

COMPONENTES NO OBSERVADOS DE LA INFLACIÓN EN COLOMBIA

Luis Eduardo Arango T.*
Banco de la República
larangth@banrep.gov.co

RESUMEN

Se utiliza el método de descomposición estructural de las series de tiempo para estimar, por la vía del filtro de Kalman, los componentes no observados de la inflación anual en Colombia en el período 1989.12-1998.8. La evidencia sugiere que, en un ambiente univariado, la inflación presenta un nivel estocástico y un ciclo que se repite, en promedio, cada 16 meses; en materia de pronósticos, el mejor desempeño del modelo estimado, se registra en períodos superiores a seis meses. En un ambiente bivariado, se encuentra que el crecimiento anual de M1 y la inflación comparten el mismo ciclo y que el crecimiento de dicho agregado monetario causa (Granger) la inflación. Se observa que los componentes de tendencia de ambas realizaciones tienen la mayor correlación cuando la tendencia de la inflación adelanta la tendencia del crecimiento de M1 en 18 meses, mientras que los componentes cíclicos de las dos series tienen la mayor correlación cuando el ciclo del crecimiento de M1 adelanta, también en 18 meses, al ciclo de la inflación. En estas asociaciones podría estar una de las causas de la dificultad que existe en Colombia para encontrar el timing entre inflación y el crecimiento de M1.

Clasificación (JEL): E31; C22; E37; E52.

Palabras claves: inflación básica, descomposición estructural, filtro de Kalman, ciclo, tendencia.

I. INTRODUCCIÓN

La desagregación de una realización aleatoria en sus componentes *tendencial, cíclico, estacional e irregular* es común en la literatura que analiza efectos permanentes y transitorios intrínsecos en las variables económicas (Persons, 1919). Algunos de dichos componentes suelen, bajo ciertas condiciones, relacionarse con conceptos económicos, como es el caso del componente de tendencia, el cual, en el caso particular de la

* Los resultados y opiniones registradas en el presente trabajo son de la responsabilidad exclusiva del autor y su contenido no compromete al Banco de la República ni a su Junta Directiva. El autor agradece las sugerencias de Clemente Forero, Carlos Huertas, Luis Melo, Marta Misas, Enrique López, Munir Jaílil, Hugo Oliveros y de dos comentaristas anónimos. Su ayuda, sin embargo, no los hace partícipes de las imprecisiones y oscuridades que aún puedan aparecer en el trabajo. Una versión preliminar de este documento fue presentada en el Seminario de Economía Avanzada del Programa de Doctorado en Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Colombia.

inflación, se identifica con la inflación básica de una economía o el componente irregular, el cual se asocia con choques sectoriales o agregados de oferta.

En relación con lo anterior, se entiende que la evolución de precios de una economía se ve afectada tanto por factores de demanda como por los de oferta. La participación de los primeros en la inflación total, en ocasiones denominada inflación básica, está relacionada con la política monetaria. La diferencia entre estas dos medidas de inflación, se explica por la existencia de choques vinculados a la oferta agregada de la economía o de un sector en particular, los cuales pueden, potencialmente, distorsionar la conducción de la política monetaria. Por ello, la distinción e identificación de los componentes mencionados es fundamental para que la autoridad monetaria pueda adoptar, en forma coherente con las metas establecidas, las políticas monetaria, cambiaria y crediticia que permitan preservar el poder adquisitivo de la moneda¹.

Con el objetivo último de realizar pronósticos de inflación, este trabajo propone, en su primera parte, una estimación de los componentes de dicha serie utilizando el método de descomposición estructural, impulsado por Harvey (1985, 1989), el cual se fundamenta en el filtro de Kalman para la estimación de los *componentes no observados: tendencia, ciclo, estacional e irregular*. En su segunda fase, el trabajo explora los posibles vínculos entre los distintos componentes de la tasa de crecimiento anual de M1 y la inflación, con el fin de perfilar algunos "hechos estilizados" entre dichos componentes, los cuales permitirían identificar la existencia potencial de tendencias comunes y otras propiedades en un ambiente *bivariado*.

Además de la presente introducción, el trabajo incluye cuatro secciones². En la siguiente, se motiva (justifica) la utilización del método de descomposición estructural. En la sección tres se identifican y estiman los componentes de la serie de inflación y se interpretan los resultados; de igual manera, se incluyen algunas comparaciones del componente tendencial resultante con algunas medidas utilizadas de la inflación básica y se discute la capacidad predictiva del modelo ajustado. En la sección cuatro se presenta la forma en que se correlacionan los componentes de la tasa de crecimiento de M1 con sus similares de la inflación, haciendo especial énfasis en los componentes cíclicos y de tendencia. La sección cinco finaliza destacando algunas de las propiedades encontradas en la realización de la inflación a través de los dos modelos.

II. MOTIVACIÓN

El conocimiento de los componentes de la realización de un proceso estocástico reporta información útil a quienes deben tomar decisiones con base en (y para afectar) su comportamiento. El método adoptado en este documento, para tal efecto,

1 Sobre el concepto de inflación básica, véase Nota Editorial en Revista del Banco de la República, septiembre de 1998 y las referencias allí incluidas.

2 Para dar mayor fluidez a la lectura del documento, algunos desarrollos y precisiones técnicas se han incorporado en dos anexos, los cuales se encuentran al final del documento. El Anexo A presenta una versión univariada de la forma espacio-estado requerida por el filtro de Kalman y, como es lógico, por los modelos estructurales de series de tiempo, mientras que el Anexo B hace una breve introducción al filtro de Kalman.

proporciona una alternativa de separación de los componentes de la inflación distinta de la que ofrecen otros métodos como los de *Beveridge-Nelson*, *Hodrick-Prescott*, *Blanchard-Quah*, o los procedimientos de dominio de frecuencias, todos comúnmente utilizados en nuestro medio (véase Arango, 1998). La técnica de descomposición estructural es superior en el sentido que, además de suministrar información sobre los componentes permanente y transitorio, estima los componentes irregular, estacional y cíclico de una serie determinada, sin perder información al llevar la realización, cuando se hace necesario, a una representación estacionaria.

La posibilidad de utilizar este método debe ser sugerida por los datos, ya que el principal criterio para efectuar la descomposición estructural de una serie, se apoya en el comportamiento de tipo sinusoidal (cíclico) que debe exhibir la función de autocorrelación de la primera diferencia de la realización (Harvey, 1985).

El Gráfico 1, presenta la función de autocorrelación muestral de la primera diferencia de la inflación anual con frecuencia mensual, entre diciembre de 1989 y agosto de 1998, estimada como la diferencia relativa del IPC³. Como se puede apreciar, dicha función no sugiere un claro comportamiento “ruido-blanco” de la tasa de aceleración de la inflación o, lo que es igual, de la primera diferencia de la tasa de inflación. En su lugar, el comportamiento en “forma de onda” del correlograma estimado podría estar indicando un patrón cíclico, el cual puede ser capturado por medio de los componentes estructurales⁴. Esto no quiere decir, sin embargo, que una representación Arima no sea una alternativa válida; más bien el método de descomposición estructural permite estimar los componentes integrados en una realización estocástica⁵.

III. ESTIMACIÓN DE LOS COMPONENTES DE LA INFLACIÓN

En el Gráfico 2, se observa el comportamiento de la inflación a lo largo de la presente década. La evolución sugiere la existencia de algunos fenómenos que han producido sobresaltos en la serie o han generado cambios en el nivel o en la pendiente de la tendencia, los cuales, en algunos casos, podrían reflejar cambios estructurales.

