

# Factor de penetración de una perturbación armónica en construcciones civiles siguiendo un modelo mecánico

## Penetration Factor harmonic disturbance civil constructions following a mechanical model

Ubaldo Molina<sup>1</sup>  
Francisco Racedo<sup>2</sup>  
Ingrid Steffanell<sup>3</sup>

DOI: <https://doi.org/10.18041/1909-2458/ingeniare.25.5296>

### RESUMEN

Se ha diseñado un sistema mecánico en el que se someten vibraciones armónicas que requieren métodos de cálculo diferencial para su análisis y su correspondiente aplicación en la dinámica de estructura para el caso de construcciones civiles. Es necesario poner especial cuidado en esto, toda vez que fuerzas periódicas pequeñas pueden desatar más desastres que fuerzas estáticas de mayor magnitud. En este sentido, el artículo muestra un problema representativo de sistemas con vibración forzada, el tratamiento matemático de las ecuaciones diferenciales desde el enfoque mecánico y su analogía con problemas sísmicos. Lo anterior teniendo en cuenta que una acción tiene carácter dinámico cuando su variación con el tiempo es rápida y da origen a fuerzas de inercia comparables en magnitud con las fuerzas estáticas. Asimismo, se realiza una modelación numérica del factor de penetración mediante un programa sencillo de análisis de gráficas desde el punto de vista mecánico y su comparación de resultados (los de la modelación numérica sísmica), los cuales son el fundamento de la validez de la metodología de analogía estructural en el análisis de sistemas de vibración forzada.

**Palabras claves:** Construcciones civiles; Análisis estructural, Analogía mecánica; Vibración forzada; Modelación numérica.

**Como citar este artículo:** U. Molina, F. Racedo, y I. Steffanell, Factor de penetración de una perturbación armónica en construcciones civiles siguiendo un Modelo Mecánico, ingeniare, vol. 2, n.º 25, nov. 2018.

### ABSTRACT

Have designed a mechanical system in which undergo harmonic vibrations requiring differential calculation methods for analysis and the corresponding application in the dynamic structure in the case of civil buildings. You need to take special care of it, since small periodic forces, disasters can prompt greater static forces. In this sense, the article presents a representative problem of forced vibration systems, the mathematical treatment of differential equations from the mechanical approach and its analogy with seismic problems. Considering that is dynamic action when its variation with time is fast and gives rise to inertial forces comparable in magnitude to static forces. It makes a numerical modeling of the penetration factor using a simple program graphs analysis from the mechanical point of view and a comparison of the results of the seismic numerical modeling, and are the foundation of the validity of the methodology of structural analogy analysis of forced vibration systems.

**Keywords:** Civil construction; Structural analysis; Mechanical analogy; Forced vibration; Numerical modeling.



## 1. INTRODUCCIÓN

Se sabe que las vibraciones forzadas son aquellas que se producen por acción de fuerzas dependientes del tiempo, pero en específico de la velocidad. Su estudio es uno de los casos más complejos del análisis de vibración y de las ondas mecánicas. Una de las aplicaciones de estos sistemas mecánicos es el problema de los sismos en las construcciones civiles, en la cual se puede realizar una analogía sencilla y práctica debido a que es posible obtener modelos de simulación numérica sencillos a partir de problemas físicos simplificados. Por lo general, en la práctica son más sencillos de abordar y construir en laboratorios mecánicos. Además, las ecuaciones diferenciales alcanzadas son del mismo tipo de las obtenidas por planteamientos clásicos de equilibrio de fuerzas aplicadas a las construcciones civiles.

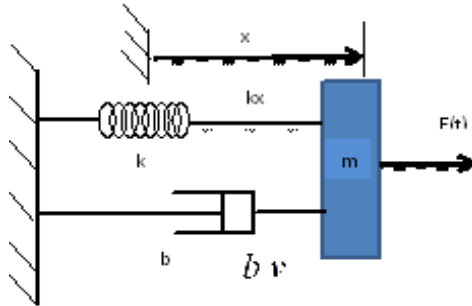
De esta manera, se requiere encontrar la analogía de términos entre el sistema mecánico y el problema de la dinámica de estructura en las construcciones en el caso de sismos. En este sentido, se cuenta con una metodología muy eficiente en el análisis de las aplicaciones de las vibraciones mecánicas.

