La modelación e interpretación del enfriamiento en libros de texto de matemática para secundaria y universidad: unas consideraciones críticas

EDVCATIO PHYSICORVM
QVO NON ASCENDAM?

Honorina Ruiz-Estrada, Wendy Loraine De León Zamora,

Josip Slisko, Juan Nieto-Frausto

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México.

E-mail: hruizestrada@gmail.com

(Recibido el 10 de junio de 2019, aceptado el 20 de agosto de 2019)

Resumen

En este trabajo se analiza el uso de los cambios de temperatura (enfriamiento) en problemas matemáticos de libros de texto del nivel secundario (México) y universitario (Estados Unidos de América y Canadá). Se presenta una evidencia experimental que pone en entredicho las supuestas situaciones reales que se exponen en aquellos documentos, evidenciando que el uso inapropiado del fenómeno de enfriamiento no es un síndrome mexicano sino que podría ser una "cultura global" que requiere más atención de la comunidad internacional dedicada a la educación matemática. Se incluye una discusión de las implicaciones negativas que pueden llegar a tener el uso inapropiado de este contexto en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

Palabras clave: enfriamiento, ley de enfriamiento, modelación, libros de texto de matemáticas.

Abstract

This paper analyzes the use of temperature changes (cooling) in mathematical problems of textbooks of the secondary level (Mexico) and university level (United States of America and Canada). An experimental evidence is presented that calls into question the supposed real situations that are exposed in those documents, showing that the inappropriate use of the cooling phenomenon is not a Mexican syndrome but it could be a "global culture" that requires more attention from the international community dedicated to education mathematics. A discussion of the negative implications that may have the inappropriate use of this context in the teaching and learning of mathematics is included.

Keywords: cooling, law of cooling, modelling, mathematics textbooks.

PACS: 01.65.+g, 01.40.-d, **ISSN 1870-9095**

I. INTRODUCCIÓN

En las dos últimas décadas se ha promovido en la literatura el aprendizaje de la matemática escolar en contextos del mundo real para involucrar más a los estudiantes y darles mayor sentido a las tareas y actividades matemáticas [1, 2].

Por ejemplo, Lingefjärd [3] propone la siguiente actividad de medición y modelación: "se les puede sugerir a los estudiantes traer una taza de café a la clase después del almuerzo y dado un termómetro de un laboratorio de química, monitorear el enfriamiento del café en la taza". De observaciones experimentales se sabe que (hasta una aproximación "satisfactoria") la derivada de la temperatura de un objeto con el tiempo sucede a un ritmo proporcional a su temperatura relativa. Es decir, la diferencia entre su temperatura y la del ambiente. Este enunciado se conoce como Ley de enfriamiento de Newton. Con las herramientas de ajuste de curvas de hoy en día, no es difícil encontrar un modelo matemático adecuado, aunque se requiere de conocimientos mínimos de cálculo diferencial e integral, para entender por qué una exponencial decreciente es la mejor opción para el conjunto de los datos medidos.

Desafortunadamente, como se verá pronto, la parte experimental, propuesta por Lingefjärd, no se ejerce y los datos se presentan de manera arbitraria.

Los fenómenos de calentamiento y enfriamiento de sustancias han sido usados, también, en libros de texto de matemática de la Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos (CONALITEG). En los libros del nivel secundario, se desarrollan ejemplos y se proponen problemas matemáticos en los que se expone la enseñanza y el aprendizaje de la variación lineal, la cuadrática y la exponencial. De mantera similar, en el ámbito internacional, algunos autores de libros de pre-cálculo [4, 5] han utilizado el fenómeno del enfriamiento para introducir a los alumnos al estudio de la función exponencial, el concepto de límite lateral y asíntota horizontal. Otros autores se han ocupado de la modelación matemática [6]. Korsunsky [7] ha sugerido que los problemas matemáticos en contextos, que no se apegan a la situación real, pueden influir negativamente en la enseñanza y el aprendizaje. Él propone que los problemas matemáticos contextualizados deben ser auto-consistentes, sin que por ello, se requiera que el maestro de matemáticas sea un experto en física y que el estudiante esté enterado de temas de física que van más allá de los conocimientos inherentes al nivel escolar correspondiente. Desde este punto de vista, es acertado usar el fenómeno de enfriamiento, porque el único conocimiento extra-matemático requerido es que, la sustancia que se enfría, en algún instante alcanzará la temperatura de su medio ambiente (equilibrio térmico). Este conocimiento proviene de la experiencia cotidiana, no requiere un conocimiento basto de las leyes de la termodinámica. Por lo general, en los problemas matemáticos contextualizados en la temperatura, se proporcionan tablas de datos o gráficos que provienen de una situación experimental, según los autores. Sin embargo, tales datos parecieran ser inventados porque se desatienden aspectos físicos inherentes al fenómeno de enfriamiento y más bien se atienen a las predicciones de la ley de enfriamiento de Newton. En efecto, la temperatura de la sustancia que se enfría (en un medio ambiente dado) no puede disminuir indefinidamente, ni en algún momento comenzar a incrementarse, porque una vez que se alcanza el equilibrio térmico, desaparece el flujo neto de calor que permite su decremento. Además, para medir la temperatura de una sustancia se usa un termómetro con una resolución apropiada. Por ejemplo, los termómetros clínicos suelen tener una resolución de un grado y trabajar en un rango de 35 a 42 grados Celsius. En los laboratorios de física se usan termómetros digitales que trabajan en un rango de -50℃ a 300℃ y permiten mediciones con una resolución de 0.1°C.

Una vez que la diferencia de temperaturas (entre la sustancia y su medio ambiente) cae en el rango de resolución del termómetro, ya no es detectable. En lo que sigue, iniciamos discutiendo la ley de enfriamiento de Newton. En la tercera sección, ejemplificamos el uso del fenómeno de enfriamiento en libros de texto de matemáticas del nivel secundario de México. Presentamos varios ejemplos paradigmáticos de problemas matemáticos propuestos en libros de texto de la CONALITEG. Omitimos los datos de los libros de texto en cuestión. En la cuarta sección se presenta un ejemplo de un libro canadiense y en la quinta se dan dos ejemplos de libros de texto estadounidenses. De los ejemplos previos se escogen tres, que se discuten en la sexta sección, comparando los supuestos datos experimentales de tales ejemplos con la predicción de la ley de enfriamiento de Newton.

