

Distribución condicional de los retornos de la tasa de cambio colombiana: un ejercicio empírico a partir de modelos GARCH multivariados

Santiago Gallón Gómez, Karoll Gómez Portilla*

Universidad de Antioquia, Colombia.

Recibido: septiembre 2006 – Aprobado: marzo 2007

Resumen. Un conjunto de modelos GARCH multivariados son estimados y su validez empírica comparada a partir del cálculo de la medida VaR, para los retornos diarios de la tasa de cambio nominal del peso colombiano con respecto al dólar americano, euro, libra esterlina y yen japonés en el periodo 1999–2005. La comparación de las estimaciones para la matriz de covarianza condicional y los resultados obtenidos para la proporción de fallo y el contraste de cuantil dinámico de Engle y Manganelli (2004) presentan evidencia a favor del modelo de correlación condicional constante.

Palabras clave: econometría financiera, modelos MGARCH, volatilidad tiempo-variante, correlación, retornos de la tasa de cambio, valor en riesgo.

Clasificación JEL: C10, C22, C32, C53, F31, G10.

Abstract. A set of multivariate GARCH models is estimated and its empirical validity is compared from the calculation of the Value at Risk. Data used are the daily returns of the nominal exchange rate of the Colombian peso vis-à-vis the American dollar, euro, sterling and Japanese yen for the period 1999–2005. The comparison of the estimations for the conditional covariance matrix and the results obtained for the proportion of failure and the dynamic quantile test of Engle and Manganelli (2004), show evidence in favor of the model of Conditional Constant Correlation.

Key words: financial econometrics, MGARCH models, time-varying volatility, correlation, exchange rate returns, value at risk.

JEL classification: C10, C22, C32, C53, F31, G10.

*Este artículo es resultado de la tesis de Maestría en Economía de los autores. Agradecemos las observaciones y comentarios de Elkin Castaño, Luis F. Melo y el evaluador anónimo del artículo. Adicionalmente, agradecemos a Roy van der Weide por facilitarnos su código GO-GARCH bajo Ox.

Dirección para correspondencia: Centro de Investigaciones Económicas, Universidad de Antioquia, Apartado Aéreo 1226, Medellín, Colombia.
Teléfono: +57 (4) 2105842. Fax: +57 (4) 2105843. E-mail: karollg@udea.edu.co.

1. Introducción

Debido a la creciente volatilidad observada en los mercados financieros durante las dos últimas décadas,¹ ha surgido gran interés por parte de los académicos, inversionistas y autoridades reguladoras financieras por diseñar herramientas que permitan una mejor comprensión de la evolución de las variables financieras, en particular, de las dependencias temporales presentes en los momentos condicionales de orden superior; con el fin de lograr una administración más eficiente del riesgo asociado a las fluctuaciones de dichas variables. En consecuencia, las consideraciones en torno al riesgo y la incertidumbre han venido ocupando un lugar cada vez más importante dentro de la teoría económica y financiera, impulsando la creación de nuevas técnicas econométricas que permitan la modelación de los mismos.

El estudio de la volatilidad, como una vía para mejorar la administración del riesgo financiero, se constituye en un asunto de especial importancia en la toma de decisiones de inversión y creación de portafolios eficientes, dada la sensibilidad de los mismos ante cambios en esta. A partir del trabajo pionero de Engle en 1982, en el que desarrolla el modelo autoregresivo de heterocedasticidad condicional ARCH (*Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*), se han generado importantes adelantos en la modelación y pronóstico de la volatilidad asociada a una serie de tiempo. La relevancia del modelo ARCH, y muchas de sus extensiones dentro de las finanzas, surge de la directa asociación entre la varianza y el riesgo, y del *trade off* existente entre el retorno de un activo y su riesgo asociado, en el sentido de que una inversión riesgosa puede producir mayores retornos que una inversión libre de riesgo; en consecuencia, muchas de las teorías de determinación de precios de los activos, como por ejemplo los modelos CAPM (*Capital Asset Pricing Model*), CCAMP (*Consumption CAPM*), ICAPM (*International CAPM*) y APT (*Arbitrage Pricing Theory*), entre otros, han encontrado una implementación empírica a partir de esta herramienta (Bera y Higgins, 1993; Bollerslev, *et al.*, 1992).

Adicionalmente, se ha demostrado que la familia de modelos ARCH captura muchas de las regularidades empíricas asociadas a la volatilidad de los retornos de los activos financieros, por ejemplo, varianzas tiempo-variantes, distribuciones leptocúrticas, volatilidad por *cluster* –grandes (pequeños) cambios en los precios, de cualquier signo, tienden a estar seguidos por grandes (pequeños) cambios de precios–, efectos *leverage* –correlación negativa entre los retornos de un activo y cambios en su volatilidad futura–, persistencia, asimetría en la volatilidad –reacción diferente de la volatilidad ante grandes incrementos o caídas en el precio de un activo–, entre muchas otras.²

De otra parte, el creciente proceso de globalización económica ha propicia-

¹Algunos de los eventos más destacados han sido el colapso del mercado accionario de *Wall Street* en octubre de 1987 y las crisis de los mercados emergentes y de América Latina (México, 1994–1995; Sudeste Asiático, 1997–1999; Rusia, 1998; Brasil, 1998–1999, y Argentina, 2001).

²Para una descripción completa de estos hechos estilizados, véase Bollerslev, *et al.* (1994); Ghysels, *et al.* (1996), y Engle y Patton (2001).

do la integración de los mercados financieros generando una alta dependencia entre los mismos; en este contexto la tasa de cambio se convierte en una de las variables más importantes en el campo de las finanzas internacionales. En consecuencia, es de gran importancia, tanto para los inversionistas como para las instituciones financieras, comprender la relación dinámica existente entre los retornos de los portafolios en moneda extranjera y los movimientos de corto plazo de las tasas de cambio, incluyendo su dependencia temporal de segundo orden, puesto que la administración de un portafolio internacional depende, entre otros factores, de los movimientos esperados de esta variable a través del tiempo, a menos que la paridad del poder de compra se mantenga (Bollerslev, *et al.*, 1992). Adicionalmente, el entendimiento de la evolución de la volatilidad de la tasa de cambio es un asunto clave para la formulación de política económica debido al impacto que esta tiene sobre un amplio conjunto de temas macroeconómicos.³

La naturaleza heterocedástica de la dinámica de la tasa de cambio de corto plazo es ampliamente aceptada por lo que la metodología ARCH es un candidato natural para su modelación.⁴ Sin embargo, muchos de los análisis importantes en la disciplina económica tienen sentido si se realizan en un contexto multivariado, en particular, en el área de las finanzas, debido al hecho de que la volatilidad asociada a los mercados financieros se mueve conjuntamente en el tiempo y a través de diferentes activos y mercados. En este sentido, una estructura multivariada permite contrastar la existencia de efectos *spillover* o de contagio en la volatilidad, impacto de las noticias (choques), eficiencia en la determinación de los precios y demás relaciones que se pueden presentar entre los diferentes mercados financieros (Baillie y Bollerslev, 1991). Así mismo, existen razones teóricas para utilizar modelos de volatilidad multivariada. Por ejemplo, este tipo de especificación permite estimar de manera eficiente las correlaciones cruzadas dinámicas que pueden existir entre los retornos de un conjunto de activos, lo cual es un factor crucial para la determinación de las ganancias obtenidas a partir de la diversificación de un portafolio internacional (Bera y Kim, 2002).

En este sentido, el objetivo de este artículo es modelar la distribución condicional de los retornos de la tasa de cambio diaria del peso colombiano con respecto al dólar americano, el euro, la libra esterlina y el yen japonés a partir de la aplicación de modelos GARCH multivariados MGARCH (*Multivariate Generalized ARCH*), para el periodo comprendido entre el 2 de enero de 1999 y el 28 de febrero de 2005. La elección de estas monedas se hizo con base en los volúmenes de transacciones promedio diarias realizadas en dólares y euros

³El análisis de la volatilidad de la tasa de cambio es importante ya que esta genera incertidumbre en los precios de las importaciones y exportaciones, en el valor de las reservas internacionales, en las posiciones de mercado abierto de moneda extranjera, en el valor doméstico del pago de la deuda y las remesas lo cual a su vez afecta el nivel de salarios, precios, producto y empleo doméstico (Diebold y Nerlove, 1989, y Baillie y Bollerslev, 1991).

⁴Algunas referencias al respecto son: Baillie y Bollerslev (1989, 1991); Hsieh (1988, 1989a, 1989b); Diebold y Nerlove (1989); Milhøj (1987); Engle, *et al.* (1990a); Vlaar y Palm (1993), entre otras.

en la bolsa de valores colombiana y en la importancia que representan en el mercado de intercambio de monedas extranjeras Forex.⁵

El documento está dividido del siguiente modo. En la segunda sección, se describe la información utilizada. En la tercera, se presentan los resultados obtenidos a partir de la especificación y estimación de los modelos MGARCH. En la cuarta, se realiza una aplicación de la medida de valor en riesgo VaR (*Value at Risk*) con el fin de evaluar la validez empírica de cada uno de los modelos estimados, a partir de la proporción de fallo y el contraste de cuantil dinámico, e ilustrar la utilidad de los modelos GARCH (*Generalized ARCH*) en la administración del riesgo de mercado. Por último, se presentan algunas conclusiones.

