
Nivel de interacción con los componentes personales del proceso.	Bajo	Medio			

El primer indicador, referido al grado de contribución al cumplimiento del objetivo, se evaluó de alto, debido a que en la totalidad de la muestra se favorece la apropiación del contenido mediante la implementación directa de los medios de enseñanza y aprendizaje. El segundo indicador, referido al grado de relación con los contenidos, se evaluó de alto debido a que el 100% de los medios de enseñanza y aprendizaje empleados garantizan el abordaje del contenido. El tercer indicador, referido al grado de actualización, se evaluó de alto debido a que el 100% de los medios de enseñanza y aprendizaje son diversos e incluyen los avances científico-técnicos. El cuarto indicador, referido al nivel de interacción con los componentes personales del proceso, se evaluó de medio debido a que los medios de enseñanza y aprendizaje seleccionados aun favorecen con más énfasis la relación profesor-medio.

En correspondencia con lo anterior, la variable tratamiento de los medios de enseñanza y aprendizaje en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las secciones cónicas y superficies cuádricas se evaluó de bastante adecuada, ya que los resultados obtenidos en los cuatro indicadores demostraron: que los estudiantes se integraron en las actividades e interactuaron con los medios de enseñanza y aprendizaje y resolvieron las insuficiencias en relación con el dominio de los contenidos geométricos relacionados con las secciones cónicas y superficies cuádricas.

CONCLUSIONES

El proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría se perfeccionó de acuerdo con las diferentes exigencias realizadas a la formación pedagógica del profesional de la especialidad Matemática, en ese proceso la concepción de las diferentes generaciones de medios de enseñanza y aprendizaje consideró el protagonismo de los estudiantes en la apropiación de los contenidos

geométricos; sin embargo no se logró un tratamiento de estos medios que posibilitara abordar estos contenidos desde su combinación.

La sistematización de los referentes teóricos permitió abordar el significativo rol de los medios de enseñanza y aprendizaje en la participación activa de los estudiantes en la búsqueda del conocimiento geométrico, lo anterior sustentado en la teoría histórico-cultural como referente psicológico del desarrollo de la personalidad y los aportes a la didáctica de la Educación Superior Pedagógica mediada por un proceso de enseñanza-aprendizaje desarrollador.

La caracterización inicial permitió constatar el insuficiente tratamiento dado a los medios de enseñanza y aprendizaje para abordar los contenidos geométricos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría, el cual se debe, entre otras causas, al sobredimensionamiento del papel del profesor y de la jerarquización de los medios tradicionales.

El conjunto de medios de enseñanza y aprendizaje organizado en tres fases propicia un marcado protagonismo de los estudiantes con énfasis en la adopción de acciones que le ayuden a la fijación de los contenidos de secciones cónicas y superficies cuádricas y a la calidad del aprendizaje de la Geometría.

La valoración de la efectividad del conjunto de medios de enseñanza y aprendizaje implementados permitió registrar transformaciones positivas en los estudiantes, de tercer año de la especialidad Matemática de la Universidad de Las Tunas, relacionadas con su actitud ante el aprendizaje de los contenidos de secciones cónicas y superficies cuádricas.

BIBLIOGRAFÍA

Amat, M., González, O. y Gamboa, M.E. (2005). Las inferencias lógicas: una vía para desarrollar el aprendizaje del escolar de secundaria básica. In V Congreso Internacional Virtual de Educación.

Ávila, Y. (2011). La educación audiovisual en el proceso de formación inicial del profesional de la educación. (Tesis doctoral). Universidad de Ciencias Pedagógicas Pepito Tey, Las Tunas.

Carmenates, O. A. y Gamboa, M.E. (2005). La Matemática Relacional a través de la Geometría y su presentación en la Educación Media Superior de la Escuela Cubana. Boletín de la Sociedad Cubana de Matemática y Computación, 3(1).