II. LA LEY DE ENFRIAMIENTO DE NEWTON

Se obtiene un acuerdo exacto, lo que no deja de sorprender. La sección concluye con la presentación de los datos experimentales propios del enfriamiento de una taza de café y su discusión en términos de la ley de enfriamiento y de algunos ejemplos presentados en este documento.

El enfriamiento de una sustancia en un medio ambiente que se mantiene a una temperatura fija, T_a, suele modelarse a través de la ley de enfriamiento de Newton, que es una expresión para su temperatura T como función del tiempo de enfriamiento t,

$$\Delta T(t)=T(t)-T_a=c\ \exp\{-t/\tau\}, \qquad (1)$$

donde los parámetros c y τ dependen (principalmente) de la naturaleza de la sustancia que se enfría, de que tan aislante es el material del contenedor y de la temperatura T_a. Observe que $\Delta T(t_1)$=c $\exp\{-t_{1/\tau}\}$ es la diferencia inicial de temperaturas entre el material y el ambiente. En lo que sigue, denotamos a $T(t_i)$ por el símbolo T_i.

Para ajustar los datos experimentales a la ley de enfriamiento, se consideran los dos primeros pares de datos. Se obtiene:

$$c=r^{\gamma}\ \Delta T(t_1), \qquad (2)$$

$$\tau=((t\_2-t\_1\ ))⁄\ln[r], \qquad (3)$$

$$\gamma=t\_1⁄((t\_2-t\_1), \qquad (4)$$

dónde:

$$\mathrm{r}=\Delta T\ (t\_1\ )⁄\Delta T(t\_2\ ). \qquad (5)$$

Cuando el tiempo transcurrido es justamente $t=\tau$, la diferencia inicial de temperatura, $\Delta T(t\_1)$, se modifica por el factor, [exp$\{t_1/\tau\}$⁄((número e))]. Observe que, sin cambiar la naturaleza de la sustancia que se enfría, no es lo mismo que el contenedor sea de metal, de cerámica, o de poliestireno, y esto se refleja en la magnitud del tiempo característico, τ. La ley de enfriamiento de Newton no tiene por qué describir el enfriamiento de cualquier sustancia, y difícilmente, de manera puntual, como sucede en ejemplos desarrollados en algunos libros de texto de matemáticas, como se evidencia más adelante.

III. ALGUNOS EJEMPLOS DE LIBROS DE TEXTO DE MATEMÁTICA DE LA CONALITEG

En los libros de texto de matemática de la CONALITEG, se han usado con frecuencia los contextos de física para implementar la enseñanza de los números enteros, la razón, la proporcionalidad directa e inversa, la variación lineal, la cuadrática, la exponencial, ente otras. En particular, se enfría agua, tazas de café, platos de sopa o refrescos embotellados que se colocan en un medio ambiente que está a temperatura menor. También, se calientan sustancias como el hielo y aislantes térmicos, entre otras. Es importante destacar que, n estos libros, indistintamente del año de publicación, cada lección se divide en tres etapas. En la primera se presenta una actividad que invita al estudiante a revisar sus conocimientos previos y a reflexionar sobre posibles formas de resolverla.
En la segunda, se dan definiciones formales de conceptos matemáticos y se proponen ejercicios grupales o individuales

sobre el tema estudiado. Y en la tercera y última etapa, se propone una situación problema que desafíe al estudiante a aplicar todo lo visto en la lección, usando preferiblemente contextos de la vida cotidiana.

Por ejemplo, en un libro de texto de primero de secundaria, publicado en el 2018, se plantea el aprendizaje de la función lineal usando el enfriamiento de un plato de sopa muy caliente en un ambiente a 20°C; el problema debe resolverse individualmente. En la Fig. 1 se da la transcripción literal de este problema.

La tabla representa la temperatura de un plato de sopa conforme pasa el tiempo.

h(min)	*1*	*10*	*20*	*30*	*40*	*50*	*60*
T(°C)	*100*	*34.2*	*22.5*	*20.4*	*20.1*	*20*	*20*

a. ¿Representa la tabla una función lineal? ¿Por qué?_____

FIGURA 1. Problema de un libro de primero de secundaria publicado en el 2018 (Nueva Reforma Educativa).

El libro de texto en cuestión está conformado por tres bloques que corresponden a los tres trimestres escolares avalados por la Nueva Reforma Educativa. El problema, pertenece al tercer trimestre en su secuencia didáctica número 32 referente al contenido "Funciones lineales y no lineales", con el objetivo de distinguir entre funciones lineales y no lineales utilizando distintas representaciones, además de analizar en qué intervalos las funciones son negativas o positivas, crecientes o decrecientes. La secuencia didáctica se divide en dos lecciones: la primera, referente a la comparación de funciones incluyendo la definición de variable dependiente e independiente, y la segunda, relacionada con la función lineal. El problema (vea la Fig. 1) hace parte de la segunda lección y se encuentra ubicado después de los ejemplos y la conceptualización de la función lineal, en la etapa "Punto de llegada", lo que significa que es un problema de profundización del tema; es una oportunidad para practicar lo aprendido. Ahora, de la tabla de la Fig. 1 se observa que los autores usan el símbolo h para el tiempo (comúnmente, reservado para la altura) y que al iniciar el registro de los datos, el plato de sopa estaba a 100°C (temperatura de ebullición del agua al nivel del mar).