2. Descripción de la información

La base de datos empleada está compuesta por 1 606 observaciones diarias para la tasa de cambio nominal del peso colombiano con respecto al dólar americano, el euro, la libra esterlina y el yen japonés, correspondientes al periodo comprendido entre el 4 de enero de 1999 y el 28 de febrero de 2005.⁶ A partir de esta información se calcularon los retornos nominales porcentuales definidos como $y_{it} = 100 \log(s_{it}/s_{it-1})$ donde s_{it} representa la tasa de cambio nominal del peso colombiano con respecto a la i -ésima moneda en el t -ésimo día. La información contiene sólo los días comerciales. Para las observaciones faltantes, correspondientes a los días festivos, se utilizó el dato del día comercial inmediatamente anterior.

Como puede observarse en el figura 1 (Apéndice), los retornos diarios presentan la característica de volatilidad por *cluster*, es decir, grandes (pequeños) cambios en los precios, de cualquier signo, tienden a estar seguidos por grandes (pequeños) cambios de precios (Mandelbrot (1963)). Adicionalmente, la inspección visual de los datos parece indicar no estacionariedad en cada una de las tasas de cambio mientras los retornos asociados a éstas, como era de esperarse, parecen ser estacionarios por lo menos en media.⁷ El no rechazo de la

⁵El mercado de divisas representa el 11.61% del mercado de activos financieros de la Bolsa de Valores de Colombia, dentro del cual en promedio 99.9% de las transacciones diarias se realiza en dólares y el 0.1% restante en euros. Sin embargo, en el mercado Forex, el cual se caracteriza por ser el más rápido, líquido, con mayor número de participantes (de los cuales el 95% son inversionistas individuales) y de mayor crecimiento en el mundo financiero moderno, el 85% de las transacciones diarias involucran, en su orden, al dólar americano (USD), el euro (EUR), el yen japonés (JPY), la libra esterlina (GBP) y el franco suizo (CHF), en operaciones spot, forward y opciones de divisas.

⁶La elección del periodo muestral se hizo de acuerdo a la disponibilidad de información para el euro. Los datos usados para las tasas de cambio corresponden principalmente a un periodo de flotación libre. La fuente de la información estadística para las tasas de cambio del euro, la libra esterlina y el yen japonés con respecto al dólar americano es el *Federal Reserve Statistical Release* [<http://www.federalreserve.gov/releases/H10/hist>], y para la tasa de cambio del peso colombiano con respecto al dólar americano es el Banco de la República [<http://www.banrep.gov.co/estadcam/trm/trm.xls>].

⁷Es importante notar que la evolución de la tasa de cambio del peso colombiano con respecto a las monedas analizadas muestra dos hechos importantes: un periodo de fuerte

hipótesis nula en el contraste de raíz unitaria de Dickey y Fuller, y de Phillips y Perron, y el rechazo de la hipótesis nula de estacionariedad en el contraste KPSS al logaritmo de cada una de las tasas de cambio confirma la presunción anterior.⁸ Este resultado respalda la necesidad de modelar el retorno nominal porcentual y_{it} del peso colombiano con respecto a la i -ésima moneda, es decir, se valida la propiedad de martingala, $E[\Delta \log(s_{it})|\mathfrak{S}_{t-1}] = 0$ donde Δ denota el operador diferencia, para los movimientos de corto plazo del logaritmo de la tasa de cambio nominal del peso colombiano con respecto a la i -ésima moneda (Fama, 1965; Samuelson, 1965, y Mandelbrot, 1963).⁹

En la tabla 1 se presenta el resumen estadístico para cada uno de los retornos. La desviación estándar indica que el euro y el yen japonés son los retornos más volátiles. En todos los casos el coeficiente de asimetría es positivo y cercano a cero, principalmente en el caso del euro y la libra esterlina, mientras es notable el exceso de curtosis con respecto a la distribución normal. En consecuencia, el contraste incondicional de normalidad de Jarque-Bera rechaza, en todos los casos, la hipótesis nula. Los estadísticos de Ljung-Box evidencian, además, correlación serial significativa al rezago 15 tanto en los niveles de los retornos como en sus cuadrados; en consecuencia, existe evidencia de no linealidad y, adicionalmente, necesidad de modelar la media y la varianza condicionales para cada uno de estos.¹⁰

3. Estimación multivariada de la distribución condicional de los retornos

Con el fin de evaluar la importancia de una estructura de volatilidad condicional multivariada se calculó la matriz de correlación cruzada entre los retornos, evidenciándose la asociación lineal significativa tanto contemporánea como en el primer rezago, por lo que parece existir una importante influencia cruzada entre los mercados.¹¹ De acuerdo con lo anterior y dada la evidencia sobre la existencia de dependencia temporal presente en los retornos de cada una

devaluación en el 2002, con devaluaciones fin de año nominales de 25.4% con respecto al dólar, 47.3% con respecto al euro y 38% con respecto a la libra y al yen, el cual parece mostrar un proceso de cambio que lleva a las series a un nuevo nivel caracterizado por la revaluación de la moneda colombiana. De hecho, el peso colombiano fue una de las monedas con mayor valorización en el mundo en el año 2004, al observarse apreciaciones nominales de 14% con respecto al dólar, 7.6% con respecto al euro y la libra, y 9.3% con respecto al yen, tendencia que aún persiste en lo corrido del 2005. Este comportamiento puede dar indicios de la posible no linealidad en la estructura de cada uno de estos procesos.

⁸Los resultados para las pruebas de raíz unitaria se encuentran en el Apéndice, tabla 7.

⁹Los resultados encontrados hasta ahora están de acuerdo con los hallazgos de trabajos anteriores: Meese y Singleton (1982), Corbae y Ouliaris (1986), Milhøj (1987), Hsieh (1989b), Diebold y Nerlove (1989), Baillie y Bolleslev (1989, 1991), Bolleslev (1990), Klassen (1990), Malik (2005), entre otros.

¹⁰Se espera que tres semanas sea un periodo prudente para que la correlación serial en los retornos haya desaparecido, dado que estos corresponden a datos diarios que incluyen solo los días comerciales.

¹¹En el Apéndice, tabla 8, se reportan los resultados para varios rezagos de las matrices de correlación cruzada de los retornos.

Tabla 1. Resumen estadístico para los retornos de la tasa de cambio colombiana*

	Dólar	Euro	Libra esterlina	Yen
Media	0.0110	0.0142	0.0151	0.0130
Mediana	0.0000	0.0058	0.0117	0.0089
Máximo	1.2004	1.5267	1.4009	1.9682
Mínimo	-1.3630	-1.5225	-1.4824	-1.6218
Desviación estándar	0.1998	0.3406	0.2965	0.3439
Asimetría	0.1546	0.0078	0.0565	0.2407
Curtosis	9.3931	4.1626	4.9219	5.1628
Jarque-Bera	2739.7 {0}	90.420 {0}	247.88 {0}	328.34 {0}
Q(15)	118.93 {0}	21.228 {0.096}	28.223 {0.020}	23.372 {0.077}
Q2(15)	617.59 {0}	116.77 {0}	215.13 {0}	120.09 {0}

* Q(15) y Q2(15) representan los estadísticos Ljung-Box sobre los retornos y sus cuadrados, respectivamente. Los p -valores aparecen entre llaves.

de las tasas de cambio, se estimó un modelo (este es un modelo distinto al VaR que por sus iniciales en inglés se conoce como VAR) VaR(2) para la media condicional, especificado como sigue:

$$\mathbf{y}_t = E(\mathbf{y}_t | \mathcal{S}_{t-1}) + \boldsymbol{\epsilon}_t = \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\Phi}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \boldsymbol{\Phi}_2 \mathbf{y}_{t-2} + \boldsymbol{\epsilon}_t, \quad (1)$$

donde $\boldsymbol{\epsilon}_t | \mathcal{S}_{t-1} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{H}_t)$ con matriz de varianzas y covarianzas condicionales \mathbf{H}_t , $\boldsymbol{\nu}$ es un vector N -dimensional de parámetros y $\boldsymbol{\Phi}_i$ es una matriz cuadrada de parámetros para $i = 1, 2$.