Carmenates, O.A., Rodríguez, M. y Gamboa, M.E. (2014). Recursos didácticos para favorecer la resolución de problemas matemáticos. En S. Lima (Ed.), Didácticas de las Ciencias. Nuevas perspectivas (5), (pp. 11-38). La Habana: Sello Editor Educación Cubana.

Castillo, Y. y Gamboa, M.E. (2020). Unidades Didácticas para Matemáticas con carácter interdisciplinario. Los sistemas de representación interdisciplinar en Educación Preuniversitaria. OmniScriptum Publishing Group, Mauritius: Editorial Académica Española.

Cruz, A. (2017). Conjunto de medios de enseñanza y aprendizaje para la Geometría I en la carrera Licenciatura en Educación Matemática-Física. Tesis de Maestría. Universidad de Las Tunas. Las Tunas.

Cruz, A. y Gamboa, M.E. (2005). Actividades alternativas para favorecer la realización de un aprendizaje desarrollador a través de las clases de Matemática en los estudiantes de Educación Secundaria. Boletín de la Sociedad Cubana de Matemática y Computación, 3(1).

- Cruz, A. y Gamboa, M.E. (2020a). Deslizadores para tratamiento didáctico de ecuación canónica del elipsoide con Geogebra. Recuperado de <http://roa.ult.edu.cu/jspui/handle/123456789/4526>
- Cruz, A. y Gamboa, M.E. (2020b). Deslizadores para tratamiento didáctico de ecuación de cuádricas centradas con Geogebra. Recuperado de <http://roa.ult.edu.cu/jspui/handle/123456789/4524>
- Cruz, A. y Gamboa, M.E. (2020c). Deslizadores para tratamiento didáctico de ecuación de cuádricas no centradas con Geogebra. Recuperado de <http://roa.ult.edu.cu/jspui/handle/123456789/4525>
- Cruz, A. y Gamboa, M.E. (2020d). Deslizadores para tratamiento didáctico de ecuación general de cuádricas con Geogebra. Recuperado de <http://roa.ult.edu.cu/jspui/handle/123456789/4523>
- Cruz, A. y Gamboa, M.E. (2020e). Elipsoide con Geogebra. Recuperado de <http://roa.ult.edu.cu/jspui/handle/123456789/4527>
- Cruz, A., Gamboa, M.E. y Rodríguez, M. (2018). Propuesta para premio CITMA: Conjunto de medios de enseñanza y aprendizaje para la Geometría en la carrera Licenciatura en Educación Matemática-Física. Recuperado de <http://roa.ult.edu.cu/jspui/handle/123456789/3868>
- Fernández, H. (2016). Medios dinámicos para el proceso de enseñanza-aprendizaje de los contenidos geométricos de la disciplina fundamentos de la matemática escolar. Tesis de Maestría. Universidad de Las Tunas. Las Tunas.
- Fernández, H. y Gamboa, M.E. (2005). Actividades en las que se pone de manifiesto el uso de los medios de enseñanza en forma de sistema para la enseñanza de la Geometría. Boletín de la Sociedad Cubana de Matemática y Computación, 3(1).
- Fernández, H. y Gamboa, M.E. (2012). Una propuesta para enseñar Geometría en séptimo grado. En B. Almeida (Presidencia), Estrategias para la enseñanza de la Matemática, la Estadística y la Computación. Simposio llevado a cabo en el XIV Evento Internacional La enseñanza de la Matemática, la Estadística y la Computación Matecompu 2012, Matanzas, Cuba.
- Fernández, H. y Gamboa, M.E. (2016). La didáctica de la Geometría en función del desarrollo tecnológico de la Pedagogía contemporánea. Bases de la Ciencia, 1(1), 37-54.
- Fernández, H. y Gamboa, M.E. (2017). Actividades con medios dinámicos para el proceso de enseñanza-aprendizaje de los contenidos geométricos. Opuntia Brava, 9(3).
- Fernández, H., Gamboa, M.E. y Rodríguez, M. (2016). Geogebra: un medio eficaz en la enseñanza de las funciones reales de una variable real. En M. Mesa (Presidencia), Las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones en la educación básica. Simposio llevado a cabo en la XVI Convención y Feria Internacional Informática 2016, La Habana, Cuba.
- Fernández, H., Gamboa, M.E. y Rodríguez, M. (2018). Premio CITMA: Medios dinámicos para el proceso de enseñanza-aprendizaje de los contenidos geométricos de la disciplina Fundamentos de la Matemática Escolar. Recuperado de <http://roa.ult.edu.cu/jspui/handle/123456789/3869>
- Fernández, H., Gamboa, M.E., Rodríguez, M. y Alfonso, O. (2016). La Geometría asistida por Geogebra. Boletín Redipe, 5(2), 63-70.
- Fonseca, J.J. y Gamboa, M.E. (2004). Recomendaciones metodológicas para el diseño del proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría en la secundaria básica de una manera dinámica. In IV Congreso Internacional Virtual de Educación.
- Fonseca, J.J. y Gamboa, M.E. (2010). La enseñanza de la Geometría asistida por computadoras: una nueva realidad en la secundaria básica. Revista Didasc@Lia : Didáctica y Educación, 1(3), 47-62.
- Fonseca, J.J. y Gamboa, M.E. (2011). ¿Cómo contribuir al desarrollo del pensamiento geométrico del alumno del nivel medio básico?. Revista Opuntia Brava, 3(3).