Ahora bien, la vibración mecánica es el movimiento de una partícula o un cuerpo que oscila alrededor de una posición de equilibrio. El estudio de esta implica el conocimiento de las ecuaciones diferenciales del movimiento, razón por la cual existen varias formas de abordar el problema. Una opción es el estudio matemático riguroso por el que se determina la solución de las ecuaciones diferenciales de movimiento mediante la vía analítica; otra es la solución numérica mediante modelos de simulación que pueden ser de tipo mecánico aplicado a los problemas sísmicos.

## 2. MODELO MECÁNICO DE LA VIBRACIÓN FORZADA AMORTIGUADA

El caso de la vibración mecánica más complejo puede ser el de la vibración forzada amortiguada, en el cual existe una fuerza perturbadora armónica  $P$  que induce el movimiento en el sistema mecánico. Además, existen componentes de tipo elástico y viscoso que responden a la perturbación aplicada por la fuerza. Cuando se desprecian los efectos del rozamiento en un sistema se dice que la vibración es no amortiguada; ahora, si se tienen en cuenta, la vibración es amortiguada. Por otra parte, cuando el movimiento se encuentra a merced de las fuerzas recuperadoras, la vibración es libre. También se encuentra una fuerza externa que inducen la aceleración, la velocidad y los desplazamientos para un cierto tiempo, lo cual conlleva a vibraciones, de manera que produce fuerzas de inercia, amortiguamiento y elásticas.

En la ecuación de movimiento de un sistema lineal de un grado de libertad sometido a vibración forzada amortiguada se considera que la masa se encuentra en movimiento traslacional y está unida al extremo de un resorte y un amortiguador (fig. 1) [3].



**Figura. 1. Una masa sometida a las fuerzas del resorte, del amortiguador y la de excitación.**

Fuente: Elaborado por los autores

En la ecuación,  $x$  es el desplazamiento lineal y  $y$  las fuerzas que actúan en el cuerpo. Según [1]:

- *La fuerza elástica en el resorte  $F_e = -kx$ , donde  $k$  es la rigidez del resorte. El signo menos significa que la fuerza elástica tiende a devolver al cuerpo a su posición de equilibrio.*
- *La fuerza de amortiguamiento  $F_r = -b\dot{x}$ . Esta fuerza también se denomina resistencia viscosa y es opuesta al movimiento;  $b$  es el coeficiente de amortiguamiento viscoso.*
- *La fuerza de excitación o perturbación armónica  $F(t) = F_{\max} \text{sen}(wt)$ . Esta fuerza perturba la posición de equilibrio del cuerpo;  $w$  es la frecuencia de vibración forzada (rad/s).*

La onda sísmica se ha considerado en la forma de fuerza de excitación o perturbación armónica. Al aplicar la segunda ley de Newton en la dirección del movimiento y al reordenar los términos se obtiene la ecuación diferencial del movimiento de vibración forzada amortiguada de un sistema lineal de un grado de libertad (traslación  $x$ ), según [1].

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t) \quad (1)$$

Se puede definir  $w = 2\pi f$  como la pulsación forzada, y  $w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  es la pulsación libre no amortiguada o pulsación natural [6].

## 2.1 Solución particular de la ecuación de vibración forzada amortiguada

La solución general de la ecuación de vibración forzada amortiguada se obtiene sumando una solución particular de la expresión (1) a la función complementaria o solución general de la ecuación homogénea, esto es, la ecuación (1) sin el término de fuerza periódica.

La función complementaria es de tres clases, dependiendo del tipo de amortiguamiento, esto es, de acuerdo con [5]:

- • amortiguamiento fuerte o supercrítico,  $b > b_{cr}$  ;
- • amortiguamiento crítico,  $b = b_{cr}$  ;
- • amortiguamiento débil o subcrítico,  $b < b_{cr}$  .

Donde  $b_{cr}$  es el coeficiente de amortiguamiento crítico definido como  $b_{cr} = 2mw_0$ . Esta expresión representa un movimiento transitorio que se extingue en el tiempo.