También, debe sobreentenderse que el plato de sopa caliente se coloca en un medio ambiente a 20°C, lo que requiere del entendimiento del fenómeno de enfriamiento. Nosotros verificamos que estos datos "experimentales" se apegan exactamente a la ley de enfriamiento de Newton. En particular, esta ley predice τ=5.2 min para el tiempo característico del enfriamiento y $T(\tau)$=55.6℃ para la temperatura correspondiente. Es un proceso de enfriamiento muy rápido; a los 20 minutos, la temperatura de la sopa está a dos grados Celsius de la temperatura ambiente. El plato que la contiene no puede ser de cerámica, sino metálico (aluminio, cobre, hierro), lo que es inesperado. Es evidente que los datos de la tabla en la Fig. 1 no provienen de experimento alguno. El segundo ejemplo pertenece a un libro de texto de segundo de secundaria, publicado en el 2013, el cual debe contestarse individualmente. El libro está dividido en 5 bloques; cada bloque consta de aprendizajes esperados y de 6 a 9 contenidos. Cada contenido se divide en tres etapas: Problema inicial, Exploración y discusión y Actividades adicionales. Este ejemplo corresponde al bloque 5, ubicado en la etapa "Actividades adicionales", donde se desarrolla el tema "Gráfica de funciones lineales". En él se describe el enfriamiento de una taza de café recién salida de un horno de microondas y expuesta a una temperatura ambiente, durante 10 minutos. El problema consta de un texto, una tabla de datos y una gráfica, que hemos separado del enunciado por cuestiones de formato y reproducimos en la Fig. 2.

Una taza de café se calienta en un horno de microondas, luego, se extrae del horno y se expone al ambiente, que se encuentra a una temperatura de 15°C. Supongamos que, en los primeros 10 minutos, la temperatura de la taza disminuye uniformemente. La siguiente gráfica representa una aproximación a la forma en que la temperatura de la taza disminuye en los primeros 10 minutos.
a) ¿A qué temperatura está la taza de café cuando se saca del horno?
b) ¿Qué temperatura tiene la taza un minuto después de haberla extraído del horno? ¿Y luego de 2 minutos? ¿Y de 3 minutos?
c) La temperatura que bajó cada minuto fue la misma durante los primeros 10 minutos. ¿De qué manera se manifiesta este hecho en la gráfica?
d) ¿La gráfica representa una función lineal? ¿En qué razones basas tu respuesta? Coméntalas con un compañero.
e) Completen la siguiente tabla para mostrar la temperatura de la taza de café durante los primeros 10 minutos.

Temperatura en min (t)	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
Temperatura en C (T)										

f) Escriban una fórmula que exprese la temperatura (T) de la taza de café en cualquier instante (t), dentro del periodo de los primeros 10 minutos.
g) ¿La función que corresponde a esta situación es creciente o decreciente?

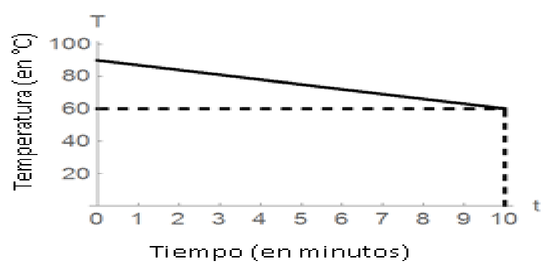


FIGURA 2. Transcripción de un problema de un libro de segundo de secundaria publicado en el 2013.

La gráfica es muy similar a la que dan los autores de ese problema. De la Fig. 2 se desprende que los autores modelan el enfriamiento de la taza (durante los primeros 10 minutos) a través de una función lineal decreciente, contradiciendo con ello, la experiencia cotidiana de los estudiantes y desconociendo lo que otros autores de libros de texto de matemáticas han publicado al respecto. El aprendizaje de la función lineal y la razón de cambio se cubren artificialmente con el fenómeno de enfriamiento, que en la realidad es un decaimiento multi-exponencial. Citando a Korsunsky [7], esta falsa conexión del enfriamiento de una taza de café caliente (situación real) con el ámbito matemático (modelo matemático) [8] puede provocar desconcierto entre los estudiantes porque contradice su conocimiento intuitivo acerca de la temperatura y sus cambios, influyendo así negativamente en su aprendizaje.

El tercer ejemplo pertenece a un libro de tercero de secundaria publicado en el 2014, donde se plantea el aprendizaje de la razón de cambio a través del enfriamiento de una masa de agua. El libro está dividido en 5 bloques, cada bloque consta de 6 u 8 lecciones y en cada lección se indican los aprendizajes esperados, que pretenden lograrse con el desarrollo progresivo de las siguientes tres secciones:

Para comenzar, Para resolver, Para terminar. El problema corresponde al bloque 4 en su lección 6 que desarrolla el contenido "Manejo de la información" y se ubica en la sección "Para comenzar". En la Fig. 3 se presenta la transcripción fidedigna del problema como aparece en ese libro de texto. Reto. Analiza el texto y contesta las preguntas.

En un laboratorio escolar se hirvió agua. Cuando llegó al punto de ebullición se retiró el recipiente del fuego y se inició un registro cada 2 minutos de la disminución de la temperatura, hasta que alcanzó la temperatura ambiente. Los estudiantes registraron los valores medidos en la tabla siguiente.

Tiempo (min)	*Temperatura (℃)*
0	*99.98*
2	*95.98*
4	*91.98*
6	*87.98*
8	*83.98*
10	*79.98*
12	*75.98*

1. Con la información dada en la tabla, responda las preguntas.
a. ¿A qué razón disminuye la temperatura del agua?
b. ¿La razón es positiva o negativa? ¿Por qué?
c. ¿Cuál será la temperatura a los 18 minutos?
d. ¿En qué minuto la temperatura del agua se encontraría a 51.98℃?
e. Construya la gráfica para los valores mostrados en la tabla.

FIGURA 3. Reproducción de un problema matemático de un libro de tercero de secundaria publicado en el 2014.