La elección de la óptima longitud del rezago, se basó en los criterios de información de Akaike (AIC), AIC corregido (AICC), Hannan-Quinn (HQ), error de predicción final (FPE) y Schwarz (SIC). Adicionalmente, el método de identificación de Tiao y Box basado en las matrices de correlación cruzada y de correlación cruzada parcial fue utilizado. Los resultados de la estimación del modelo identificado aparecen en la tabla 2. El vector $\boldsymbol{\nu}$ de interceptos no resultó significativo a un nivel del 5% por lo que fue eliminado de la estimación.¹² Los dos rezagos del retorno del dólar parecen ser muy importantes en la explicación del conjunto completo de variables en el sistema, dado que todos los coeficientes estimados asociados a esta resultaron significativos a un nivel de significancia del 1%.

Adicionalmente, es importante notar que el valor de los coeficientes estimados es pequeño, lo cual parece indicar que son los choques aleatorios los que dominan la estructura dinámica de los retornos; en consecuencia, los cambios en el vector \mathbf{y}_t parecen ser poco predecibles. Este resultado, además de validar la propiedad de la martingala, está de acuerdo con la hipótesis de mercados

¹²Con el fin de captar las posibles diferencias de volatilidad a través de los días comerciales (Baillie y Bollerslev (1989, 1991), Hsieh (1989b) y Malik (2005)), variables *dummy* de cierre del mercado debido a días de fiesta y fin de semana, además de una variable *dummy* para cada día de la semana, d1, d2, d3, d4, d5, fueron consideradas en la estimación multivariada sin encontrarse ningún efecto estadísticamente significativo.

Tabla 2. Resultados de la estimación del modelo VaR(2)*

Parámetros	Ecuaciones			
	Retorno Dólar	Retorno Euro	Retorno Libra esterlina	Retorno Yen
Φ'_1	0.293 (8.388)	0.421 (6.972)	0.332 (6.337)	0.373 (6.116)
	0.003 (0.117)	0.068 (1.594)	0.037 (0.997)	0.051 (1.189)
	-0.031 (-1.020)	-0.113 (-2.142)	-0.039 (-0.849)	-0.119 (-2.244)
	-0.029 (-1.587)	-0.078 (-2.471)	-0.047 (-1.718)	-0.050 (-1.570)
Φ'_2	-0.172 (-4.862)	(0.764) (-2.857)	-0.176 (-3.315)	-0.218 (-3.534)
	0.028 (1.122)	0.044 (1.049)	0.118 (3.193)	0.070 (1.636)
	-0.005 (-0.168)	-0.022 (-0.411)	-0.099 (-2.154)	-0.059 (-1.107)
	0.014 (0.764)	-0.007 (-0.214)	0.004 (0.139)	0.008 (0.251)
Asimetría	0.149	0.005	0.037	0.244
Curtosis	8.639	3.983	4.499	4.782
Jarque-Bera	2129.93 {0}	64.506 {0}	150.591 {0}	228.024 {0}
Q(15)	41.60 {0}	8.52 {0.90}	7.95 {0.92}	15.015 {0.45}
Q2(15)	622.57 {0}	82.58 {0}	207.12 {0}	109.72 {0}
<i>Contrastes conjuntos</i>				
Portmanteau (15)	222.11 {0.239}	LM(12)	20.634 {0.20}	
Doornik-Hansen	950.185 {0}	Lütkepohl	2647.501 {0}	
MARCH-LM(15)	2392.58 {0}			

* Los estadísticos t aparecen entre paréntesis y los p -valores entre llaves.

eficientes descrita por Fama (1965) la cual asume que existe un gran número de agentes maximizadores del beneficio que compiten activamente entre sí para predecir el valor de mercado futuro de sus activos individuales, y que ningún agente cuenta con información adicional para realizar sus predicciones ya que la información se encuentra disponible de manera libre para todos los participantes. De acuerdo con lo anterior, Fama (1965) argumenta que el precio corriente es un estadístico suficiente para la distribución de los movimientos futuros de los precios al estar toda la información incorporada en los precios pasados.

Con el fin de evaluar la validez general del modelo se desarrollaron los respectivos contrastes de especificación. Las pruebas de normalidad multivariada conjunta de Doornik-Hansen y de Lütkepohl, además del estadístico de Jarque-Bera para cada ecuación, indican el rechazo de la hipótesis nula de normalidad, debido principalmente al exceso de curtosis presente en cada uno de los re-

tornos. De otra parte, no es posible rechazar, en todos los casos, la hipótesis nula de no existencia de correlación serial en los residuales estandarizados al rezago 15, de acuerdo con el contraste de Ljung-Box, excepto para el retorno del dólar. Por el contrario, se rechaza la hipótesis nula de no existencia de correlación serial en los residuales estandarizados al cuadrado, al rezago 15. El contraste LM para efectos ARCH, tanto univariado como multivariado, confirma este resultado, por lo que se encuentra evidencia a favor de la existencia de efectos ARCH multivariados. Por último, todas las raíces características asociadas al determinante del polinomio autoregresivo $\Phi(L) = \mathbf{I} - \Phi_1 L - \Phi_2 L^2$, donde L es el operador de rezago, se encuentran fuera del círculo de unidad, garantizándose la estacionariedad del modelo.

En consecuencia, tres especificaciones fueron elegidas para modelar la distribución de la matriz de varianzas y covarianzas condicionales \mathbf{H}_t : el modelo BEKK (Baba, Engle, Kraft y Kroner) de Engle y Kroner (1995), el GARCH ortogonal O-GARCH (*Orthogonal GARCH*) de Alexander y Chibumba (1997) y el de correlación condicional dinámico DCC_E (*Dynamic Conditional Correlation*) de Engle (2002).¹³ El primero, fue elegido por permitir una gran flexibilidad en la dinámica de las varianzas y covarianzas condicionales; mientras los modelos O-GARCH y DCC_E, el cual anida al modelo de correlación condicional constante CCC (Constant Conditional Correlation) de Bollerslev (1990), se eligieron por su facilidad computacional al manejar un número grande de retornos.¹⁴ Adicionalmente, en todos los casos se tuvo en cuenta la generalidad ofrecida por cada una de los modelos, buscando especificaciones realistas pero parsimoniosas que aseguren la propiedad de definición positiva para \mathbf{H}_t . Las especificaciones de estos modelos, para \mathbf{H}_t , son las siguientes: la representación BEKK(p, q, K), esta definida como

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{C}_0^{*'} \mathbf{C}_0^* + \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^q \mathbf{A}_{ik}^{*'} \epsilon_{t-i} \epsilon'_{t-i} \mathbf{A}_{ik}^{*j} + \sum_{k=1}^K \sum_{j=i}^p \mathbf{B}_{jk}^{*'} \mathbf{H}_{t-j} \mathbf{B}_{jk}^*, \quad (2)$$

donde \mathbf{C}_0^* , \mathbf{A}_{ik}^* y \mathbf{B}_{jk}^* son matrices $N \times N$ de parámetros, con \mathbf{C}_0^* triangular superior y donde el límite superior de la sumatoria, K , determina la generalidad del proceso; para el modelo O-GARCH se tiene

$$\mathbf{H}_t = E(\mathbf{y}_t \mathbf{y}'_t | \mathfrak{S}_{t-1}) = \mathbf{\Lambda} \Phi_t \mathbf{\Lambda}', \quad \text{donde } \mathbf{\Lambda} = \{\lambda_{ij}\} = \{w_{ij} \sigma_{y_i}\}, \quad (3)$$

¹³Para una revisión teórica de los modelos MGARCH véase Bauwens, *et al.* (2006), y Gallón y Gómez (2005). En Colombia, algunos trabajos como Melo y Becerra (2006) han empleado estos modelos para analizar el mecanismo de transmisión de la política monetaria asociado con el crédito bancario a partir del estudio de la dinámica de las tasas de interés de corto plazo.

¹⁴La estimación para las diferentes especificaciones de la matriz de covarianza condicional se realizaron utilizando el *Toolbox* `ucsd_garch` versión 2.0 del 01/01/2002 en MatLab elaborado por Kevin Sheppard, el cual se encuentra disponible en su dirección electrónica http://www.kevinsheppard.com/research/ucsd_garch/ucsd_garch.aspx.

y, por último, para el modelo DCC_E,

$$E(\boldsymbol{\epsilon}_t \boldsymbol{\epsilon}_t' | \mathfrak{S}_{t-1}) = \mathbf{H}_t = \mathbf{D}_t \mathbf{R}_t \mathbf{D}_t, \\ \text{con } \mathbf{D}_t = \text{diag}\{h_{11t}^{1/2}, \dots, h_{NNt}^{1/2}\} \text{ y } \mathbf{R}_t = \{\rho_{ijt}\}, \quad (4)$$

con estructura de correlación dinámica para \mathbf{R}_t

$$\mathbf{R}_t = \text{diag}\{\mathbf{Q}_t\}^{-1/2} \mathbf{Q}_t \text{diag}\{\mathbf{Q}_t\}^{-1/2} = \left\{ q_{ijt} / (q_{iit} q_{jtt})^{1/2} \right\},$$

donde \mathbf{Q}_t se define como un proceso GARCH(1,1),

$$\mathbf{Q}_t = (1 - \alpha - \beta) \bar{\mathbf{Q}} + \alpha \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{t-1} \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{t-1}' + \beta \mathbf{Q}_{t-1}$$

con $\bar{\mathbf{Q}}$ que representa la matriz de correlación incondicional de las perturbaciones estandarizadas $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_t = \mathbf{D}_t^{-1} \boldsymbol{\epsilon}_t$.¹⁵ En las tablas 3 y 4 se resumen los resultados de estimación para los modelos DCCE(1, 1) y O-GARCH(1, 1), y en la tabla 5 los del modelo BEKK(1, 1, 1). Es importante anotar que en todos los casos se obtuvieron estimaciones robustas para la matriz de covarianzas de los parámetros.¹⁶