El método de descomposición estructural de series de tiempo (véase Anexo A) permite considerar variables *dummy* de *intervención* de manera que los cambios fundamentales sean tenidos en cuenta en la descripción del proceso^{6,7}. Así mismo, permite

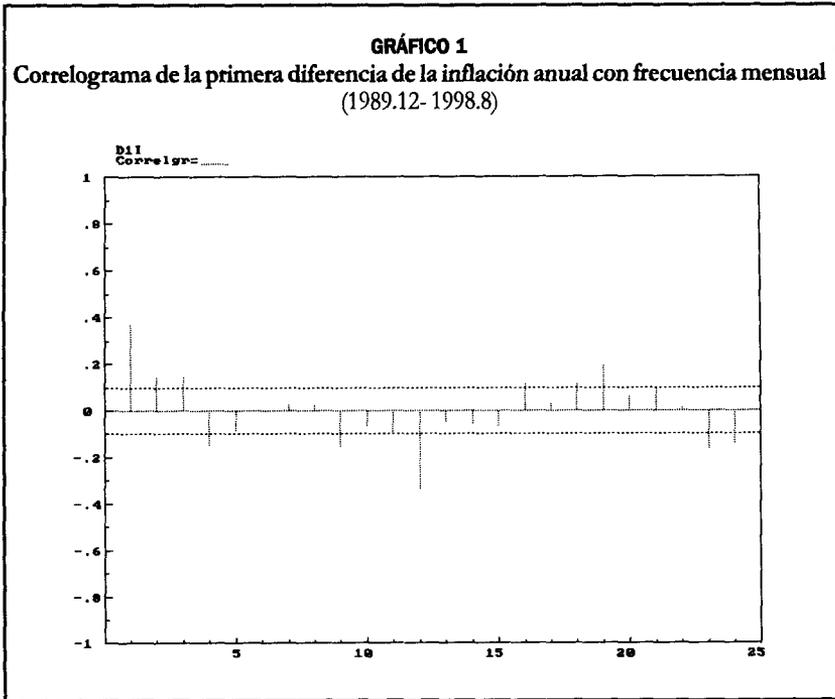
3 El período muestral coincide con la canasta del IPC vigente al momento de realizar el trabajo.

4 Aparte de sugerir un posible componente cíclico y otro estacional (obsérvese, por ejemplo, la correlación al rezago 12), cuyas existencias deberán verificarse con la estimación, el método no permite hacer una identificación *a priori* de los restantes componentes no observados de la serie. Información sobre intervenciones o eventos extremos deberán ser verificados con variables *dummy* de intervención.

5 Los modelos Arima pueden ser interpretados como formas reducidas de los modelos estructurales de series de tiempo. Estos últimos contienen algunos términos de perturbación, los cuales son combinados en un solo término en los modelos Arima (Harvey, 1993).

6 En el Anexo B, se presenta la formulación espacio-estado pertinente. Extender dicha formulación para incorporar las variables de intervención es relativamente simple.

7 Para el período considerado, una variable *dummy* de intervención que afecta el nivel de la inflación fue introducida en el punto más alto de la serie (1990.12), la cual podría estar capturando el efecto de la devaluación de dicho



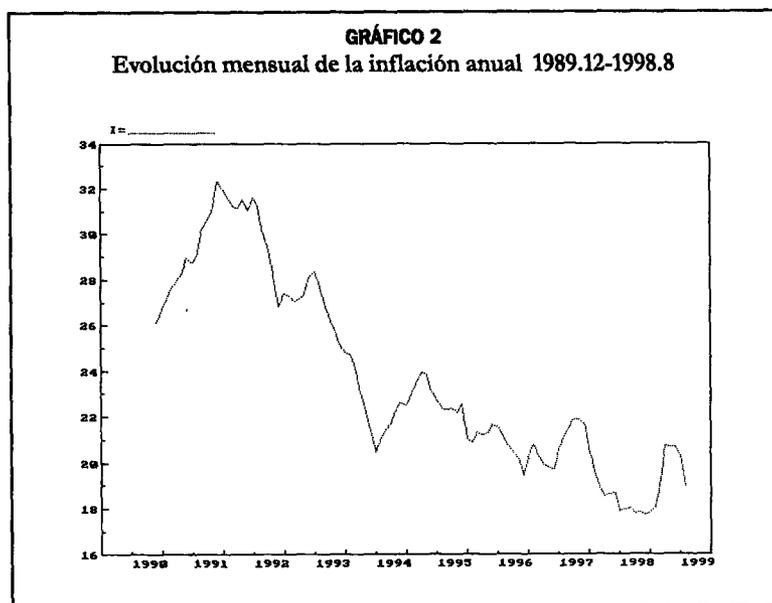
incluir algunos valores rezagados de la variable dependiente con el propósito de mejorar las propiedades estadísticas del ajuste. En estas circunstancias, el modelo estimado es (véase Anexo A):

$$Y_t = \mu_t + \psi_t + \sum_{j=1}^h \vartheta_j w_{j,t} + \sum_{\tau=1}^p \phi_\tau Y_{t-\tau} \quad (1)$$

donde μ_t y ψ_t identifican los componentes tendencial y cíclico, respectivamente; $w_{j,t}$, representan variables *dummy* de intervención y ϑ_j y ϕ_τ son parámetros desconocidos.

Con lo anterior, el modelo ajustado incluye una tendencia estocástica con pendiente fija, un ciclo, tres variables *dummy* de intervención y valores rezagados de la variable dependiente. Componentes estacionales no resultaron significativos a pesar de lo que podría estar sugiriendo el correlograma del Gráfico 1.

período sobre los precios; dos intervenciones adicionales fueron incluidas como irregulares en 1991.12 y 1995.12. La primera de ellas podría estar recogiendo el impacto de las medidas de apertura económica, mientras que la segunda podría estar registrando el desplazamiento de la actualización de los precios indexados de fin de año para el comienzo del año siguiente, ocurridas en los períodos respectivos. Intervenciones para capturar el efecto de los fenómenos climáticos ocurridos en 1992 y 1998 no resultaron estadísticamente significativos. Se concluye entonces, que las variables *dummy* fueron escogidas sobre la base de su validez estadística. Su presencia contribuye notablemente a mejorar los estadísticos del ajuste relacionados con la normalidad y autocorrelación de los residuos. En ningún momento modifican la especificación escogida.



Fuente: DANE.

En el Cuadro 1, aparece el valor de los coeficientes estimados en el *estado final* y de las variables explicativas⁸, mientras que en el Cuadro 2, se presentan los estadísticos resultantes, los cuales lucen satisfactorios.

En el Cuadro 3, aparecen las desviaciones estándar de las perturbaciones estimadas y la relación de éstas con la desviación estándar del componente cíclico de la inflación, lo cual señala la importancia relativa del componente de tendencia escogido. En este caso, por su mayor valor, puede señalarse que el componente cíclico tiene más importancia que el de tendencia. Los resultados muestran, así mismo, la presencia de un ciclo con un período ligeramente superior a 16 meses en la evolución de la inflación⁹. Ello quiere decir que cada 16 meses, en promedio, se repite la misma historia inflacionaria, teniendo en cuenta para la estimación de dicha historia, la tendencia de la inflación, los rezagos y las variables de intervención.

En el Gráfico 3, se presenta el componente de tendencia de la serie de inflación (considerando los valores rezagados requeridos para “blanquear” los residuales), conjuntamente con la inflación total, la inflación sin alimentos, la tendencia de largo plazo de la inflación según el filtro de Hodrick-Prescott (H-P)¹⁰ y el componente de

8 Muy fuerte convergencia es obtenida después de 6 iteraciones, con un criterio de $1-E7$. La optimización numérica se efectúa mediante el procedimiento de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno.

9 El valor del factor atenuante (Cuadro 4, $\rho\psi$), explicado en el Anexo A, parece satisfactorio, ya que no es, numéricamente, cercano a la unidad.

10 El valor del coeficiente de suavización es 0.00020833. Equivalencias entre la descomposición estructural y el filtro de Hodrick-Prescott, se encuentran en Harvey y Jaeger (1993).