El interés se centra en la vibración estacionaria representada por la solución particular de la ecuación (1), según [2]:

$$x(t) = x_{m\acute{a}x} \text{sen}(wt - \phi) \quad (2)$$

El problema de la vibración forzada amortiguada se resuelve con la solución particular (2) cuando se encuentren las cantidades: el máximo desplazamiento,  $x_{m\acute{a}x}$ , y la frecuencia de vibración forzada,  $w$ . Para esto se reemplaza la solución particular (2) en la ecuación diferencial (1) y, después de desarrollar, distribuir y comparar miembro a miembro se obtiene las siguientes ecuaciones:

$$x_{m\acute{a}x} [bwsen\phi + (k - mw^2) \cos\phi] = F_{m\acute{a}x}$$

$$(mw^2 - k)sen\phi + bw \cos\phi = 0$$

De estas ecuaciones se despeja  $x_{m\acute{a}x}$  y la constante de fase, de modo que se llega a las siguientes expresiones, según [8]:

$$x_{m\acute{a}x} = \frac{F_{m\acute{a}x}}{\sqrt{b^2w^2 + (k - mw^2)^2}} \quad (3)$$

$$\text{Tan}\phi = \frac{bw}{k - mw^2} \quad (4)$$

Recordando que  $b_{cr}$  es el coeficiente de amortiguamiento crítico definido como  $b_{cr} = 2m\omega_0$ , y que  $\omega_0$  es la pulsación de vibración libre no amortiguada o pulsación natural calculada como  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , las ecuaciones (3) y (4) representan las cantidades necesarias que solucionan el problema de las vibraciones forzadas y amortiguadas en los sistemas mecánicos normales. Sin embargo, estos pueden aplicarse a los problemas sísmicos definiendo, a partir de las fuerzas que intervienen, el factor de ampliación y el factor de penetración [4].

## 2.2 Factor de ampliación

Se define el factor de ampliación (FA) como la razón entre la fuerza elástica máxima y la perturbación armónica máxima  $FA = \frac{kx_{m\acute{a}x}}{F_{m\acute{a}x}}$ . Después de realizar los pasos algebraicos necesarios, se llega a la relación:

$$FA = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left[2 \frac{b}{b_{cr}} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right]^2}} \quad (5)$$

La ecuación (5) expresa el factor de ampliación en función de la razón de frecuencias  $\frac{\omega}{\omega_0}$  y del factor de amortiguamiento  $\frac{b}{b_{cr}}$ . El factor de ampliación  $FA$  se puede emplear con el fin de encontrar la amplitud de la vibración estacionaria producida por una fuerza aplicada de intensidad  $F(t) = F_{m\acute{a}x} \cdot \text{sen}(\omega t)$ .

Por otra parte, la ecuación (4) queda expresada como:

$$\text{Tan}\phi = \frac{2 \frac{b}{b_{cr}} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad (6)$$

La ecuación (6) expresa, en función de los mismos parámetros, la diferencia de fase  $\phi$  entre la fuerza aplicada o el movimiento comunicado a un soporte, así como la consiguiente vibración del sistema amortiguado.

Ahora bien, es posible realizar un estudio entre el factor de ampliación  $FA$  en función de la razón de frecuencias para diversos valores del factor de amortiguamiento. En principio, se observa que la amplitud de la vibración forzada puede mantenerse reducida mediante un coeficiente de amortiguamiento viscoso  $b$  de gran valor, o al mantener muy separadas las pulsaciones natural y forzada del sistema. Esto indica que es necesario conocer y manipular las características dinámicas del sistema vibratorio a fin de evitar

problemas de resonancia y, por tanto, se requiere entender muy bien el fenómeno de vibración forzada amortiguada empleando como alternativa herramientas de modelación numérica avanzadas [5].

Por otra parte, derivando la solución particular, ecuación (2), una y dos veces, y al tomar los valores máximos, puede obtenerse la amplitud de la velocidad y de la aceleración del movimiento de la vibración estacionari como  $v_{m\acute{a}x} = \omega x_{m\acute{a}x}$  y  $a_{m\acute{a}x} = \omega^2 x_{m\acute{a}x}$ .

Estas ecuaciones se emplean como parte de la correspondiente analogía entre la mecánica y las simulaciones sísmicas, en las cuales es posible analizar la velocidad y la aceleración de la onda sísmica. Sin embargo, no limitaremos al estudio del factor de transmisión.