Una variedad de especificaciones fueron estimadas para el modelo de Engle (2002), DCC_E(1, 1), DCC_E(2, 1) y DCC_E(2, 2), encontrándose evidencia a favor de la especificación DCC_E(1, 1) al no mejorar la función log-verosímil con especificaciones superiores y no ser significativos los parámetros adicionales α y β . Así mismo, se llevó a cabo el contraste propuesto por Engle y Sheppard (2001) con el fin de probar la hipótesis nula de correlación condicional constante contra la alternativa de correlación condicional dinámica. Este contraste se realizó para varias longitudes de rezago rechazándose en todos los casos la hipótesis nula a un nivel de significancia inferior al 1%.¹⁷ Sin embargo, los coeficientes α y β del modelo DCC_E(1, 1) no resultaron significativos; en consecuencia, también se estimó el modelo CCC(1, 1) encontrándose una estructura de correlación altamente significativa entre los retornos.¹⁸

Para el caso del modelo O-GARCH los resultados del análisis de componentes principales del sistema completo muestran que la primera componente acumula el 71% de la información contenida en los datos. Cada columna en

¹⁵El modelo CCC asume que en algunas aplicaciones las correlaciones condicionales pueden asumirse como tiempo-invariantes, por lo que $\mathbf{H}_t = \mathbf{D}_t \mathbf{R} \mathbf{D}_t$, donde $\mathbf{R} = \{\rho_{ij}\}$.

¹⁶La estimación de los modelos aquí presentados se realizó en dos etapas. En la primera, se estimó la ecuación para la media condicional y se obtuvieron los residuales. En la segunda, se estimaron los parámetros asociados a la matriz de covarianza condicional usando el método de estimación robusto de cuasi-máxima verosimilitud -QML- de Bollerslev y Wooldridge (1992), tratando a los residuales como datos observados. La propiedad de diagonalidad en bloque de la matriz de información garantiza la obtención de estimadores asintóticamente eficientes.

¹⁷El valor del estadístico de razón de verosimilitud, el cual distribuye como una χ^2 con el número de rezagos más un grado de libertad, para órdenes de rezago de 1, 2 y 3 fue 14.86, 25.77 y 32.90, respectivamente.

¹⁸En el Apéndice, tabla 10, aparecen los resultados correspondientes a la matriz de correlación cruzada estimada a partir de un modelo CCC.

Tabla 3. Resultados de la estimación de modelos DCC_E y CCC*

	DDC _E (1,1) y CCC(1,1)			
	Retorno Dólar	Retorno Euro	Retorno Libra esterlina	Retorno Yen
c	0.001 (0.350)	0.010 (0.569)	0.005 (0.542)	0.001 (0.419)
α_1	0.197 (268.8)	0.055 (327.4)	0.091 (422.1)	0.034 (0.089)
β_1	0.786 (3666.3)	0.847 (153.4)	0.847 (5.429)	0.949 (4551.6)
α_l	0.022	(0.133)		
β_s	0.964	(1.518)		
Log-verosimilitud	Log L [DCC _E]	1017.7	Log L [CCC]	899.27
Asimetría	-0.10	-0.05	-0.27	0.21
Curtosis	5.00	3.85	4.34	4.36
Jarque-Bera	272.3 {0}	49.88 {0}	141.0 {0}	137.2 {0}
Q(15)	32.93 {0.01}	8.71 {0.89}	6.13 {0.97}	6.47 {0.97}
Q2(15)	11.81 {0.69}	17.16 {0.19}	11.69 {0.70}	16.15 {0.37}
$\alpha_1 + \beta_1$	0.984	0.902	0.938	0.984
Portmanteau (15)	Portmanteau (15)	230.0 {0.66}	LM(15)	220.8 {0.80}
Doornik-Hansen	Doornik-Hansen	598.4 {0}	Lütkepohl	606.93 {0}

* Q(15) y Q2(15) representan los estadísticos Ljung-Box sobre los residuales estandarizados y sus cuadrados. Los estadísticos t aparecen entre paréntesis y los p -valores entre llaves.

la matriz de ponderaciones, la cual esta formada por los vectores propios obtenidos a partir de la matriz de correlaciones de las tasas de cambio, contiene los pesos correspondientes a los cambios individuales de cada tasa de cambio en la respectiva componente principal.¹⁹ Por último, un conjunto de diferentes valores iniciales fueron probados con el fin de garantizar la convergencia en la estimación del modelo BEKK. Los resultados para este modelo indican que los elementos de las matrices **A**, **B** y **C**, tanto dentro como fuera de la diagonal, asociados a las ecuaciones de covarianza condicional son significativos a un nivel del 1 %, lo cual elimina la posibilidad de un modelo BEKK diagonal.

La validez de la especificación de cada uno de los modelos fue probada a partir del análisis de los residuales estandarizados. Los estadísticos de Ljung-Box muestran que no hay evidencia de autocorrelación al rezago 15 en los residuales estandarizados ni en sus cuadrados. Tampoco se encuentran indicios de autocorrelación serial en los productos cruzados entre los residuales y sus cuadrados al rezago 15 en ninguno de los modelos estimados. La versión multivariada para estos contrastes también fue realizada, confirmándose los resultados anteriores. Similarmente, la normalidad de los residuales estandarizados fue probada usando contrastes de Jarque-Bera individuales y pruebas conjuntas de norma-

¹⁹En el Apéndice, tabla 9, aparecen los resultados correspondientes al análisis de componentes principales.

Tabla 4. Resultados de la estimación de modelos O-GARCH*

	O-GARCH(1,1)			
	Componente	Componente	Componente	Componente
	1	2	3	4
c	-0.123 (-2.983)	0.004 (2.304)	0.016 (2.507)	0.003 (2.03)
α_1	0.114 (5.101)	0.024 (4.119)	0.045 (2.960)	0.033 (3.138)
β_1	0.842 (27.513)	0.966 (157.37)	0.913 (34.488)	0.948 (56.719)
Log-verosimilitud	-2994.04	-1732.89	-1553.72	-907.36
Asimetría	0.071	0.099	-0.063	0.198
Curtosis	4.233	4.578	3.644	4.122
Jarque-Bera	103.05 {0}	169.005 {0}	28.817 {0}	94.723 {0}
Q(15)	18.34 {0.24}	9.62 {0.84}	17.91 {0.26}	18.43 {0.24}
Q2(15)	15.81 {0.39}	11.65 {0.68}	10.32 {0.79}	13.76 {0.54}
$\alpha_1 + \beta_1$	0.956	0.99	0.958	0.981
Portmanteau (15)	223.0 {0.63}	LM(15)	229.9 {0.66}	
Doornik-Hansen	600 {0}	Lütkepohl	561.24 {0}	

* Q(15) y Q2(15) representan los estadísticos Ljung-Box sobre los residuales estandarizados y sus cuadrados. Los estadísticos t aparecen entre paréntesis y los p -valores entre llaves.

alidad multivariada, evidenciándose la persistencia de un exceso de curtosis en todos los casos lo cual llevó al rechazo de la hipótesis nula. Los resultados correspondientes a los contrastes de especificación para cada uno de los modelos estimados aparecen en la parte inferior de la respectiva tabla de resultados.²⁰

La figura 2 (Apéndice) contiene las varianzas y las correlaciones tiempo-variantes estimadas en cada uno de los modelos MGARCH para todo el periodo muestral. En general, las correlaciones y volatilidades asociadas a cada uno de los modelos exhiben patrones de comportamiento muy similares; sin embargo, las obtenidas a partir del modelo DCC son ligeramente inferiores y menos volátiles con respecto a las de los otros modelos. Las correlaciones entre las varianzas y covarianzas estimadas por cada modelo son, en general, superiores a 0.90, lo cual también sugiere que los modelos son muy similares entre sí, presentándose las diferencias más grandes entre los modelos DCC y O-GARCH. De otra parte, el rango de variación para la volatilidad de la tasa de cambio del peso con respecto al dólar y a la libra esterlina es ligeramente más amplio comparado con el respectivo a las otras tasas de cambio. En conclusión, aunque claramente las matrices de covarianza condicional estimadas a partir de cada uno de los modelos son muy cercanas, no es posible tener certeza acerca de

²⁰Es importante aclarar que no es posible atribuir cada residual estandarizado a cada tasa de cambio del peso colombiano con respecto a cada una de las monedas en consideración, ya que estos son una combinación lineal de los residuales específicos de cada tasa de cambio (Klaassen, 1999).