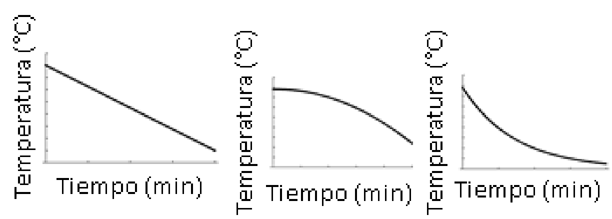
Los datos de esta tabla se ajustan exactamente a la función lineal,

$$T(t) = -\left(2\,\frac{℃}{min}\right)t + 99.98℃\,. \tag{6}$$

Observe que, en el enunciado del problema no se hace mención a la temperatura del medio ambiente, T_a, ni al tipo de material del contenedor. Si consideramos que T_a=20℃, el tiempo típico que predice la ecuación (1) es 39 minutos y como consecuencia, el enfriamiento del agua hirviente es muy lento comparado con una situación real similar como se verá más adelante. Para salvar esta situación, podría pensarse que el contenedor es de un material muy aislante (madera, corcho, poliestireno), aunque esto parece improbable porque en el problema se menciona que, en un laboratorio se hirvió agua y enseguida se dejó enfriar. Siguiendo esta narrativa se pensaría que el contenedor es de un material conductor del calor y como consecuencia, lo más probable es que los datos de esta tabla no correspondan a un experimento.

Consideramos la sugerencia de Lingefjärd [3] y elegimos un problema matemático de un libro de texto de tercero de secundaria publicado en el 2011, con la intención de reproducir el experimento ahí se relata y comparar sus datos con los nuestros. En dicho problema se narra el enfriamiento de una taza de café a 80 ℃, que se expone a una temperatura ambiente, T_a=20℃. El enunciado del problema se acompaña de una tabla de datos y de una figura con tres curvas que muestran una variación decreciente de la temperatura con el tiempo: en la primera, el trazo es lineal, en la segunda, es convexo y en la última, es exponencial decreciente. En la Fig. 4 se presenta la transcripción literal de este problema.

Una taza de café se calienta en un horno de microondas y llega a los 80℃. La tasa se saca del horno y se deja a la temperatura ambiente, que es de 20℃. La temperatura de la taza disminuirá a medida que pase el tiempo; es decir, en este caso la relación entre las cantidades es decreciente.
¿Se puede suponer que la temperatura cambia de manera constante, es decir, el mismo número de grados centígrados por cada minuto? Argumenta a favor o en contra de esta posibilidad.
¿Cuál de las siguientes gráficas aproximadas representa la variación de la temperatura en función del tiempo?



Para verificar lo anterior, se tomaron los siguientes datos del enfriamiento de una taza:

Tiempo (minutos)	*0*	*5*						*10*
Temperatura (grados centígrados)	*80*	*65*						*54*

¿Cómo es la variación de la temperatura: cada 5 minutos disminuye de manera constante o la disminución de temperatura en cada lapso es diferente? Grafica los datos de la tabla para tener una idea de la forma de la línea.

FIGURA 4. Problema de un libro de tercero de secundaria publicado en el 2008. Se denomina como Problema 1 para la discusión del presente estudio. Las curvas son muy similares a las proporcionadas por los autores de ese problema.

El modelo lineal de la Fig. 4 se obtuvo a través la siguiente expresión,

$$T_{lin}(t) = \left(-\frac{7}{2}\frac{℃}{min}\right)t + 80\ ℃. \tag{7}$$

La línea convexa corresponde a la función,

$$T_{cuad}(t) = \left(-0.09\,\frac{℃}{min^2}\right)t^2 + \left(0.10\,\frac{℃}{min}\right)\mathrm{t} + 71℃, \quad (8)$$

y la exponencial decreciente se obtuvo usando la ecuación (1). Para reproducir un trazo similar al proporcionado por los autores del problema referido en la Fig. 4, fue necesario considerar una temperatura ambiente de cero grados Celsius, y no 20℃ como se pregona en el enunciado del citado problema. El modelo exponencial decreciente es:

$$T(t) = 78℃\, exp\left\{\frac{-t}{7.28\,min}\right\}. \quad (9)$$

Observe que, en la primera pregunta los autores invitan a los estudiantes a pensar en un modelo matemático para el enfriamiento, pero no se les da la oportunidad de proponerlo, porque de inmediato les presentan tres representaciones gráficas, entre las que se encuentra aquella que describe la situación expuesta (tercer gráfico de izquierda a derecha en la Fig. 4). Enseguida, los autores les proporcionan los datos "experimentales" para que los estudiantes corroboren la correcta elección del gráfico.

También hay inconsistencias entre los datos de la tabla y el gráfico de la exponencial decreciente que describe el enfriamiento de la taza de café a 80℃. Se observa que los ejes coordenados no están graduados, la temperatura inicial es menor a los 80 ℃, la temperatura de la taza es menor que los 10 ℃ y pareciera que tiende a 0 ℃. Aunque los autores mencionan que se trata de una gráfica aproximada, ella no da cuenta del enfriamiento de la taza. Estas observaciones fueron detectadas por maestros de matemáticas del nivel básico (en servicio) [9]. En lo que sigue, este ejemplo se denomina como el "*Problema 1"*.

IV. UN EJEMPLO DE UN LIBRO CANADIENSE DE MODELACIÓN MATEMÁTICA

En el Apéndice A de GAIMME [6], página 105, se narra que un científico está estudiando los patrones de enfriamiento de un material, del que no se da ninguna información. Los datos "experimentales" se proporcionan en una tabla, que se acompaña de una gráfica de temperatura contra tiempo, donde aparecen tres curvas. La intención es que los alumnos elijan entre los tres modelos proporcionados, aquel que describe el enfriamiento del material. Este problema dice textualmente (vea la Fig. 5).

Una científica está estudiando los patrones de enfriamiento de un material dado a lo largo del tiempo. Su investigación requiere calentar una muestra del material a 200°C. Ella registra la temperatura de la muestra a medida que se enfría a 0°C. La tabla muestra los datos recopilados durante los primeros 2 minutos del proceso de enfriamiento.

Tiempo de enfriamiento del material (segundos)	*0*	*40*	*80*	*120*
Temperatura (°C)	*200*	*141*	*101*	*74*

La figura muestra los datos del científico (los datos se representan como puntos grandes). También se muestran tres posibles modelos para los datos: un modelo lineal, un modelo cuadrático y un modelo exponencial.
¿Cuál modelo es lineal? ¿Cuál modelo es cuadrático? ¿Cuál es exponencial?
¿Cuál modelo es el mejor para el rango de tiempo 0<t<250?
Explique por qué los otros modelos no se ajustan muy bien a los datos para el rango de tiempo 0<t<250.