CUADRO 1		
Coefficientes estimados del vector de estado final y de las variables explicativas		
Variable	Coefficiente	Valor-t*
Nivel	9.0330	3.9856 [0.000] **
Pendiente	-0.0664	-2.8517 [0.005] **
Ciclo 3-1	-0.3212	
Ciclo 3-2	-1.4010	
Y_{t-1}	0.3535	4.2036 [0.000] **
Y_{t-3}	0.2661	3.0667 [0.003] **
Y_{t-4}	-0.1875	-2.1063 [0.037] *
Y_{t-5}	0.2188	2.7324 [0.007] **
Y_{t-7}	0.1729	2.1861 [0.031] *
Y_{t-9}	-0.1633	-2.1233 [0.036] *
Y_{t-11}	-0.1627	-2.1488 [0.034] *
Intervención al nivel (1990.12)	1.5146	3.1414 [0.002] **
Intervención irregular (1991.12)	-1.1030	-3.5048 [0.000] **
Intervención irregular (1995.12)	-0.8144	-2.5698 [0.011] *

Nota: * (**) Representa validez estadística a un nivel de significancia del 5% (1%).

a Un valor-t no es apropiado para los componentes cíclicos en razón a que éstos no presentan persistencia a través de la serie.

CUADRO 2	
Estadísticos del ajuste	
Estadístico	Valor
Error estándar	0.4361
Normalidad	0.9374
H(34)	1.134
r(1)	0.1114
r(9)	0.0145
DW	1.744
Q(9,6)	3.788 [0.7054]
R^2_d	0.4668

CUADRO 3		
Desviaciones estándar estimadas de las perturbaciones (hiperparámetros)		
Componente	Valor	Relación (q) de las desviaciones
Nivel	0.1877	0.5280
Ciclo 3	0.3549	1.0000

CUADRO 4	
Parámetros estimados del componente cíclico	
Parámetro	Ciclo 3
Varianza	0.6728
ρ_w	0.9015
Período	16.237
	(1.3531 años)
Frecuencia	0.3869
Amplitud	1.4374

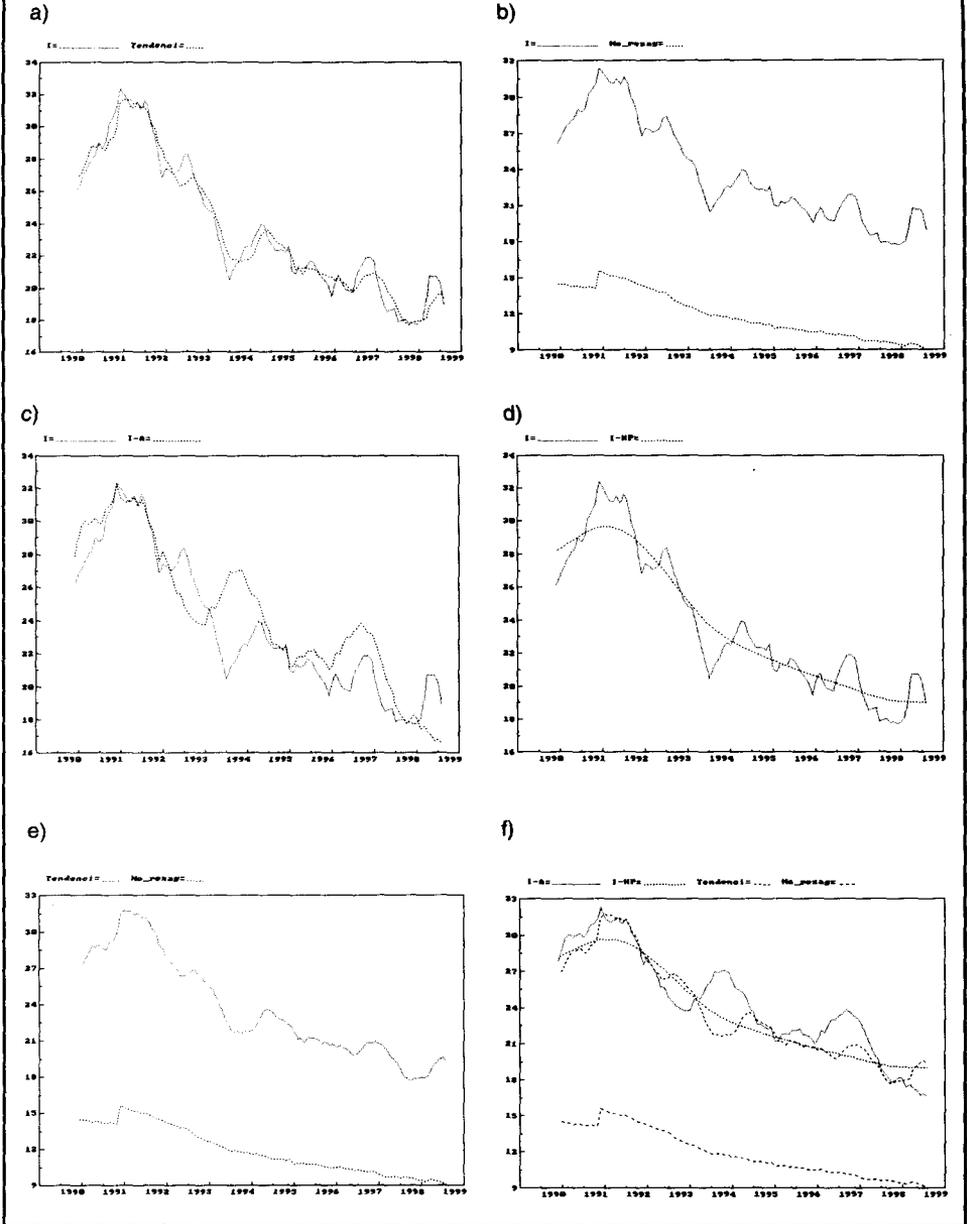
tendencia resultante por la vía de componentes no observados, sin incluir valores rezagados.

La inflación básica, estimada por el método de componentes no observados, sigue de manera pausada (menos errática) el recorrido de la inflación computada con base en el IPC y en muchas ocasiones, la inspección visual permite señalar que los puntos de quiebre son coincidentes en ambas realizaciones. El panel b) del Gráfico 3, registra lo que sucede con la tendencia aleatoria estimada cuando se remueven los valores rezagados de la inflación. La serie denominada *No_rezag*, en estricto sentido, sólo está señalando la dirección que está tomando la tendencia; no obstante, su interpretación no es simple.

Siguiendo los preliminares que reporta la presente estimación de la tendencia (denominada *Tendencia*, en el Gráfico 3), se observa que ésta se encuentra entre las que se estiman por la vía de la supresión de alimentos y por medio del filtro H-P, la cual conserva movimientos de muy baja frecuencia. Vale la pena destacar la información contradictoria que reportan los distintos indicadores, ya que mientras la inflación sin alimentos señala, prácticamente desde mediados de 1996, una tendencia a la baja, el componente permanente del filtro H-P marca esa misma tendencia de una manera mucho más suave desde 1991, aproximadamente, aunque ha venido estabilizándose recientemente; finalmente, el componente tendencial estimado aquí, presenta, a lo largo de 1998, una tendencia al alza. En conclusión, una tendencia monótona de la inflación básica sólo se obtiene cuando se utiliza el filtro H-P.

Finalmente, en el Cuadro 5, se presenta el RMSE como indicador del desempeño del modelo, en términos del pronóstico. Este ejercicio se realiza incrementando la muestra en un período cada vez, empezando en 1989:12-1996:11; sin embargo, la especificación del modelo no se modifica, únicamente varían los parámetros estimados. En dicho Cuadro se compara la bondad predictiva del modelo con la de otros corrientemente utilizados para generar pronósticos de inflación (Castaño y Melo, 1998). De acuerdo con ello, el modelo genera, en promedio, buenos pronósticos para períodos superiores a seis meses y dependiendo del período considerado puede exhibir un mejor desempeño que el mejor modelo individual presentado por Castaño y Melo (1998) para pronósticos 9 meses adelante. Debe destacarse que en ningún período el modelo tiene un desempeño más pobre que el peor modelo individual repor-

GRÁFICO 3
 Evolución de la inflación IPC (I), la tendencia estimada ($Tendencia$), la inflación sin alimentos ($I-A$), la tendencia según H-P ($I-HP$) y la tendencia estimada sin valores rezagados (No_rezag)
 1989.12-1998.8



tado por dichos autores, por lo que, eventualmente, podría contribuir a mejorar el pronóstico combinado de la inflación. Esto requeriría, sin embargo, que el modelo de componentes no observados estimado en este trabajo incluya en su *set*, información que no viene siendo considerada por los demás modelos utilizados en la combinación de Castaño y Melo (1998).