- Fonseca, J.J. y Gamboa, M.E. (2017a). Aspectos teóricos sobre el diseño curricular y sus particularidades en las ciencias. *Boletín Redipe*, 6(3), 83-112.
- Fonseca, J.J. y Gamboa, M.E. (2017b). Nociones sobre Didáctica de la Matemática. *Didáctica de la Matemática para docentes del nivel medio y medio superior*. OmniScriptum Publishing Group, Mauritius: Editorial Académica Española.
- Gamboa, M.E. (2005). Estrategia didáctica para el diseño curricular de unidades didácticas en el área de conocimientos de las ciencias exactas en la Educación Secundaria. *Boletín de la Sociedad Cubana de Matemática y Computación*, 3(1).
- Gamboa, M.E. (2006). Aprendizaje y enseñanza de la matemática tomando como bases sus aplicaciones prácticas. In VI Congreso Internacional Virtual de Educación.
- Gamboa, M.E. (2007). El diseño de unidades didácticas contextualizadas para la enseñanza de la Matemática en la Educación Secundaria Básica. Tesis en opción al Grado Científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Las Tunas.
- Gamboa, M.E. (2012). Enfoque vigotskiano del curriculum en la Pedagogía contemporánea. Unidades didácticas contextualizadas. Editorial Académica Española.
- Gamboa, M.E. (2017). Estadística aplicada a la investigación científica. En J.C. Arboleda. (Ed.). *Apropiación, generación y uso solidario del conocimiento* (pp. 59-76). Las Tunas, Cuba: Editorial Redipe-Edacun.
- Gamboa, M.E. (2018a). Estadística aplicada a la investigación educativa. *Dilemas Contemporáneos: Educación, Política y Valores*, 5(2).
- Gamboa, M.E. (2018b). Utilidad de las matemáticas y sus implicaciones didácticas. Recuperado de <http://roa.ult.edu.cu/jspui/handle/123456789/3907>
- Gamboa, M.E. (2019a). La Zona de Desarrollo Próximo como base de la Pedagogía Desarrolladora. *Didasc@lia: Didáctica y Educación*, 10(4), 30-50.
- Gamboa, M.E. (2019b). Recursos didácticos para el desarrollo de competencias. Recuperado de <http://roa.ult.edu.cu/jspui/handle/123456789/3970>
- Gamboa, M.E. (2020a). Errores en el aprendizaje. Utilísima semilla que debe llegar a flor y a fruto. OmniScriptum Publishing Group, Mauritius: Editorial Académica Española.
- Gamboa, M.E. (2020b). Escala estadística y software para evaluar coherencia didáctica en procesos de enseñanza-aprendizaje de Matemáticas. *Didasc@lia: Didáctica y Educación*, 11(1), 140-165.
- Gamboa, M.E. y Borrero, R.Y. (2016). Influencia de la contextualización didáctica en la coherencia curricular del proceso enseñanza-aprendizaje de la Matemática. *Dilemas Contemporáneos: Educación, Política y Valores*, 4(1).
- Gamboa, M.E. y Borrero, R.Y. (2017). Influencia de los organizadores del curriculum en la planificación de la contextualización didáctica de la Matemática. *Boletín Redipe*, 6(1), 90-112.
- Gamboa, M.E. y Borrero, R.Y. (2019). Coherencia didáctica del proceso de enseñanza-aprendizaje de las ciencias básicas en universidades de Las Tunas. *Innovación Tecnológica*, 25(2).
- Gamboa, M.E. y Borrero, R.Y. (2020). Recursos estadísticos para investigar sobre coherencia didáctica. *Dilemas Contemporáneos: Educación, Política y Valores*, 7(2).
- Gamboa, M.E., Carmenates, O.A. y Amat, M. (2010). El legado de Vigotsky en la profesión educativa. *Revista Opuntia Brava*, 2(2).