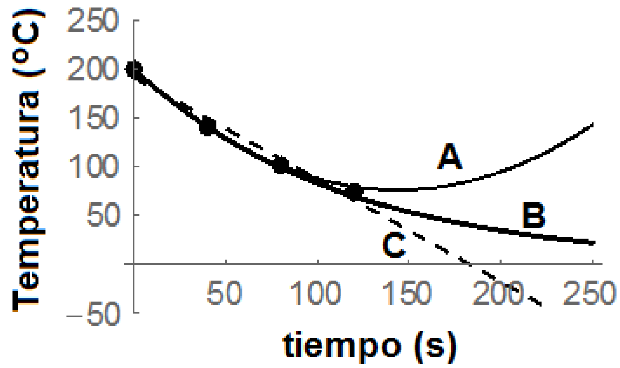


FIGURA 5. Traducción del problema que aparece en la referencia [6]. La gráfica de temperatura contra tiempo es muy similar a la proporcionada en esta referencia. La curva del modelo cuadrático (A) se obtiene de la ecuación (10), la del modelo lineal (C) proviene de la ecuación (11) y la del modelo exponencial (B) se desprende de la ecuación (12).

En el presente estudio, este ejemplo se denominó como el Problema 2.
En referencia a la Fig. 5, el modelo cuadrático, se obtuvo de la expresión:

$$T_{cuad}(t) = \left(5.9\times10^{-3}\,\frac{℃}{s^2}\right)t^2 + \left(-1.71\,\frac{℃}{s}\right)t + 200℃\,. \quad (10).$$

Que se desprendió de los tres primeros pares de datos de la tabla. Para el modelo lineal se consideraron los cuatro pares de datos y se usó el método de ajuste de mínimos cuadrados; se obtuvo la siguiente expresión:

$$T_{lineal}(t) = \left(-1.04\,\frac{℃}{s}\right)t + 191.7℃. \quad (11)$$

Para ajustar los datos experimentales al modelo de enfriamiento de Newton se usaron los primeros dos pares de datos; la expresión correspondiente es:

$$T(t) = 200℃\, exp\left\{\frac{-t}{114.43s}\right\}. \quad (12)$$

Observe que los autores no proporcionan los elementos extra-matemáticos básicos (vea la Fig. 5). No se dice con claridad que, una vez que el material se calienta hasta los *200°C*, se le expone a un medio ambiente a *0°C*. Esta información es esencial para que el alumno concluya que para tiempos suficientemente grandes, el material y el medio estarán a la misma temperatura, o sea *0°C*. Esta información le facilita al estudiante, el desechar los modelos lineal y cuadrático y optar por el modelo exponencial. Otro cuestionamiento es la omisión de las unidades en la última pregunta; se pierde de vista que el símbolo t representa al tiempo transcurrido desde que inició el registro de las temperaturas. En lo que sigue nos referiremos a este ejemplo como el "*Problema 2*".

V. DOS EJEMPLOS DE LIBROS DE CÁLCULO ESTADOUNIDENSES

En uno de los ejemplos de un libro introductorio de cálculo [4], página 346, se propone usar la ley de enfriamiento de Newton para dar cuenta de la evolución temporal de la temperatura de una taza de café muy caliente colocada en una habitación. En este libro, la ley de enfriamiento se presenta antes del ejemplo, cuya traducción se presenta en la Fig. 6.

Una taza de café tiene una temperatura de 200°F y se coloca en una habitación que está a una temperatura de 70°F.

Después de 10 min, la temperatura del café es 150°F.

(a) Encuentre una función que modele la temperatura del café al tiempo t.
(b) Encuentre la temperatura del café después de 15 min.
(c) ¿Cuándo se habrá enfriado el café a 100°F?
(d) Ilustre dibujando una gráfica de la función temperatura.

FIGURA 6. Traducción del inglés del problema que aparece en el Ejemplo 7 del libro de pre-cálculo [4]. En el presente estudio se nombró como el Problema 3.

La intención de los autores es que los estudiantes interactúen con la función exponencial. Por este motivo, les proporcionan únicamente dos pares de datos "experimentales" (vea el primer párrafo de la Fig. 6).

Observe que el estudiante debe darse cuenta que en el instante t=0 min, la temperatura de la taza de café es 200°F y que, al tiempo t=15 min, la temperatura es 150°F. El trabajo requerido en los tres primeros incisos es algebraico y en el inciso d, los estudiantes tienen la posibilidad de visualizar la función exponencial decreciente. En lo que sigue, este ejemplo lo denominamos como el "Problema 3".

En otro ejemplo de un libro de texto de cálculo [5], página 288, se narra el enfriamiento de un refresco embotellado en el interior de un refrigerador que está a una temperatura dada. La traducción de este ejemplo se presenta en la Fig. 7.

Una botella de refresco a temperatura ambiente (72°F) se coloca en un refrigerador donde la temperatura es 44°F. Después de media hora, el refresco se ha enfriado a 61°F.

a) ¿Cuál es la temperatura del refresco después de otra media hora?
b) ¿Cuánto tiempo tarda la soda en enfriarse a 50°F?

FIGURA 7. Traducción del Ejemplo 3 que aparece en el libro de cálculo especificado en la referencia [5].

En este ejemplo se prioriza el trabajo matemático [8] que forma parte de la modelación del enfriamiento,

$$\frac{dT}{dt}=\frac{1}{\tau}(T-T_a). \qquad (13)$$

En esta ecuación, τ es el tiempo característico del enfriamiento del refresco en el interior del refrigerador. Su solución conduce a la conocida ley de enfriamiento de Newton. Los incisos a y b involucran la determinación de los dos parámetros que ajustan los datos experimentales a la ecuación (1).