IV. VÍNCULOS ENTRE LOS COMPONENTES DE LA INFLACIÓN Y LA TASA DE CRECIMIENTO ANUAL DE M1^{11,12}

Esta sección tiene como propósito establecer la existencia de algunos hechos estilizados conjuntos de las series de inflación y la tasa de crecimiento anual de M1, por medio del ajuste de modelos que exhiben ciclos similares.

CUADRO 5					
RMSE como medida del desempeño predictivo de los modelos estimados					
Períodos adelante	Modelo univariado de inflación	Modelo bivariado de inflación	Modelo Arima*	Mejor modelo según RMSE*	Peor modelo según RMSE*
1	0.534	0.577			
2	1.114	1.163			
3	1.594	1.612	1.11	Arima: 1.11	Modelo 7: 1.91
			1.12	Arima: 1.12	Var ME: 1.84
4	2.037	2.116			
5	2.269	2.472			
6	2.352	2.715	1.89	Modelo 3: 1.86	Modelo 7: 2.76
			2.07	Modelo 6: 1.84	Var ME: 2.97
7	2.356	2.885			
8	2.209	2.951			
9	2.145	2.963	2.43	Modelo 3: 2.23	Modelo 10: 3.28
			2.14	Modelo 3: 1.36	Var ME: 3.25
10	2.179	2.936			
11	2.294	2.868			
12	2.430	2.806	3.00	Var SS: 2.49	Modelo 6: 3.87
			2.59	Modelo 3: 1.56	Modelo 5: 4.09
13	2.561	2.718			
14	2.673	2.557			
15	2.726	2.349			
16	2.684	1.969			
17	2.576	1.565			
18	2.293	1.887			

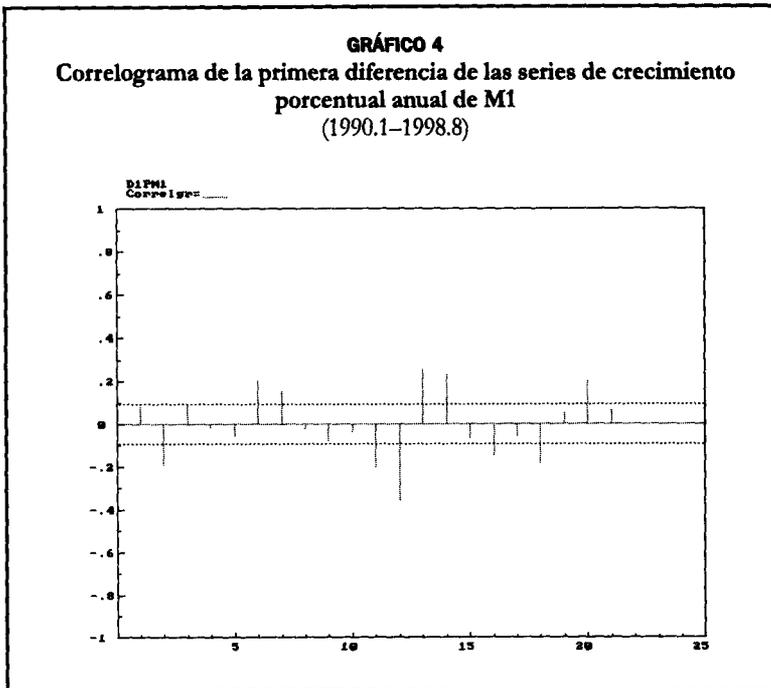
*Fuente: Castaño y Melo (1998, Cuadros 5.1 y 5.2). En su texto se encuentra la explicación de los modelos. Los valores ubicados en la línea superior de las filas correspondientes a los horizontes de 3, 6, 9 y 12 meses, identifican el RMSE estimado con base en el período de pronósticos 1991:I-1998:II, mientras que para la segunda línea, el período de pronósticos es 1997:I-1998:II.

- 11 Pruebas de Dickey-Fuller y KPSS evidencian un comportamiento no estacionario de las series de inflación y crecimiento anual de M1 en igual frecuencia.
- 12 La tasa de crecimiento anual de otros agregados monetarios como Base y M3 fueron también utilizados; sin embargo, resultados satisfactorios, estadísticamente hablando, fueron obtenidos únicamente para M1.

Según se observa en el Gráfico 4, el correlograma de la primera diferencia de la serie de crecimiento porcentual de M1 registra un comportamiento en “forma de onda”, lo cual, al igual que sucede con la primera diferencia de la inflación, permite el uso del método de descomposición estructural.

Debido a que ambas series se ajustan con el modelo de la expresión (1), se sigue encontrando un nivel estocástico con pendiente fija y un único ciclo; no obstante, los valores rezagados requeridos para “blanquear” los residuos se modifican debido a la presencia de valores retrasados en el crecimiento de $M1^{13}$ (Cuadro 6).

Comparando los estadísticos de los Cuadros 2 y 7, se observa que la presencia del crecimiento de M1 permite obtener un mejor modelo para la inflación que cuando esta última se considera en forma aislada. Más aún, la especificación *bivariada* permitiría señalar que el crecimiento porcentual de M1 (Granger-) causa la inflación mientras que ello no acontece cuando se invierte el sentido de la relación. Sin embargo, el efecto del crecimiento de M1 en la inflación no es claramente discernible, debido a los coeficientes de $M1_{t-2}$ y $M1_{t-1}$: el primero de ellos, si bien tiene un alto –aunque no excesivamente alto– nivel marginal de significancia, tiene un signo positivo, mientras que el segundo, tiene un signo negativo.



13 En el caso *bivariado*, se obtiene muy fuerte convergencia después de 51 iteraciones. (Cuadro 6).

CUADRO 6				
Coeficientes estimados de los vectores de estado final y de las variables explicativas				
Variable	Inflación		Crecimiento de M1	
	Coefficiente	Valor-t	Coefficiente	Valor-t
Nivel	15.9460	6.8668 [0.000] **	22.1630	2.1526 [0.033] **
Pendiente	-0.0941	-2.2362 [0.027] **	-0.1977	-0.9903 [0.324] **
Ciclo 3-1	1.1963		-4.5012	
Ciclo 3-2	-0.5585		1.3044	
I_{t-1}	0.3433	3.9475 [0.000] **	-0.4239	-1.1025 [0.272]
I_{t-4}	-0.2228	-2.6101 [0.010] **	0.0169	0.0444 [0.964]
$M1_{t-2}$	0.0284	1.5845 [0.116]	-0.2957	-3.602 [0.000] **
$M1_{t-6}$	-0.0134	-0.6956 [0.488]	0.3626	4.099 [0.000] **
$M1_{t-8}$	0.0217	1.1205 [0.265]	0.2400	2.702 [0.008] **
$M1_{t-11}$	-0.0646	-3.544 [0.000] **	-0.1618	-1.9215 [0.057] *
$M1_{t-12}$	0.0208	0.9526 [0.343]	-0.4695	-4.6879 [0.000] **
Intervención al nivel (1990.12)	0.9767	2.0587 [0.042] *	-2.6136	-1.2073 [0.230]
Intervención irregular (1991.12)	-0.6968	-2.1283 [0.035] *	0.7980	0.5259 [0.600]
Intervención irregular (1995.12)	-0.9071	-2.9044 [0.004] **	1.7067	1.1785 [0.241]