Gamboa, M.E. y Carmenates, O.A. (2011). Influencia del pensamiento vigotskiano en el nivel micro del diseño curricular. *Revista Opuntia Brava*, 3(1).

Gamboa, M. E., Carmenates, O. A., Borrego, A. y Fernández, H. (2005). Pizarra, papel, computadora: un sistema de medios para la enseñanza de la Geometría. In V Congreso Internacional Virtual de Educación.

Gamboa, M.E. y Cruz, A. (2019). Nociones sobre secciones cónicas. Definiciones, ecuaciones y sus elementos. OmniScriptum Publishing Group, Mauritius: Editorial Académica Española.

Gamboa, M.E. y Fonseca, J.J. (2017). Los errores en el aprendizaje de las matemáticas. Su importancia didáctica. *Didasc@lia: Didáctica y Educación*, 8(5), 227-246.

Gamboa, M.E. y Santiesteban, D. (2018). División entera de polinomios: regla de gamboa y software didáctico. *REFCaE*, 6(2), 33-48.

Gamboa, M.E. y Yoppiz, Y. (2019). Medios de enseñanza y aprendizaje para la Geometría. Ejemplos en la formación de profesores de Matemática. OmniScriptum Publishing Group, Mauritius: Editorial Académica Española.

Santos, H.E. y Gamboa, M.E. (2018). Nociones de instrucción heurística para enseñar geometría. Procedimientos heurísticos aplicados al aprendizaje de la geometría plana. OmniScriptum Publishing Group, Mauritius: Editorial Académica Española.

Santos, H., Gamboa, M.E. y Silva, N. (2017a). Concepciones actuales para el aprendizaje de la Geometría Plana a través de sucesiones de indicaciones con carácter heurístico. *Didasc@lia: Didáctica y Educación*, 8(3), 75-90.

Santos, H., Gamboa, M.E. y Silva, N. (2017b). La Geometría Plana: concepciones actuales para su aprendizaje a través de la instrucción heurística. *Dilemas Contemporáneos: Educación, Política y Valores*, 4(2).

Yoppiz, Y., Gamboa, M.E. y Cruz, A. (2005). Aprendizaje por descubrimiento en las clases de matemática en la Educación Secundaria. *Boletín de la Sociedad Cubana de Matemática y Computación*, 3(1).

Yoppiz, Y., Cruz, A., Gamboa, M.E. y Osorio, G. (2016). Alternativa didáctica para contribuir al perfeccionamiento de la planificación del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en la carrera Licenciatura en Educación Matemática-Física. *Boletín Redipe*, 5(5). 147-164.

Zaldivar, L., Cruz, Y. y Gamboa, M.E. (2015). Mediación didáctica contextualizada de las tecnologías de la Información y la Comunicación para la fijación de los conceptos matemáticos. *Revista Didasc@lia: Didáctica y Educación*, 6(1), 49-68.