En la solución desarrollada en [5], se usa la ley de enfriamiento y se encuentra que la soda requiere de 93 minutos de refrigeración para que su temperatura disminuya de 72°F a 50°F. El autor concluye su discusión con la siguiente aseveración:

Note que en el Ejemplo 3, nosotros tenemos
T(*t*)=(*lim*)┬(*t*→∞) (44+28e^(-0.01663t))=44+28·0=44.

Lo cual es de esperar. La gráfica de la función de la temperatura se muestra en la Figura 3.

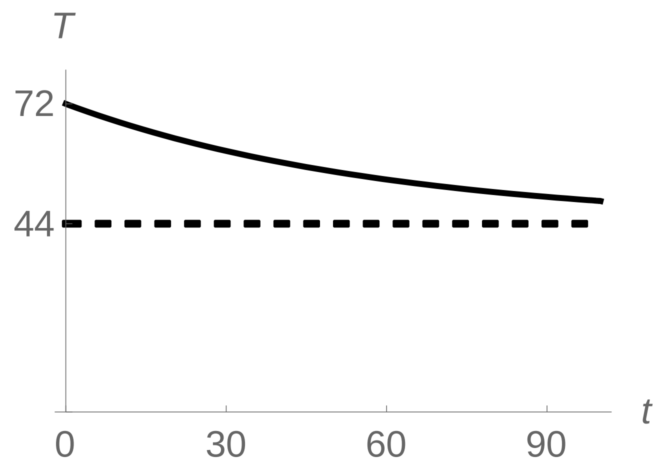


FIGURA 8. Traducción del párrafo conclusivo. La gráfica es muy similar a la que se da en la Figura 3 del Ejemplo 3 del libro "Cálculo Esencial" [5].

Nos preguntamos, si la expresión algebraica y la gráfica que aparecen en la Fig. 8, se relacionan de alguna manera con el enfriamiento del refresco en el interior de un refrigerador ¿Se requiere un tiempo infinito para que el refresco alcance la temperatura del interior del refrigerador? Ahora, de la experiencia cotidiana se sabe que, un lapso de tiempo de dos horas es suficiente para que un refresco se enfríe ¿este tiempo corresponde al símbolo $t\to\infty$ que aparece en la expresión que proporcionan los autores? El autor [5] centra su atención en el ámbito matemático de la modelación y desatiende la relación inevitable que guarda éste con el enfriamiento de la botella de refresco (situación real). El tiempo al que se hace referencia en la expresión matemática que aparece en la Fig. 8, pertenece al ámbito matemático y el resultado matemático debe ser interpretado en términos la situación real [8].

Concluimos que la botella de refresco alcanzará 44°F en un tiempo finito porque la temperatura se mide con un termómetro que tiene un nivel de resolución dado.

VI. LOS PROBLEMAS SELECCIONADOS Y LA LEY DE ENFRIAMIENTO DE NEWTON

En esta sección se comparan los datos "experimentales" involucrados en los ejemplos denominados como: *Problema 1* (Fig. 4), *Problema 2* (Fig. 5) y *Problema 3* (Fig. 6).

También se presentan los datos experimentales propios del enfriamiento de una taza de café, medidos para la presente discusión. Con esto, evidenciaremos que los datos de enfriamiento usados en los *Problemas 1* a *3*, no provienen de experimentos de enfriamiento.

A. Discusión del *Problema 1*

En la Fig. 9, se presentan los datos "experimentales" del Problema 1. En este caso, la diferencia inicial de temperaturas y el tiempo que caracteriza el enfriamiento son, respectivamente, c_1=60 ℃ y τ_1≈17.4 min. En este instante de tiempo, el modelo de Newton predice 42.1 ℃ para la temperatura de la taza de café, la cual concuerda con el dato "experimental" correspondiente, como se observa en la Fig. 9. Vea que este acuerdo se mantiene durante los 30 minutos (aproximadamente, 1.7 τ_1) del registro de los datos.

Esto es insólito, porque la dinámica del enfriamiento es más rápida en los primeros instantes de tiempo que en los posteriores. Bajo estas consideraciones, concluimos que los datos "experimentales" del enfriamiento de la taza de café se desprendieron del modelo de Newton y no de un experimento, como se pregona en el Problema 1.

En la Fig. 10 se grafican los datos "experimentales" del enfriamiento de un cierto material que se calentó hasta los 200 ℃ y enseguida se dejó enfriar en un medio ambiente a 0 ℃ [6]. Observe la gran coincidencia de estos datos con la predicción de la ley de enfriamiento de Newton. La diferencia inicial de temperaturas y el tiempo característico del enfriamiento del material son, respectivamente, c_2=200 ℃ y τ_2≈114.43 s≅1.91 min. El enfriamiento del material es (aproximadamente) un orden de magnitud más pequeño que el de la taza de café, τ_1≅9.1 τ_2, en consonancia con el hecho que, la diferencia inicial de temperaturas del material es más grande que aquella de la taza de café, c_2≅3.3c_1.
De la Fig. 10 se observa que los datos experimentales cubren un intervalo de tiempo de 0 s a τ_2. Esto a pesar de que, en el Problema 2 (vea la Fig. 5) se menciona que se trata de un estudio del patrón de enfriamiento de un material. Por este motivo se esperaría que la observación se realizara en al menos 2τ_2≈228.86 s. Ante estas evidencias, concluimos que es artificial el uso del contexto de enfriamiento en el Problema 2.

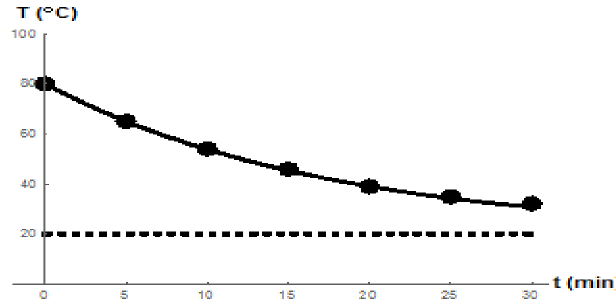


FIGURA 9. Temperatura contra el tiempo de enfriamiento. Datos "experimentales" del Problema 1 (círculos) y ley de enfriamiento de Newton (línea continua). La temperatura del medio ambiente es 20℃ (línea horizontal a trozos).