Tabla 5. Resultados de la estimación del modelo BEKK(1, 1, 1)*

	Retorno Dólar	Retorno Euro	Retorno Libra esterlina	Retorno Yen
	0.031 (52.3)	0	0	0
C*	0.026 (187.8)	0.028 (36.0)	0	0
	0.043 (0.12)	0.024 (0.26)	-0.004 (-0.51)	0
	0.010 (0.13)	0.021 (88.8)	0.002 (2.07)	-0.083 (3.47)
	0.425 (25.8)	-0.032 (-30.8)	0.106 (17.0)	-0.038 (-94.1)
A	0.277 (3.69)	0.027 (35.1)	0.154 (10.5)	-0.006 (-0.78)
	0.264 (10.7)	-0.018 (-30.4)	0.246 (35.4)	-0.053 (-12.1)
	0.268 (12.7)	-0.085 (-26.3)	0.153 (15.1)	0.075 (177.2)
	0.894 (4.06)	0.014 (20.0)	-0.037 (-2.37.0)	0.007 (0.01)
B	-0.070 (-16.4)	1.009 (383.4)	-0.043 (-157.4)	-0.002 (-14.5)
	-0.069 (-344.3)	0.014 (51.5)	0.942 (87.2)	0.006 (0.08)
	-0.059 (-162.8)	0.015 (0.34)	-0.032 (-275.3)	0.993 (165.8)
	Q(15)	32.43 {0.05}	8.71 {0.89}	6.13 {0.97}
Q2(15)	11.81 {0.69}	17.16 {0.19}	11.60 {0.70}	16.15 {0.37}
Portmanteau (15)	225.9 {0.73}	LM(15)	218.9 {0.83}	
Doornik-Hansen	328.8 {0}	Lütkepohl	325.9 {0}	

* Los estadísticos t aparecen entre paréntesis y los p -valores entre llaves.

cuál de los modelos se comporta mejor, por lo que se hace necesario comparar la validez empírica de los mismos.

Analizando el comportamiento de cada una de las varianzas y correlaciones se observa que el periodo de mayor volatilidad se presenta en el segundo semestre de 1999 como resultado, entre otros factores, de las presiones contra la banda cambiaria antes de su desmonte el 25 de septiembre del mismo año. Los periodos restantes de mayor volatilidad corresponden, en general, a mayores presiones devaluacionistas o revaluacionistas del peso con respecto al dólar, lo cual se transmitió al resto de los mercados aunque con intensidades diferentes.

La mayor devaluación del peso se presentó en el segundo trimestre del 2002 y se explica, principalmente, por la mayor devaluación nominal del dólar frente a las demás monedas y por la mejora en la percepción riesgo país. Mientras a partir del segundo trimestre de 2003 se presentó un exceso de divisas que corrigió la tendencia de la tasa de cambio hacia la revaluación, generándose principalmente un exceso de volatilidad en el primer trimestre del 2005 resultado de la ratificación del Banco de la República de intervenir de manera discrecional en el mercado cambiario, en general, en todo el periodo en estudio se observó la intervención del Banco de la República a través de los instrumentos de intervención comunes bajo un régimen de flotación (subastas de opciones *put* y *call* para el control de la volatilidad) con el fin de contener las distintas presiones del mercado.

4. Comparación de la validez empírica de los modelos MGARCH a partir de contrastes basados en la medida VaR

En esta sección se compara la validez empírica de cada uno de los modelos MGARCH estimados anteriormente, a partir dos contrastes calculados con base en la medida de valor en riesgo. En términos generales, esta medida es un indicador de los puntos extremos dentro de los cuales fluctúa la rentabilidad de una inversión en un activo o en un determinado portafolio, mostrando el máximo valor que se podría perder (ganar), con probabilidad $\alpha(1 - \alpha)$ sobre un horizonte de tiempo l , como consecuencia de los cambios en los precios de mercado. La importancia financiera de esta medida radica en su utilidad como herramienta de cuantificación del riesgo de mercado y como instrumento de regulación, dado que el entorno en el que se desenvuelve la actividad financiera se caracteriza por grandes fluctuaciones de los precios de los activos financieros, motivadas por cambios en tasas de cambio y tasas de interés. De otra parte, la medida VaR es una aplicación natural de los modelos de volatilidad ya que depende directamente del pronóstico de la varianza condicional; en consecuencia, la estimación de la distribución condicional de los retornos se constituye en el principal insumo para la aplicación de esta metodología.²¹

A partir de la distribución condicional del vector de retornos,

$$\mathbf{y}_t | \mathfrak{S}_{t-1} \sim N(\boldsymbol{\mu}_t, \mathbf{H}_t)$$

donde $\boldsymbol{\mu} = E(\mathbf{y}_t | \mathfrak{S}_{t-1})$ y \mathbf{H}_t está especificada apropiadamente a partir de alguno de los modelos estimados en la sección anterior, el VaR para un portafolio compuesto por N activos en un horizonte de tiempo l , con probabilidad

²¹Desde su introducción en 1996 por J. P. Morgan, la medida VaR ha generado un masivo interés entre los analistas financieros convirtiéndose en la medida estándar para cuantificar el riesgo de mercado. En Colombia, la Superintendencia Bancaria, a partir de 1996, viene actualizando su normatividad con el fin de incorporar los aspectos más relevantes de los estándares internacionales en materia de medición, control y gestión de riesgos de mercado. En consecuencia, desde el año 2000 se supervisa el riesgo de mercado a través del cálculo del VaR, con el objeto de que las instituciones financieras mantengan en todo momento un monto de capital adecuado que corresponda con los niveles de riesgo que asumen.

α , está definido como

$$\text{VaR}_{pt} = (\mathbf{VaR}'_t \mathbf{R}_t \mathbf{VaR}_t)^{1/2}, \quad (5)$$

donde $\mathbf{VaR}_t = (VaR_{1t}, \dots, VaR_{Nt})'$ con $VaR_{it} = (\mu_{it} + z_\alpha H_{iit}^{1/2}) w_i$, donde w_i representa el monto invertido en el i -ésimo activo y z_α el cuantil izquierdo a un nivel de confianza de α % asumiendo normalidad. En este caso, se asume una posición financiera larga (cola izquierda en la distribución de los retornos) en la cual se sufre una pérdida cuando $y_{it} < 0$; en consecuencia, un valor pequeño de α implica una pérdida para el inversionista (Tsay, 2002).²² De acuerdo con los resultados de la sección anterior, se encontró que, por ejemplo, el VaR asociado al modelo CCC para un portafolio equiponderado y uno de mínima varianza es igual a 35.7 % y 29 %, respectivamente. Estos valores indican que la máxima pérdida esperada, con una probabilidad del 95 % y en un horizonte de un día, no supera este porcentaje dado el monto invertido. Es importante mencionar que diferentes metodologías, condicionales e incondicionales, para el cálculo del VaR y medidas más elaboradas de éste, como el VaR autoregresivo condicional CAViaR de Engle y Manganelli (2004), han sido propuestas en la literatura.²³

Con el fin de evaluar la validez empírica de los modelos antes estimados, se computó la proporción de fallo %HIT(α), definida como

$$\%HIT(\alpha) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T I(y_t < \text{VaR}_t(\alpha)) * 100$$

donde $I(y_t < \text{VaR}_t(\alpha))$ es una variable indicadora que toma el valor de 1 cuando $y_t < \text{VaR}_t(\alpha)$. Un modelo está correctamente especificado cuando esta proporción es igual a la probabilidad α pre-especificada para el VaR. Adicionalmente, se computó el contraste de cuantil dinámico propuesto por Engle y Manganelli (2004). En este contraste se prueba la hipótesis nula conjunta de $E(\%HIT(\alpha)) = 0$ e *incorrelación del HIT_t(α) con las variables incluidas en el conjunto de información*, a partir del siguiente estadístico de prueba el cual distribuye asintóticamente como una χ^2 con k (número de variables incluidas en la matriz \mathbf{X}) grados de libertad:

$$DQ = \frac{\hat{\mathbf{c}}' \mathbf{X}' \mathbf{X} \hat{\mathbf{c}}}{\alpha(1 - \alpha)} \stackrel{a}{\sim} \chi^2(k), \quad (6)$$

donde $\hat{\mathbf{c}}$ es el vector de coeficientes estimados a partir de la regresión artificial

$$\text{HIT}_t(\alpha) = c_0 + c_1 \text{HIT}_{t-1}(\alpha) + \dots + c_r \text{HIT}_{t-r}(\alpha) + c_{r+1} \text{VaR}_t(\alpha) + \nu_t = \mathbf{X}\mathbf{c} + \nu_t,$$

²²Un inversionista mantiene una posición larga si compra un activo, en cuyo caso incurre en el riesgo de que su activo pierda valor, i.e., $y_t < 0$; por el contrario, mantiene una posición corta cuando vende un activo, incurriendo en un costo de oportunidad si el activo incrementa su valor, i.e., $y_t > 0$.