CUADRO 7		
Estadísticos del ajuste para las series		
Estadístico	Inflación	Crecimiento M1
Error estándar	0.4258	1.927
Normalidad	0.3133	0.5994
H (34)	1.042	0.9039
$r(1)$	0.0610	0.0087
$r(9)$	-0.0491	-0.0275
DW	1.822	1.905
Q(9,6)	7.152	5.516
F^2_{σ}	0.4905	0.4273

En los Cuadros 8 y 9 aparece la información relacionada con la desviación estándar de las perturbaciones y con el ciclo de cada componente. En primer término, nótese la importancia que cobra, en el modelo *bivariado*, el componente tendencial de la inflación, ya que la mayor desviación estándar deja de ser la correspondiente a la perturbación del ciclo, como en el caso *univariado*, y pasa a ser la de la tendencia. En segundo término, el ciclo conjunto de inflación y tasa de crecimiento anual de M1 es

CUADRO 8 Desviaciones estándar estimadas de las perturbaciones (hiperparámetros)				
Componente	Inflación		Crecimiento M1	
	Valor	Relación q	Valor	Relación q
Nivel	0.4084	1.0000	1.9673	1.0000
Ciclo 3	0.1307	0.3202	0.3434	0.1746

CUADRO 9 Parámetros estimados del componente cíclico		
Parámetro	Inflación	Crecimiento de M1
Varianza	0.9495	6.548
ρ_{ψ}		0.9909
Período	20.7861 (1.73 años)	
Frecuencia	0.3022	
Amplitud	0.3202	4.6864

algo inferior a 21 meses, lo cual quiere decir que, descontada la tendencia, los valores rezagados y las variables de intervención, estas realizaciones tienen una historia que se repite aproximadamente cada 21 meses en forma conjunta, aunque no simultánea, ya que como se verá más adelante (Cuadro 11) la correlación contemporánea que se presenta entre dichos ciclos es de -0.5925 (Gráfico 5, panel c)¹⁴.

Las matrices de covarianza, estimadas para las perturbaciones de cada componente, contienen, en la parte triangular superior, las correlaciones, en la parte triangular inferior las covarianzas y en la diagonal principal las varianzas correspondientes a cada serie (Cuadro 10). Se encuentra evidencia, por tanto, de una importante correlación entre las perturbaciones de los componentes cíclicos de las variables aunque la correlación entre las perturbaciones de los niveles no permite pensar en relaciones de cointegración entre las variables. Lo anterior, no obstante que las correlaciones cruzadas entre los componentes estimados muestran algunos valores interesantes (Cuadro 11 y Gráfico 5). Por ejemplo, las tendencias de las realizaciones tienen un coeficiente de correlación del 65,2%, aunque la mayor asociación entre los niveles se presenta cuando la tendencia de la inflación lidera en 18 meses la del crecimiento de M1 (89,6%). Por su parte, en el caso de los componentes cíclicos, la mayor correlación entre la tasa de crecimiento anual de M1 y la inflación se presenta cuando el primero

14 Sin embargo, debe notarse también que el factor atenuante es bastante cercano a uno, lo cual deja algunas dudas en relación con la propiedad de retorno a su media del componente cíclico. La razón de este resultado puede ser la creciente amplitud del ciclo del crecimiento de M1.

CUADRO 10	
Matrices de covarianza de las perturbaciones	
Niveles	
0.1668	-0.0322
-0.0259	3.870
Ciclos	
0.0171	-0.6820
-0.0306	0.1179

CUADRO 11	
Correlación cruzada entre los componentes	
Niveles	
$I_{t,p}, M1_t$	Valor
J = 0	0.6524
J = 18	0.4381
J = -18	0.8963
Ciclos	
J = 0	-0.5925
J = 18	-0.7585
J = -18	0.1996

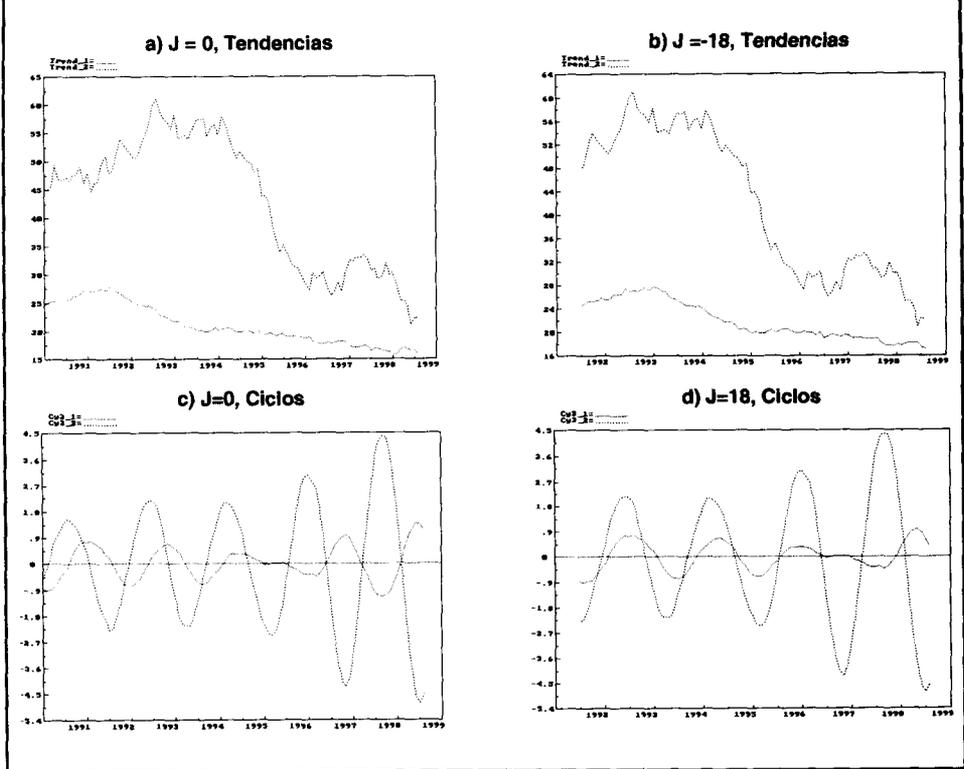
lidera en un año y medio al segundo. Esta conjugación de rezago y adelantamiento que se presenta entre componentes de tendencia y entre componentes cíclicos de las dos series puede ser una de las razones de la dificultad que existe en Colombia para señalar el tiempo en el cual movimientos en M1 se podrían ver reflejados en la inflación o al contrario (véase Cobo, 1998).

Finalmente, las propiedades de predicción del modelo ajustado (Cuadro 5) señalan que el mejor desempeño del mismo en esta materia se presenta para pronósticos de inflación de 14 meses adelante. Para períodos de pronóstico inferiores a un año, la versión *bivariada* no exhibe los mejores valores de RMSE, sin embargo, en ningún caso estos indicadores son más pobres que los del peor modelo reportado por Castaño y Melo (1998) para diferentes períodos de pronóstico.

V. COMENTARIOS FINALES

Este documento presenta un modelo alternativo y complementario sobre la realización de la inflación para el período posterior a diciembre de 1989. Utiliza, para tal

GRÁFICO 5
Componentes tendenciales y cíclicos estimados para la inflación
y el crecimiento anual de M1.
 1989.12-1998.8



efecto, el método de componentes no observados, el cual se basa en el filtro de Kalman. Del trabajo se desprende que la inflación anual, con frecuencia mensual, no tiene componentes irregulares ni estacionales importantes contrario a lo que se piensa ordinariamente. Sin embargo, dicha serie exhibe un nivel estocástico, pendiente fija, y un ciclo ligeramente superior a 16 meses, cuando se considera en un ambiente *univariado*, lo cual advierte que una parte de la realización de la inflación se ha repetido cada 16 meses en promedio durante el período de estudio. Para llegar a dicho resultado fueron incluidas algunas variables *dummy* de intervención, con el propósito de recoger el posible efecto de algunos eventos de importancia ocurridos durante el período de estudio, así como algunos valores rezagados de la inflación. En materia de pronósticos el mejor desempeño del modelo estimado se presenta para períodos superiores a seis meses. En el caso *bivariado* de inflación y tasa de crecimiento anual de los agregados monetarios (base, M1 y M3), solamente M1 se ajustó a la descomposición anterior, caso en el cual esta última (Granger) causa la inflación, mientras que

el reverso no se cumple. El ciclo de las dos variables, en este contexto, tiene una duración ligeramente inferior a los 21 meses, mientras que el mejor desempeño en cuanto a pronósticos se presenta en períodos superiores a 14 meses.