B. Discusión del Problema 2

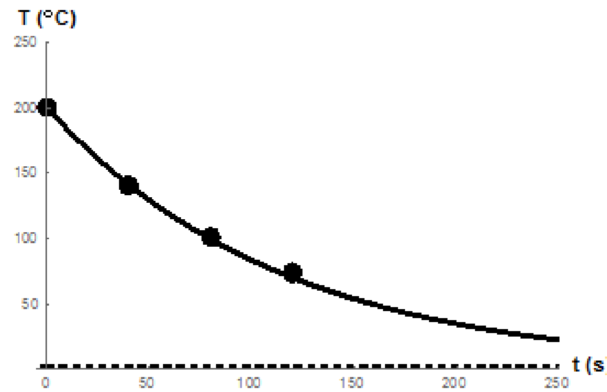


FIGURA 10. Temperatura del enfriamiento del material involucrado en el Problema 2 como función del tiempo. Comparación de los datos "experimentales" [6] (círculos) con la ley de enfriamiento de Newton (línea continua). La asíntota horizontal $T(t)$=0 ℃ da cuenta de la temperatura del medio ambiente (línea a trazos).

C. Discusión de los *Problemas 3*

En el enunciado del *Problema 3* (vea la Fig. 6) se dan las temperaturas de una taza de café en dos instantes de tiempo [4] $t_1 = 0\,min$, $T_1 = 200$°F y $t_2 = 10\,min$,$T_2 = 150$°F. La temperatura del medio ambiente es 70°F. Esta información es suficiente para obtener la variación inicial de la temperatura de la taza, $c_3 = 130$°F, y el tiempo característico del enfriamiento, $\tau_3 \approx 20.6\,min$. La sustitución de estos dos parámetros en la ecuación (1) provee la expresión para T en cualquier instante de tiempo t, que se usa para responder los incisos ***b*** y ***c***. En la solución desarrollada en la referencia [4], se da respuesta al inciso ***d***, con el siguiente párrafo y gráfico:

El gráfico de la función de temperatura se dibuja en la Figura 7. Note que la línea $t = 70$ es una asíntota horizontal. (¿Por qué?)

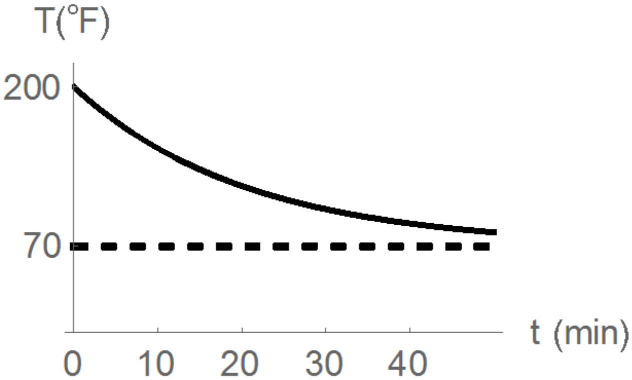


FIGURA 11. La curva de temperatura vs. tiempo es muy similar a la que aparece en la Figura 7 de la referencia [4]. En la gráfica original, la asíntota horizontal se etiquetó con $T = 70$ y la curva cóncava con la expresión $T = 70 + 130e^{-0.04855t}$.

La exponencial decreciente en la Fig. 11, se obtienen de la expresión,

$$T(t) = 70°\text{F} + (130°\text{F})e^{-\frac{t}{\tau_3}}. \qquad (13)$$

Donde $\tau_3 \approx 20.6\ min$

Los autores [4] hacen notar que *T*=70°F es una asíntota horizontal de la función *T*(*t*), ecuación (13), y preguntan ¿Por qué? No es clara su intención, ya que de la Fig. 11 se observa que la distancia de cualquier punto de la curva *T*(*t*) a la asíntota es cada vez más pequeña conforme el tiempo de enfriamiento se incrementa. Así que, se requiere un tiempo infinito para que la temperatura de la taza de café sea 70°F.

Esto contradice la intuición de los estudiantes y los resultados de las mediciones que ellos puedan realizar.

También podría pensarse que los autores encaminan a los estudiantes a interpretar los resultados matemáticos en términos de la situación real [8], a saber, el enfriamiento de la taza. No pareciera ser el caso, ya que, los autores solo aportan dos pares de datos "experimentales", los suficientes para encontrar los parámetros del modelo matemático, ecuación (13).

Un acierto de los autores [4] que propusieron el enfriamiento de una taza de café (vea la Fig. 11) para el aprendizaje de la exponencial decreciente y las asíntotas fue considerar un intervalo de tiempo de 40 min, para la medición de la temperatura. Esto es atinado porque el tiempo ⟦2τ⟧_3≈41 min, eso suficiente para observar el comportamiento del enfriamiento de la taza narrado en el ejemplo dado en la Fig. 6. Aunque en el inciso a se habla de modelar la temperatura de la taza al tiempo t, los alumnos no reciben esta oportunidad. Por ejemplo, los autores pudieron haber ofrecido un tercer dato experimental que permitiera comparar la predicción de la ley de enfriamiento de Newton con la situación real. Concluimos entonces que, en este problema se usa artificialmente el contexto de temperatura y que no se completa el ciclo de la modelación matemática [8], porque no hay pregunta alguna que conecte los resultados matemáticos con el enfriamiento de la taza de café que allí se narra. En este sentido, el ejemplo de dado en [4] es superado por el propuesto en GAIMME [6].

D. La taza de café: nuestros datos experimentales y su análisis

El experimento de enfriamiento de una taza de café se realizó en un laboratorio de enseñanza: la puerta permaneció cerrada y las cortinas de las ventanas corridas. Se tomaron los datos en un lapso de tiempo de una hora. La temperatura del medio ambiente permaneció en 23℃ durante el tiempo de observación. Una mezcla de 3.12 g de café soluble en 250 ml de agua destilada se colocó en una taza de cerámica. La bebida se calentó en un horno de microondas. La tasa se sacó del horno y se colocó en una mesa de madera. En la Tabla I se muestran los datos experimentales.