²³Duffie y Pan (1997), Manganelli y Engle (2001), Pearson (2002) y Tsay (2002) ofrecen un resumen completo de las diferentes aproximaciones para el cálculo del VaR. Algunos trabajos que han empleado la medida VaR en Colombia han sido Melo y Becerra (2005), y Cardozo (2004).

donde $\text{HIT}_t(\alpha) = I(y_t < \text{VaR}_t(\alpha)) - \alpha$. En este caso, el no rechazo de la hipótesis nula arroja evidencia de un modelo correctamente especificado. Es importante anotar que dado que la matriz de covarianza condicional se estimó usando el método de estimación robusto de cuasi-máxima verosimilitud QML, lo cual garantiza la consistencia de los parámetros aun cuando el supuesto de normalidad multivariada no se cumpla, es válido utilizar este contraste.

En la tabla 6 se reportan los resultados correspondientes a la proporción de fallo $\% \text{HIT}(\alpha)$ y al contraste de cuantil dinámico calculados a partir de cada uno de los diferentes modelos MGARCH, para cada uno de los retornos de las tasas de cambio y para dos portafolios de moneda extranjera. En el primer portafolio se utilizaron ponderaciones iguales para cada una de las monedas ($w_i = 0.25$, $i = 1, \dots, 4$), mientras en el segundo las ponderaciones, w_i , se eligieron con base en el criterio de portafolio de mínima varianza. En este caso, las ponderaciones tiempo-variantes se calcularon como $w_t = \mathbf{H}_t^{-1} \boldsymbol{\nu} / C_t$, donde $C_t = \boldsymbol{\nu}' \mathbf{H}_t^{-1} \boldsymbol{\nu}$ e $\boldsymbol{\nu}$ es un vector $k \times 1$ de unos, (Engle y Sheppard, 2001). Adicionalmente, los resultados son comparados con los obtenidos utilizando el modelo básico RiskMetrics este es un nombre propio para el cálculo de las varianzas y covarianzas condicionales como uno de los más empleados por su simplicidad. Este es equivalente a un GARCH integrado IGARCH(1,1) (*Integrated GARCH*) sin intercepto y donde el parámetro autoregresivo (también parámetro de suavizamiento) toma un valor fijo de 0.94 para datos diarios, cuya especificación multivariada esta dada por $\mathbf{H}_t = (0.06)\boldsymbol{\epsilon}_t \boldsymbol{\epsilon}_t' + (0.94)\mathbf{H}_{t-1}$.

Los resultados indican, en primer lugar, que la proporción de fallo para cada uno de los modelos está, en general, por debajo de su respectivo nivel α , es decir, los modelos tienden a subestimar el número de violaciones del $\text{VaR}_t(\alpha)$, excepto para el caso del 1%. Sin embargo, los modelos que más se aproximan al valor α pre-especificado son el DCC_E y el CCC, seguidos por el BEKK. En segundo lugar, los resultados del contraste de cuantil dinámico, incluyendo 10 rezagos para el $\text{HIT}_t(\alpha)$ en la regresión auxiliar, indican que los modelos DCC_E , CCC y BEKK parecen estar correctamente especificados al no existir evidencia de correlación serial; sin embargo, el modelo CCC no falla en el no rechazo de la hipótesis nula en ninguno de los casos, mientras el modelo DCC_E falla en el caso del portafolio equiponderado para los niveles del 1% y 5%, y el BEKK falla, además, en los casos de los retornos del euro y la libra esterlina en los niveles del 1% y 5%, respectivamente. De otra parte, es notable el pobre desempeño del RiskMetrics al rechazarse para este la hipótesis nula, con p -valores muy por debajo de 0.05, en 5 de los 6 casos presentados en la tabla 6 para al menos dos niveles de confianza en cada caso. Adicionalmente, los resultados para el portafolio de mínima varianza fueron mejores que los obtenidos para el portafolio equiponderado con respecto a este contraste. Este resultado evidencia la importancia de la elección del portafolio.

En conclusión, encontramos que aunque los resultados para los modelos DCC_E , CCC y BEKK son muy cercanos, el número de violaciones al VaR es superior en la mayoría de los casos al encontrado a partir del modelo CCC e igualmente con este modelo se encuentra más evidencia de correlación entre

Tabla 6. Resultados para %HIT(α) y contraste de cuantil dinámico*

	%HIT(α)			Contraste de cuantil dinámico		
	1%	2.5%	5%	1%	2.5%	5%
Retorno Dólar						
BEKK	0.94	2.62	4.18	0.5579	0.3736	0.2477
DCC _E – CCC	1.06	2.56	4.62	0.8923	0.5379	0.5619
O-GARCH	0.94	1.87	3.31	0.0000	0.0370	0.0049
RiskMetrics	2.00	3.18	5.18	0.0000	0.0000	0.0001
Retorno Euro						
BEKK	1.75	2.99	5.12	0.0428	0.2581	0.3387
DCC _E – CCC	1.25	3.12	4.99	0.6156	0.5516	0.8651
O-GARCH	1.87	3.24	5.61	0.0008	0.0095	0.2000
RiskMetrics	1.81	3.49	5.74	0.0196	0.0054	0.0479
Retorno Libra esterlina						
BEKK	1.43	2.50	3.99	0.5699	0.1892	0.0337
DCC _E – CCC	1.43	2.44	4.05	0.4904	0.9954	0.2760
O-GARCH	1.56	2.50	4.43	0.5465	0.5875	0.0710
RiskMetrics	1.75	3.12	4.74	0.0115	0.0172	0.0714
Retorno Yen japonés						
BEKK	0.87	2.25	3.99	0.6159	0.1563	0.2079
DCC _E – CCC	0.75	2.50	4.05	0.4923	0.2386	0.4214
O-GARCH	0.81	1.75	3.74	0.0001	0.0054	0.1385
RiskMetrics	1.75	2.93	5.18	0.0000	0.0106	0.0000
Portafolio equiponderado						
BEKK	1.31	2.25	4.12	0.0450	0.7203	0.0618
DCC _E	1.19	2.25	3.12	0.0390	0.1723	0.0000
CCC	1.31	2.18	3.87	0.0630	0.1499	0.0567
O-GARCH	1.31	2.18	3.87	0.0700	0.5370	0.0003
RiskMetrics	1.43	3.06	5.18	0.0296	0.0406	0.0437
Portafolio de mínima varianza						
BEKK	1.31	2.49	4.37	0.1401	0.4510	0.4085
DCC _E	1.68	2.49	5.18	0.1427	0.2019	0.8326
CCC	1.87	2.49	5.30	0.1514	0.4857	0.7010
O-GARCH	1.19	2.43	3.68	0.0111	0.3325	0.2563
RiskMetrics	2.43	4.12	5.99	0.0000	0.0002	0.0019

* p -valores para diferentes niveles de confianza.

el $HIT_t(\alpha)$ y el conjunto de información, incluyendo rezagos del mismo. Por último, la elección de este modelo indica, además, la importancia de no obviar la integración de los mercados financieros, ya que esto puede conducir a la toma de decisiones de inversión no eficientes; aunque en este ejercicio particular no parece tan clara la necesidad de incluir la información de otros mercados cambiarios cuando se toman decisiones de inversión en solo una de las cuatro monedas analizadas, excepto en el caso de los retornos de la libra esterlina y el euro, con una correlación condicional cruzada del 79%.

5. Conclusiones

En este trabajo se estimaron diferentes modelos MGARCH con el fin de modelar la distribución condicional para los retornos diarios de la tasa de cambio

nominal del peso colombiano con respecto al dólar americano, el euro, la libra esterlina y el yen japonés. Los resultados validan la importancia de realizar análisis multivariados para los retornos dado que con este tipo de especificaciones para la matriz de covarianza condicional es posible estimar las correlaciones cruzadas dinámicas que pueden existir entre estos, las cuales se constituyen en un factor crucial para la determinación de ganancias obtenidas a partir de la diversificación de un portafolio conformado por moneda extranjera.

Por otro lado, la validez empírica de los modelos MGARCH estimados fue comparada a partir de la proporción de fallo de la variable $HIT(\alpha)$ y el contraste de cuantil dinámico de Engle y Manganelli (2004) el cual se construye con base en la medida VaR. De acuerdo con los resultados, el modelo cuya especificación parece acercarse mejor al verdadero proceso multivariado seguido por los datos es el CCC. Esta elección se basó en el mejor desempeño condicional e incondicional del modelo, al no rechazarse la hipótesis nula del contraste de cuantil dinámico en todos los casos y al subestimar menos que los otros modelos el número de violaciones al VaR, respectivamente. Este modelo, adicionalmente, satisface las diferentes pruebas de especificación llevadas a cabo sobre el mismo. Es importante anotar que Bollerslev (1990) también encuentra evidencia a favor de un modelo CCC para las tasas de cambio de ocho países miembros de la Comunidad Económica Europea con respecto al dólar americano.