Las tendencias de las realizaciones tienen un coeficiente de correlación del 65,2%, el cual llega a 89,6% cuando la tendencia de la inflación lidera en 18 meses la del crecimiento de M1. En el caso de los componentes cíclicos, la mayor correlación entre la tasa de crecimiento anual de M1 y la inflación, se presenta cuando el primero lidera en un año y medio al segundo. Esta presencia simultánea de rezago y adelantamiento que ocurre entre componentes de tendencia y entre componentes cíclicos de las dos series, puede ser una de las razones de la dificultad que existe en Colombia para señalar el tiempo en el cual movimientos en M1 se podrían ver reflejados en la inflación (o al contrario).

Los resultados de la alternativa implementada en este documento parecen ser promisorios. Sin embargo, sugieren la necesidad de una mayor exploración y análisis de los componentes no observados de la inflación en Colombia.

BIBLIOGRAFÍA

- Arango, L. E. (1998). "Temporary and Permanent Components of Colombia's Output", *Borradores de Economía*, 96.
- Castañó E. y L. F. Melo (1998). "Métodos de combinación de pronósticos: una aplicación a la inflación colombiana", *Borradores de Economía*, 109.
- Cobo A. (1998). *La relación dinero-precios en Colombia: una breve revisión bibliográfica*, Banco de la República, mimeo.
- Harvey, A. C. (1985). "Trends and Cycles in Macroeconomic Time Series". *Journal of Business & Economic Statistics*, 3 (3), 216-227.
- (1989). *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter*. Cambridge University Press. Cambridge.
- (1993). *Time Series Models*. Harvester Wheatsheaf, 2ª. ed., Londres.
- y A. Jaeger (1993). "Detrending, Stylized Facts and the Business Cycles". *Journal of Applied Econometrics*, 8, 231-247.
- Koopman, S. J., A. C. Harvey, J. A. Doornik, y N. Shephard (1995). *Stam 5.0. Structural Time Series Analyser, Modeller and Predictor*. Chapman & Hall. Londres.
- Persons, W. M. (1919). "Indices of Business Conditions". *Review of Economic Studies*, 1, 5-107.
- Urrutia, M. (1998). "Inflación básica". *Revista Banco de la República*. Nota Editorial. Septiembre.

ANEXO A

MODELOS ESTRUCTURALES DE SERIES DE TIEMPO, LA FORMA ESPACIO-ESTADO¹⁵

Las características fundamentales de los modelos estructurales de series de tiempo, se encuentran en que sus parámetros pueden variar con el tiempo, sus componentes tienen una interpretación clara y las variables explicativas son función del tiempo (Harvey, 1993). En el caso de una variable, el modelo de referencia básica se conoce como modelo *lineal local* (o *señal más ruido*), el cual viene dado por:

$$Y_t = \mu_t + \varepsilon_t \tag{A.1}$$

$$\mu_t = \mu_{t-1} + u_t \tag{A.2}$$

donde Y_t , μ_t , y ε_t son la variable observada, la tendencia y el componente irregular, respectivamente; sobre las perturbaciones ε_t y μ_t , se supone que $\varepsilon_t \sim i.i.d.(0, \sigma_\varepsilon^2)$, $u_t \sim i.i.d.(0, \sigma_u^2)$, y $E(\varepsilon_t, u_{t-i}) = 0$, para todo i . En este modelo, en el cual la primera diferencia de Y_t es estacionaria, se puede computar la *relación de señal - a - ruido*: $\sigma_u^2 / \sigma_\varepsilon^2$

Por otra parte, el modelo de *tendencia lineal local* puede escribirse como:

$$Y_t = \mu_t + \varepsilon_t \tag{A.3}$$

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + u_t \tag{A.4}$$

$$\beta_t = \beta_{t-1} + \xi_t \tag{A.5}$$

donde u_t y ξ_t son perturbaciones distribuidas como *i.i.d.*, no correlacionadas mutuamente, con media cero y varianzas σ_u^2 y σ_ξ^2 . Las ecuaciones (A.4) y (A.5) conforman la tendencia estocástica cuyo nivel se ve afectado por u_t , mientras que su pendiente se ve afectada por ξ_t . De esta forma, cuando $\sigma_u^2 = \sigma_\xi^2 = 0$, la tendencia μ_t se convierte en determinística y lineal. En el caso en que $\sigma_u^2 = 0$ y $\sigma_\xi^2 > 0$, la tendencia es un proceso doblemente integrado [I(2)].

Fenómenos estacionales pueden ser capturados bajo la representación conocida como *modelo estructural básico* (MEB):

$$Y_t = \mu_t + \gamma_t + \varepsilon_t \tag{A.6}$$

donde μ_t continúa siendo la tendencia estocástica y ε_t las perturbaciones ruido blanco; γ_t es el componente estacional. Esta última puede tomar la forma de una variable *dummy*:

$$\gamma_t = -\gamma_{t-1} - \dots - \gamma_{t-s+1} + v_t \tag{A.7}$$

donde $v_t \sim NID(0, \sigma_v^2)$ y s es un número entero que identifica las frecuencias estacionales en un período (por ejemplo, un año), el cual viene dado por $[s/2] = s/2$ cuando s es par, y por $[s/2] = (s-1)/2$, cuando s es impar¹⁶. La introducción del término de perturbación, v_t , en (A.7) permite que los efectos estacionales cambien en el tiempo. Bajo una definición trigonométrica, la estacionalidad viene dada por:

15 Véanse Harvey (1989, 1993) y Koopman et al. (1995) para un tratamiento detallado y cuidadoso de los temas de esta sección. Una aplicación sencilla de algunos de estos conceptos al caso del producto en Colombia se encuentra en Arango (1998).

16 La suma de los coeficientes en (7) está restringida a ser igual a cero.

$$\gamma_t = \sum_{j=1}^{\lfloor s/2 \rfloor} \gamma_{j,t} \quad t = 1, \dots, T \quad (\text{A.8})$$

donde cada $\gamma_{j,t}$ es generado por:

$$\begin{bmatrix} \gamma_{j,t} \\ \gamma_{j,t}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \lambda_j & \text{sen } \lambda_j \\ -\text{sen } \lambda_j & \cos \lambda_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{j,t-1} \\ \gamma_{j,t-1}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_t \\ v_t^* \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

expresión en la cual $\lambda_j = 2\pi j / s$, $j = 1, \dots, \lfloor s/2 \rfloor$, constituye la frecuencia estacional en radianes, y v_t y v_t^* son perturbaciones estacionales NID, no correlacionadas mutuamente con media cero y varianza común ($\sigma_v^2 = \sigma_{v^*}^2$). Cuanto mayor sea esta varianza, más serán tenidas en cuenta las observaciones pasadas al estimar el patrón estacional. Suponiendo que, en el caso de una frecuencia mensual, solamente la primera frecuencia ($\lambda_1 = 2\pi / 12$) sea necesaria, ésta, la cual corresponde a un período de doce meses, se conoce como *frecuencia fundamental* mientras que las demás serían *armónicas*. Cuando s es par, el término seno desaparece para $j = s/2$, y $\gamma_{j,t}$ se reduce a:

$$\gamma_{j,t} = \gamma_{j,t-1} \cos \lambda_j + v_{j,t} \quad (\text{A.10})$$

Para capturar efectos cíclicos, la ecuación (A.6) podría ser modificada de la siguiente forma:

$$Y_t = \mu_t + \gamma_t + \psi_t + \varepsilon_t \quad (\text{A.11})$$

donde la tendencia estocástica lineal, μ_t , permanece como en (A.4) y (A.5), ε_t es ruido blanco no correlacionado con ξ_t y u_t , en ningún t . Un ciclo determinístico es una onda del tipo seno-coseno con un período dado. Un ciclo estocástico se obtiene cuando el ciclo determinístico recibe el impacto de las perturbaciones y se adiciona un *factor atenuante*. La especificación estadística del ciclo estocástico ψ_t toma la forma:

$$\begin{bmatrix} \psi_t \\ \psi_t^* \end{bmatrix} = \rho_\psi \begin{bmatrix} \cos \omega & \text{sen } \omega \\ -\text{sen } \omega & \cos \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{t-1} \\ \psi_{t-1}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \kappa_t \\ \kappa_t^* \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

donde κ_t y κ_t^* son perturbaciones ruido blanco con media cero y varianzas $\sigma_\kappa^2 (= \sigma_{\kappa^*}^2)$; $0 \leq \omega \leq \pi$, es la frecuencia en radianes; ψ_t^* aparece por construcción para formar ψ_t y ρ_ψ ($0 \leq \rho_\psi \leq 1$) es un factor de atenuante de la amplitud. Las perturbaciones hacen del ciclo un proceso estocástico, el cual será estacionario si $\rho_\psi < 1$, y cuyo período del ciclo se calcula como $2\pi / \omega$. El proceso estocástico descrito por (A.12) se convierte en un proceso autorregresivo de orden uno cuando la frecuencia ω es o bien cero o bien π ¹⁷. Cuando $\omega = 0$, la primera ecuación del sistema descrito por (A.12) es $\psi_t = \rho_\psi \psi_{t-1} + \kappa_t$, mientras que cuando $\omega = \pi$, la ecuación es $\psi_t = -\rho_\psi \psi_{t-1} + \kappa_t$. En cualquiera de estos casos la ecuación que genera ψ_t^* se hace redundante.

Utilizando el operador de rezago L , que significa $X_{t-d} = L^d X_t$, el componente cíclico en (A.12) puede ser escrito como:

$$\begin{bmatrix} \psi_t \\ \psi_t^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \rho_\psi \cos \omega L & -\rho_\psi \text{sen } \omega L \\ \rho_\psi \text{sen } \omega L & 1 - \rho_\psi \cos \omega L \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \kappa_t \\ \kappa_t^* \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

17 Esto sucede ya que seno $\omega = 0$, cuando la frecuencia $\omega = 0$ ó $\omega = \pi$.

mientras que la solución para ψ_t es:

$$\psi_t = \frac{(1 - \rho_\psi \cos \omega \cdot L) \kappa_t + (\rho_\psi \operatorname{sen} \omega \cdot L) \kappa_t^*}{1 - 2\rho_\psi \cos \omega \cdot L + \rho_\psi^2 \cdot L^2} \tag{A.14}$$

En el presente trabajo, la serie de inflación se obtiene como la diferencia anual relativa del IPC. Ello hace que los factores estacionales tengan una menor importancia relativa en la generación del proceso, de forma que el modelo se reduce a:

$$Y_t = \mu_t + \psi_t + \varepsilon_t \tag{A.15}$$

Bajo esta circunstancia y teniendo en cuenta que, en general, $x_t = x_{t-1} + \zeta_t = \zeta_t / (1 - L)$, al reemplazar (A.4), (A.5) y (A.14) en (A.15), se obtiene:

$$Y_t = \frac{u_t}{(1 - L)} + \frac{(1 - \rho_\psi \cos \omega \cdot L) \kappa_{t-1} + (\rho_\psi \operatorname{sen} \omega \cdot L) \kappa_{t-1}^*}{[1 - 2\rho_\psi \cos \omega \cdot L + \rho_\psi^2 \cdot L^2]} + \frac{\xi_t}{(1 - L)^2} + \varepsilon_t \tag{A.16}$$

expresión que se conoce como *modelo de ciclo más tendencia*, la cual se estima en dominio de tiempo utilizando el filtro de Kalman. Para tal efecto, se hace una formulación espacio-estado del modelo, en la que $\alpha_t = (\mu_t, \beta_t, \psi_t, \psi_t^*)'$ representa el vector de variables de estado. Para iniciar el filtro de Kalman, los errores cuadrados medios de μ_t y β_t se igualan a números grandes pero finitos, mientras que la matriz de error cuadrado medio de $(\psi_t, \psi_t^*)'$ se iguala a la matriz de covarianza incondicional de $(\psi_t, \psi_t^*)'$. La función de verosimilitud se maximiza numéricamente con respecto a $\sigma_\varepsilon^2, \sigma_u^2, \sigma_\xi^2, \sigma_\kappa^2, \omega$ y ρ_ψ .

La ecuación de medición del modelo de ciclo más tendencia requerido por la formulación de espacio estado puede ser escrita como:

$$Y_t = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \alpha_t + \varepsilon_t \tag{A.17}$$

mientras que la *matriz de transición* se expresa como:

$$\alpha_t = \begin{bmatrix} \mu_t \\ \beta_t \\ \psi_t \\ \psi_t^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_\psi \cos \omega & \rho_\psi \operatorname{sen} \omega \\ 0 & 0 & -\rho_\psi \operatorname{sen} \omega & \rho_\psi \cos \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_{t-1} \\ \beta_{t-1} \\ \psi_{t-1} \\ \psi_{t-1}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_t \\ \xi_t \\ \kappa_t \\ \kappa_t^* \end{bmatrix} \tag{A.18}$$

La matriz de covarianza del vector de perturbaciones en (A.18) es una matriz diagonal con elementos $\{\sigma_u^2, \sigma_\xi^2, \sigma_\kappa^2, \sigma_\kappa^2\}$. El modelo será observable o identificable, a menos que ρ_ψ sea cero o que sea igual a cero o igual a π , mientras que, por su parte, la condición que σ_ξ^2 y σ_κ^2 sean estrictamente positivos (>0) es necesaria para lograr la estabilidad (Harvey, 1989).

El modelo *univariado* puede ser extendido al caso de más variables, de la siguiente forma. En primer lugar considere:

$$Y_t = \mu_t + \psi_t + \sum_{j=1}^h \vartheta_j w_{j,t} + \varepsilon_t; \quad \varepsilon_t \sim NID(0, \Sigma_\varepsilon) \tag{A.19}$$

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + u_t; \quad u_t \sim NID(0, \Sigma_u) \tag{A.20}$$

$$\beta_t = \beta_{t-1} + \xi_t; \quad \xi_t \sim NID(0, \Sigma_\xi) \tag{A.21}$$

sistema en el cual Σ_e , Σ_u , y Σ_ξ representan matrices de covarianza de orden $N \times N$ y ε , u , y ξ , representan vectores de orden $N \times 1$ de términos no correlacionados en ningún período. En el caso del ciclo, los parámetros de factor de atenuante, ρ_ψ , y de frecuencia, ω , se suponen iguales para todas las variables del sistema, en las que ψ_t y ψ_t^* son vectores de orden $N \times 1$. Como consecuencia de este supuesto, los ciclos de las diferentes series tienen la misma función de autocorrelación y el mismo espectro. De esta forma se tiene:

$$\begin{bmatrix} \psi_t \\ \psi_t^* \end{bmatrix} = \left\{ \rho_\psi \begin{bmatrix} \cos \omega & \text{sen } \omega \\ -\text{sen } \omega & \cos \omega \end{bmatrix} \otimes I_N \right\} \begin{bmatrix} \psi_{t-1} \\ \psi_{t-1}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \kappa_t \\ \kappa_t^* \end{bmatrix} \quad (\text{A.22})$$

con $E(\kappa_t \kappa_t') = E(\kappa_t^* \kappa_t^{*'}) = \Sigma_\kappa$ y $E(\kappa_t \kappa_t^{*'}) = 0$, y

$$\text{Var} \begin{bmatrix} \kappa_t \\ \kappa_t^* \end{bmatrix} = I_2 \otimes \Sigma_\kappa$$

Factores comunes se presentan cuando algunos de los componentes de las realizaciones analizadas son dirigidos por vectores de perturbación cuyo número de elementos es inferior a N^{18} . Así, por ejemplo, niveles y pendientes (tendencias) comunes implican que el rango de las matrices de covarianza Σ_u y Σ_β es menor que N . En este caso se dice que las variables están cointegradas.