TABLA I. Datos experimentales del enfriamiento de una taza de café, inicialmente a 80℃, en presencia de un medio ambiente a 23℃.

$t(min)$	0	5	10	15	20	25	30
T(℃)	80	71	64	59	54	51	48
$t(min)$	40	50	60				
T(℃)	43	39	37				

En la Fig. 12 se comparan los datos experimentales con las predicciones la ley de enfriamiento de Newton. Este modelo anticipa un tiempo característico de enfriamiento, *τ*=(5 min)⁄(□*Ln* (19/16))≈29 min, al que corresponde una temperatura de 44 ℃. Observe que esta predicción para la temperatura difiere del dato experimental, en alrededor de 4 ℃, diferencia que es físicamente medible.

De la Fig. 12 se desprende que, a partir de los 20 minutos de iniciado el enfriamiento, los datos experimentales se separan de la predicción de la ley de enfriamiento y esto es evidente a partir del instante de tiempo *τ*. Este comportamiento difiere del mostrado por los datos "experimentales" del Problema 1 (Fig. 4). Los autores de ese problema matemático no especifican de qué material es la taza que contiene al café caliente. En ese caso, *τ* es aproximadamente 17 minutos y para el experimento que reportamos es de 29 minutos. La taza de café del Problema 1 se enfría más rápido que la nuestra, como consecuencia su taza no puede ser más aislante que la nuestra que es de cerámica.

Estas evidencias nos llevan a pensar que los datos del Problema 1 y 2 [6] no provienen de un experimento. Pareciera que los autores dieron por hecho que las temperaturas del café y del material debían ajustarse a la ley enfriamiento de Newton.

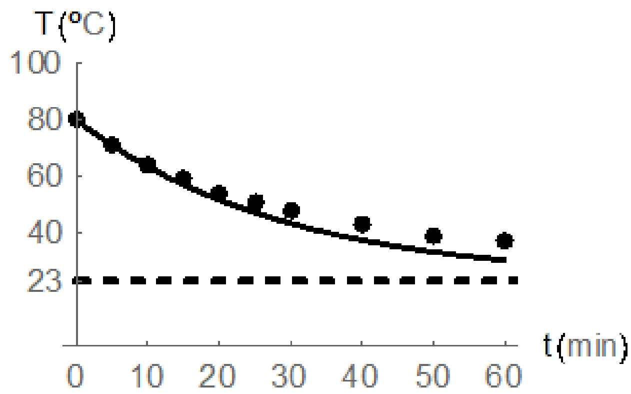


FIGURA 12. Temperatura contra el tiempo de enfriamiento: nuestros datos experimentales (círculos) y ley de enfriamiento de Newton (línea continua). La temperatura del medio ambiente es 23℃ (línea horizontal a trozos).

VII. CONCLUSIÓN

Las situaciones de enfriamiento consideradas en este documento provienen de dos niveles educativos (secundaria y universidad), de tres países: México, Estados Unidos de América y Canadá.

De nuestro análisis se desprende que el descuido en la formulación de los problemas matemáticos en contexto de temperatura y sus cambios no es un síndrome exótico sino que podría ser un fenómeno global que requiere más atención de la comunidad dedicada a la escritura de libros de texto. Este contexto se usa artificialmente en los problemas matemáticos de libros de texto de la CONALITEG que analizamos y lo mismo sucede en otros libros de texto de circulación internacional. Aunque, en su redacción, los autores hablan de experimentos, éstos no se realizan como lo recomienda Lingefjärd [3], más bien, sus datos se desprenden de la ley de enfriamiento de Newton.

Tampoco se atienden los elementos propios del fenómeno de enfriamiento, lo que puede incidir inapropiadamente en los aprendizajes matemáticos de los estudiantes [7].

Aún más, los ejemplos que versan sobre la enseñanza y aprendizaje de la modelación matemática en contexto de temperatura [5,6] están limitados porque los autores pierden de vista que la situación real, definida en la referencia [8], es un suceso real, cuyas características físicas desatienden en los problemas matemáticos desarrollados.

AGRADECIMIENTOS

Se agradece a la VIEP-BUAP por el apoyo otorgado para la realización de este trabajo por medio de los proyecto con clave 100185000-VIEP2019. De igual forma, se agradece al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por la beca otorgada al segundo autor, para realizar sus estudios de maestría de enero de 2018 a diciembre de 2019.

REFERENCIAS

[1] Smith, C., Morgan, C., *Curricular orientations to real-world contexts in mathematics*, The Curriculum Journal **27**, 24-45 (2016).

[2] Clarke, D., Roche, A., *Using contextualized tasks to engage students in meaningful and worthwhile mathematics learning*, The Journal of Mathematical Behavior **51**, 95-108 (2018).

[3] Lingefjärd, T., *Faces of mathematical modeling*, ZDM **38**, 96-112 (2006).

[4] Stewart, J., Redlin, L., Watson, S., *Precalculus*, (Belmont: Brooks/Cole/Cengage Learning, USA, 2011).

[5] Stewart, J., *Essential Calculus*, (second Ed. Belmont, Brooks/Cole/Cengage Learning, USA, 2012).

[6] Gaimme, *Appendix A: Guidelines for assessment & instruction in mathematical modeling Education*, (first Ed. Comap, Inc., USA, 2016).

[7] Korsunsky, B., *Improper Use of Physics-Related Context in High School Mathematics Problems: Implications for Learning and Teaching*. School Science and Mathematics **102**, 107-113 (2002).

[8] Borromeo Ferri, R., *On the influence of mathematical thinking styles on learners' modelling behaviour*, Journal fur Mathematic didactic **31**, 99-118 (2010).

[9] Ruiz-Estrada, H., Slisko, J., Nieto-Frausto, J., *Detección de errores y contradicciones en un problema de un libro de texto de matemáticas: una exploración inicial del pensamiento crítico de los maestros*, Alme **31**, 106-114.