Por último, aunque los cálculos de la medida VaR se hicieron basados en estimaciones robustas para los diferentes modelos, sería importante comparar los resultados a partir de medidas VaR con distribuciones de colas gruesas, por ejemplo, empleando la teoría de valor extremo. Igualmente, sería interesante explorar los resultados de modelar la media y varianza condicionales en un contexto multivariado considerando la posibilidad de la presencia de estados o regimenes de la tasa de cambio, dada la evidencia empírica encontrada a favor de la existencia de los mismos. Así mismo, resultados interesantes pueden ser hallados a partir de la comparación de los resultados de modelos MGARCH con medidas alternativas de volatilidad, como los modelos de volatilidad estocástica y de volatilidad realizada multivariada.

Referencias

- Alexander, C., Chibumba, A. (1997). Multivariate orthogonal factor GARCH. Discussion Papers in Mathematics, University of Sussex.
- Baillie, R., Bollerslev, T. (1989). "Message in daily exchange rates: a conditional-variance tale". *Journal of Business and Economic Statistics* 7, 60–68.
- Baillie, R., Bollerslev, T. (1991). "Intra-day and inter-market volatility in foreign exchange rates". *The Review of Economic Studies* 58, 565–585.
- Bauwens, L., Laurent, S., Rombouts, J. V. K. (2006). "Multivariate GARCH models: a survey". *Journal of Applied Econometrics* 21, 79–109.
- Bera, A. K., Higgins, M. L. (1993). "ARCH models: properties, estimation and testing". *Journal of Economic Surveys* 7, 305–362.

- Bera, A. K., Kim, S. (2002). "Testing constancy of correlation and other specifications of the BGARCH model with an application to international equity returns". *Journal of Empirical Finance* 9, 171–175.
- Bollerslev, T. (1990). "Modeling the coherence in short-run nominal exchange rates: a multivariate generalized ARCH model". *Review of Economic and Statistics* 72, 498–505.
- Bollerslev, T., Chou, R., Kroner, K. (1992). "ARCH modeling in finance: a review of the theory and empirical evidence". *Journal of Econometrics* 52, 5–59.
- Bollerslev, T., Engle, R., Nelson, D. (1994). ARCH models. En MacFadden, D. F., Engle, R. E. (Eds.), *Handbook of Econometrics*, Vol. 4. North-Holland: Amsterdam.
- Bollerslev, T., Wooldridge, J. (1992). "Quasi maximum likelihood estimation and inference in dynamic models with time varying covariances". *Econometric Review* 11, 143–172.
- Cardozo, P. (2005). "Valor en riesgo de los activos financieros colombianos aplicando al teoría de valor extreme". *Borradores de Economía* 304. Banco de la República.
- Corbae, D., Ouliaris, S. (1986). "Robust test for unit root in the foreign exchange market". *Economics Letters* 22, 375–380.
- Diebold, F., Nerlove, M. (1989). "The dynamics of exchange rate volatility: a multivariate latent factor ARCH model". *Journal of Applied Econometrics* 4, 1–21.
- Duffie, D., Pan, J. (1997). "An overview of value-at-risk". *The Journal of Derivatives* Spring, 7–49.
- Engle, E. (1982). "Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation". *Econometrica* 50, 987–1008.
- Engle, R. (2002). "Dynamic conditional correlation: a simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models". *Journal of Business and Economic Statistics* 20, 339–350.
- Engle, R., Kroner, K. (1995). "Multivariate simultaneous generalized ARCH". *Econometric Theory* 11, 122–150.
- Engle, R., Manganelli, S. (2004). "CAViaR: conditional autoregressive value at risk by regression quantiles". *Journal of Business & Economic Statistics* 22, 367–381.
- Engle, R., Patton, A. (2001). "What good is a volatility model?" *Quantitative Finance* 1, 237–245.
- Engle, R., Sheppard, K. (2001). Theoretical and empirical properties of dynamic conditional correlation multivariate GARCH. Discussion Paper No. 15, Department of Economics, UCSD.

- Engle, R., Ito, T., Lin, W. (1990a). "Meteor showers or heat waves? Heteroskedastic intra-daily volatility in the foreign exchange market." *Econometrica* 58, 525–542.
- Fama, E. (1965). "The behavior of stock-market prices". *The Journal of Business* 38, 34–105.
- Gallón, S., Gómez, K. (2006). *Un revisión actualizada de modelos de volatilidad condicional univariados y multivariados*. Mimeo.
- Ghysels, E., Harvey, A., Renault, E. (1996). Stochastic Volatility. En Maddala, G. S., Rao, C. R., Vinod, H. D., (Eds.), *Handbook of Statistics*, Vol. 14: statistical methods in finance. North-Holland: Amsterdam: 119–91.
- Hsieh, D. (1988) "Statistical properties of daily exchange rates: 1974-1983". *Journal of International Economics* 24, 129–145.
- Hsieh, D. (1989a). "Testing for nonlinear dependence in daily foreign exchange rates". *The Journal of Business* 62, 339–368.
- Hsieh, D. (1989b). "Modeling heteroscedasticity in daily foreign exchange rates". *Journal of Business and Economic Statistics* 7, 307–317.
- Klaassen, F. (1999). Have exchange rates become more closely tied?: evidence from a new multivariate GARCH model. Discussion Paper No. 10, Center for Economic Research, Tilburg University.
- Malik, A. K. (2005). "European exchange rate volatility dynamics: an empirical investigation". *Journal of Empirical Investigation* 12, 187–215.
- Mandelbrot, B. (1963). "The v Variation of certain speculative prices". *The Journal of Business* 36, 394–419.
- Manganelli, B., Engle, R. (2001). Value at risk models in finance. Working Paper Series 75, European Central Bank.
- Meese, R. A., Singleton, K. J. (1982). "On unit roots and empirical modeling of exchange rates". *Journal of Finance* 37, 1029–1054.
- Melo, L. F., Becerra, O. R. (2006). "Una aproximación a la dinámica de las tasas de interes de corto plazo en Colombia a través de modelos GARCH multivariados". *Borradores de Economía* 366, Banco de la República.
- Melo, L. F., Becerra, O. R. (2005). "Medidas de riesgo, características y técnicas de medición: una aplicación del VAR y el ES a la tasa interbancaria de Colombia". *Borradores de Economía* 343, Banco de la República.
- Milhøj, A. (1987) "A conditional variance model for daily deviations of an exchange rate". *Journal of Business and Economic Statistics* 5, 99–103.
- Pearson, N. (2002). "What's new in value at risk?: a selective survey". En Choi, J. J., Powers, M. R. (Eds.), *Global Risk Management: Financial Operational and Insurance Strategies; International Finance Review* 3. Elsevier; 15–37.
- Samuelson, P. (1965). "Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly". *Industrial Management Review* 6, 41–49.

Tsay, R. (2005). *Analysis of financial time series*, 2a. ed. Wiley Series in Probability and Statistics.

Vlaar, P., Palm, F. (1993). "The message in weakly exchange rates in the European monetary system: mean reversion, conditional heteroscedasticity and jumps". *Journal of Business and Economic Statistics* 11, 351-360.

Apéndice

Tabla 7. Resultados de las pruebas de raíz unitaria*

Variable	Dickey-Fuller (sin incluir tendencia determinística)	Phillips- Perron	KPSS	Variable	Phillips- Perron
Log(Peso/Dólar)	-3.070	-3.030	3.921	Retorno Dólar	-32.15
Log(Peso/Euro)	-0.791	-0.763	4.423	Retorno Euro	-37.00
Log(Peso/Libra)	1.523	1.535	4.473	Retorno Libra	-36.19
Log(Peso/Yen)	-2.117	-2.118	3.615	Retorno Yen	-38.93

* Los valores de los respectivos estadísticos son los que se reportan en la tabla. Los valores críticos para un nivel de significancia del 1 % son -3.43 y 0.739.

Tabla 8. Matrices de correlación cruzada incondicional de los retornos

Rezago	Variable	Retorno Dólar	Retorno Euro	Retorno Libra	Retorno Yen
0	Retorno Dólar	1			
	Retorno Euro	0.5963*	1		
	Retorno Libra	0.6746*	0.8065*	1	
	Retorno Yen	0.5786*	0.5522*	0.5680*	1
1	Retorno Dólar	0.2030*	0.1531*	0.1667*	0.1215*
	Retorno Euro	0.0910*	0.0777*	0.0992*	0.0514
	Retorno Libra	0.1013*	0.0610*	0.0971*	0.0348*
	Retorno Yen	0.0742*	0.0308*	0.0622	0.0272
2	Retorno Dólar	-0.0913*	-0.0599	-0.0655	-0.0883
	Retorno Euro	-0.0305*	-0.0231	0.0024*	-0.0333
	Retorno Libra	-0.0507*	-0.0409	-0.0497	-0.0641
	Retorno Yen	-0.0379*	-0.0414	-0.0333*	-0.0472

* Coeficientes de correlación significativos a un nivel de significancia del 5 %.