ANEXO B

LA FORMULACIÓN DE ESPACIO ESTADO Y EL FILTRO DE KALMAN

La ecuación de medición en (A.17) de la secuencia observable $\{Y_t\}$ puede ser re-escrita como:

$$Y_t = Z_t \alpha_t + \varepsilon_t, \quad (\text{B.1})$$

donde Z_t es un vector de orden $1 \times m$, α_t es un vector de orden $m \times 1$, conocido como *vector de estado*, y ε_t son perturbaciones no correlacionadas serialmente, con media cero, $[E(\varepsilon_t) = 0]$, y varianzas, $\text{Var}(\varepsilon_t) = H_t$. Los elementos no observables del vector de estado son generados por un proceso de Markov de orden uno, conocido como la *ecuación de transición*, y que es equivalente a la expresión (A.18), la cual re-escribimos aquí como:

$$\alpha_t = T_t \alpha_{t-1} + R_t \eta_t, \quad (\text{B.2})$$

donde T_t es una matriz de orden $m \times m$, R_t es una matriz de orden $m \times g$; y η_t es un vector de perturbaciones no correlacionadas serialmente, de orden $g \times 1$, con $E(\eta_t) = 0$ y $\text{Var}(\eta_t) = Q_t$. Las ecuaciones de medición y transición constituyen piezas fundamentales de la formulación de espacio-estado. Sin embargo, para completar la formulación es necesario suponer, de una parte, que los primeros dos momentos del vector de estado inicial α_0 son $E(\alpha_0) = a_0$ y $\text{Var}(\alpha_0) = P_0$, y, de otra parte, que las perturbaciones ε_t y η_t no están correlacionadas entre sí en ningún período $E(\varepsilon_t' \eta_t') = 0$ y no están correlacionadas con el estado inicial $E(\varepsilon_t' \alpha_0') = 0$

18 En este caso se tiene que las matrices de covarianza de las perturbaciones implicadas tienen rango menos que completo.

y $E(\eta_t \alpha'_t) = 0$ en ningún período. El sistema de matrices está compuesto por Z_t , T_t , y R_t , las cuales se suponen no estocásticas¹⁹.

El filtro de Kalman es un procedimiento de recursiones utilizado para computar el estimador óptimo del vector de estado en el momento t . Se trata de un mecanismo utilizado por la formulación de espacio-estado, de la misma forma como los mínimos cuadrados ordinarios se emplean por el modelo de regresión. El uso del filtro de Kalman requiere que las perturbaciones del vector de estado inicial se distribuyan normalmente. Las observaciones de Y hasta el período $t-1$ son utilizadas para computar a_{t-1} , que es el estimador óptimo de α_{t-1} . La matriz de covarianza del error de estimación es

$$P_{t-1} = E[(\alpha_{t-1} - a_{t-1})(\alpha_{t-1} - a_{t-1})'] \quad (\text{B.3})$$

Las ecuaciones de predicción están compuestas, en primer lugar, por el estimador óptimo de α , (que minimiza el Error Cuadrado Medio-MSE) el cual se construye como:

$$a_t|_{t-1} = T_t a_{t-1}, \quad (\text{B.4})$$

y, en segundo lugar, de la matriz de covarianza del error de estimación:

$$P_t|_{t-1} = T_t P_{t-1} T_t' + R_t Q_t R_t' \quad (\text{B.5})$$

Las ecuaciones de actualización operan una vez se conoce una nueva observación de Y_t . Dichas ecuaciones son:

$$a_t = a_t|_{t-1} + P_t|_{t-1} Z_t' F_t^{-1} (Y_t - Z_t a_t|_{t-1}) \quad (\text{B.6})$$

y,

$$P_t = P_t|_{t-1} - P_t|_{t-1} Z_t' F_t^{-1} Z_t P_t|_{t-1} \quad (\text{B.7})$$

donde,

$$F_t = E[(Y_t - Z_t a_t|_{t-1})(Y_t - Z_t a_t|_{t-1})'] = Z_t P_t|_{t-1} Z_t' + H_t \quad (\text{B.8})$$

Las ecuaciones de predicción y actualización conforman el filtro de Kalman. Dichas ecuaciones pueden escribirse como un conjunto único de recursiones de $a_t|_{t-1}$ hacia $a_{t+1}|_t$. En este caso, se podría escribir:

$$a_{t+1}|_t = (T_{t+1} - K_t Z_t) a_t|_{t-1} + K_t Y_t \quad (\text{B.9})$$

donde K_t es la matriz de ganancia, la cual se computa como:

$$K_t = T_{t+1} P_t|_{t-1} Z_t' F_t^{-1} \quad (\text{B.10})$$

y la ecuación recursiva de la matriz de covarianza del error es:

$$P_{t+1}|_t = T_{t+1} (P_{t-1}|_{t-1} - P_t|_{t-1} Z_t' F_t^{-1} Z_t P_t|_{t-1}) T_{t+1}' + R_{t+1} Q_{t+1} R_{t+1}' \quad (\text{B.11})$$

La predicción un período adelante de la variable Y_t con la información disponible hasta el período T , \hat{Y}_{T+1} , es:

¹⁹ Las propiedades de las matrices Z_t , T_t y R_t determinan directamente que el sistema sea controlable, observable, estable y detectable.

$$\tilde{Y}_{T+l} | T = Z_{T+l} a_{T+l} | T \quad (\text{B.12})$$

por su parte, la predicción *varios períodos adelante*, esto es para períodos futuros $T+2$, $T+3$, etc., después de sustituciones repetidas en la ecuación de transición desde el momento T hasta el momento $T+l$ es igual a:

$$\alpha_{T+l} = \left[\prod_{j=1}^L T_{T+j} \right] \alpha_T + \sum_{j=1}^{l-1} \left[\prod_{i=j+1}^L T_{T+i} \right] R_{T+j} \eta_{T+j} + R_{T+l} \eta_{T+l}; l = 2, 3, \dots \quad (\text{B.13})$$

El estimador de mínima media al cuadrado-MMSE de α_{T+l} en el momento T es la media condicional de α_{T+l} . Tomando el valor esperado condicional en el momento T de la expresión en (B.13) se obtiene:

$$E_T(\alpha_{T+l}) = a_{T+l} | T = \left[\prod_{j=1}^L T_{T+j} \right] a_T \quad (\text{B.14})$$

En el caso de coeficientes que no varían en el tiempo, la matriz de covarianza, $P_{T+l} | T$, está dada por:

$$P_{T+l} | T = T^l P_T T^{l'} + \sum_{j=0}^{l-1} T^j R Q R' T^{j'} \quad l = 1, 2, \dots \quad (\text{B.15})$$

Tomado el valor esperado condicional de la ecuación de medición en el momento $T+l$ se tiene:

$$E_T(Y_{T+l}) = \tilde{Y}_{T+l} | T = Z_{T+l} a_{T+l} | T \quad (\text{B.16})$$

y, finalmente, la matriz de error cuadrado medio-MSE en el momento $T+l$ es:

$$MSE(\tilde{Y}_{T+l} | T) = Z_{T+l} P_{T+l} | T Z_{T+l}' + H_{T+l} \quad (\text{B.17})$$