Tabla 9. Análisis de componentes principales para los retornos

	Componentes principales			
	1	2	3	4
Valor propio	2.8454	0.5392	0.4234	0.1893
Proporción de varianza	0.7118	0.1349	0.1059	0.0473
Proporción acumulada	0.7118	0.8467	0.9526	1
Variable	Vectores propios			
	1	2	3	4
Dólar	0.4894	0.1740	-0.8349	0.1818
Euro	0.5159	-0.4635	0.3436	0.6330
Libra esterlina	0.5343	-0.3797	0.0703	-0.7518
Yen japonés	0.4568	0.7814	0.4240	-0.0303

Tabla 10. Matriz de correlación cruzada estimada a partir de un modelo CCC*

Variable	Retorno Dólar	Retorno Euro	Retorno Libra	Retorno Yen
Retorno Dólar	1			
Retorno Euro	0.51899 (1381.6)	1		
Retorno Libra	0.59004 (1809.3)	0.78497 (6341.6)	1	
Retorno Yen	0.50265 (1116.8)	0.51763 (1048.6)	0.52019 (1135.6)	1

* Los estadísticos t aparecen entre paréntesis.

Figura 1. Tasas de cambio y sus retornos

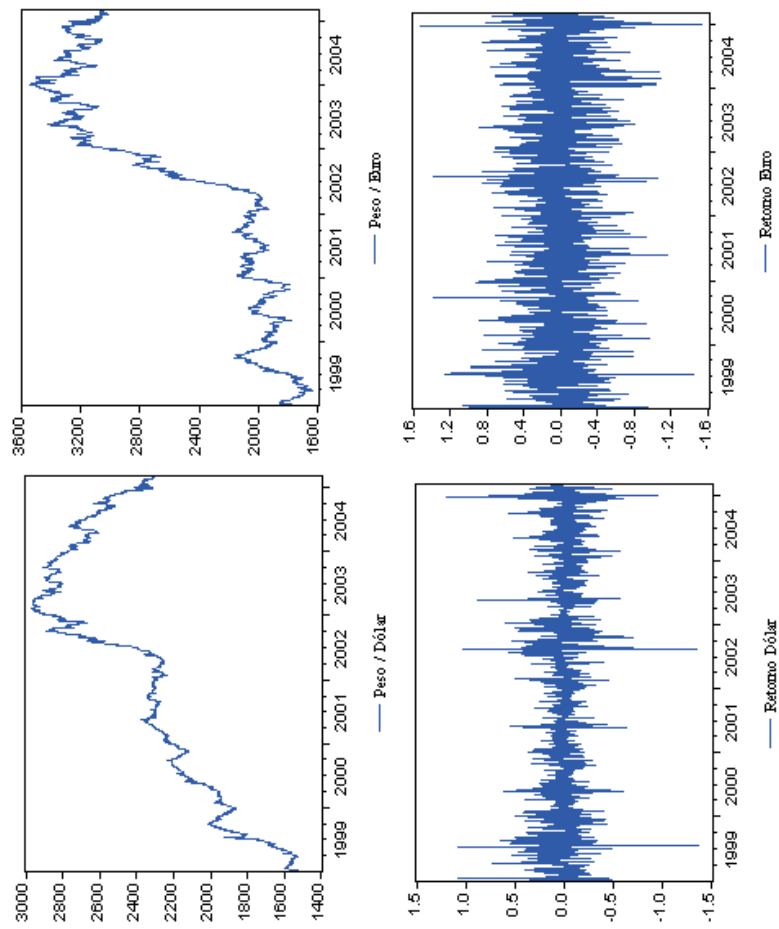


Figura 1. Tasas de cambio y sus retornos (continuación)

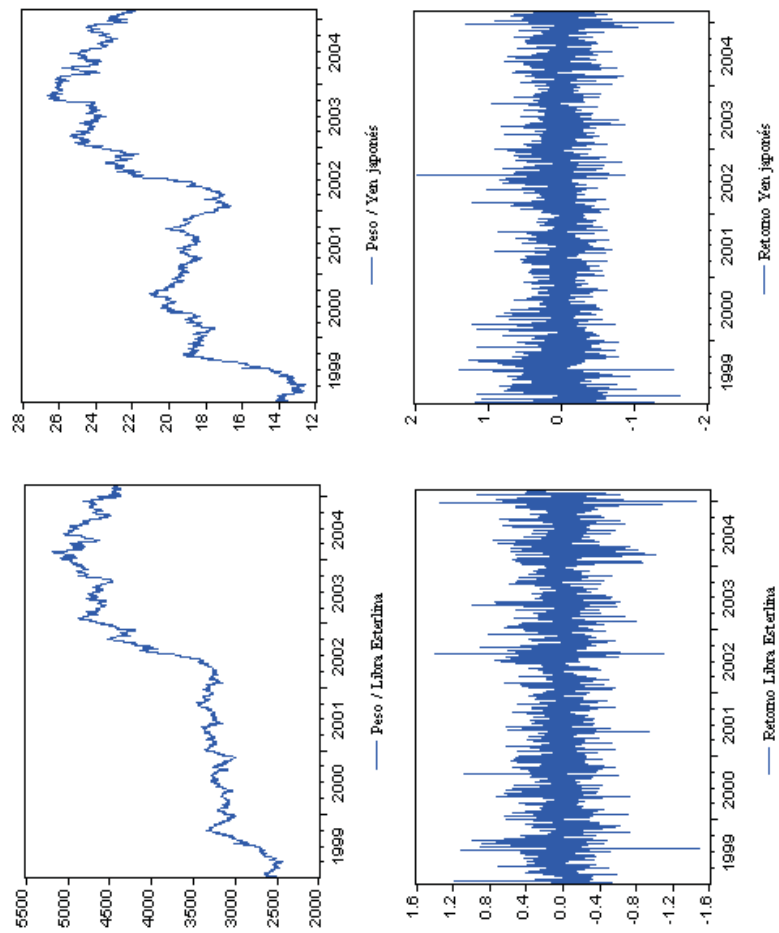


Figura 2. Varianzas y correlaciones condicionales estimadas (varianzas)

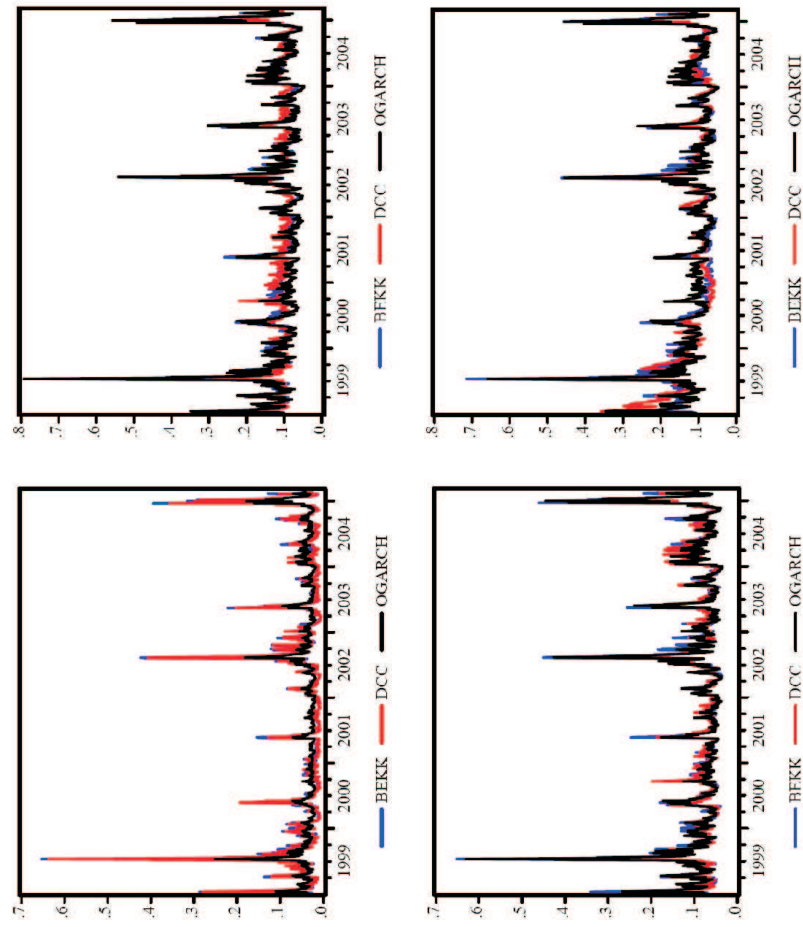


Figura 2. Varianzas y correlaciones condicionales estimadas (correlaciones)