### 3. COEFICIENTE DE TRANSMISIÓN

Consideremos la aplicación al caso de una construcción de masa  $m$  que es perturbada por fuerza armónica. Se supone que el suelo es rígido y la construcción posee solo movimiento de traslación. El aislamiento de la vibración consiste en disminuir la fuerza transmitida al suelo. A fin de estudiar este efecto se emplea el cociente de transmisibilidad  $\tau$ , definido en [4] de la forma:

$$\tau = \frac{F_{trm\acute{a}x}}{F_{m\acute{a}x}} \quad (7)$$

Donde  $F_{trm\acute{a}x}$  es la fuerza transmitida y  $F_{m\acute{a}x}$  es la fuerza de perturbación máxima.

Esta es la analogía para el caso de una estructura soportada sobre una base con medio elástico de constante  $k$  y un amortiguador con coeficiente de amortiguamiento viscoso  $b$ . La fuerza transmitida no está en fase con la fuerza de perturbación:

$$F_{trm\acute{a}x} = [kx + b\dot{x}]_{m\acute{a}x} \quad (8)$$

Mediante la ecuación (2), derivándola y teniendo en cuenta la amplitud máxima (3), la fuerza de transmisión queda de la forma:

$$\begin{aligned} F_{tr} &= [kx + b\dot{x}] \\ &= kx_{m\acute{a}x} \text{sen}(\omega t - \phi) + bx_{m\acute{a}x} \omega \cos(\omega t - \phi) \end{aligned}$$

Esta ecuación puede escribirse de la forma  $F_{tr} = F_{trm\acute{a}x} \text{sen}(\omega t - \phi)$ , de modo que, al compararse con la anterior expresión, se obtiene:

$$F_{trm\acute{a}x} = x_{m\acute{a}x} \sqrt{k^2 + b^2 \omega^2} \quad (9)$$

Al reemplazar la ecuación (9) en la (7), y usando la ecuación (3), se tiene:

$$F_{irm\acute{a}x} = x_{m\acute{a}x} \sqrt{k^2 + b^2 w^2} \quad (10)$$

Luego de desarrollar se encuentra que el coeficiente de transmisión es:

$$\tau = \sqrt{\frac{1 + 4 \left( \frac{b}{b_{cr}} \right)^2 \left( \frac{w}{w_0} \right)^2}{\left( 1 - \frac{w^2}{w_0^2} \right)^2 + 4 \left( \frac{b}{b_{cr}} \right)^2 \left( \frac{w}{w_0} \right)^2}} \quad (11)$$

Donde se ha introducido la relación  $\frac{\alpha}{w_0} = \frac{b}{b_{cr}}$ , siendo  $\alpha = \frac{b}{2m}$ , que es la frecuencia de amortiguamiento.

La respuesta dinámica de una estructura se puede obtener al realizar una señal de excitación dentro de la estructura. De esta manera se tendrán las variaciones de las magnitudes de análisis, como, por ejemplo, los desplazamientos, las velocidades, las aceleraciones, los momentos, las tensiones o cualquier otro tipo dependiente del tiempo.

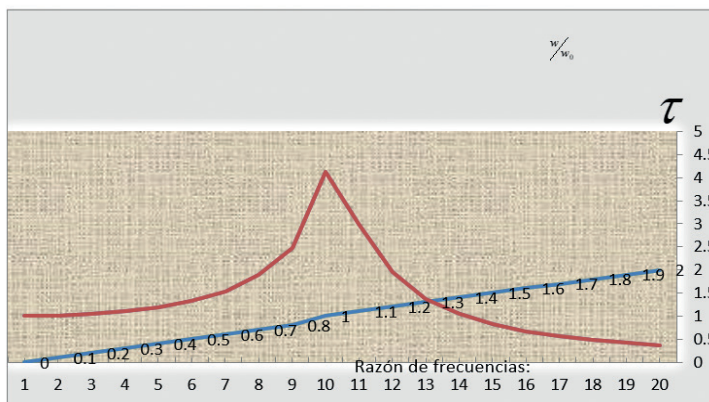
Con el fin de obtener la respuesta se requiere tanto la definición del movimiento del terreno (en caso sísmico) como de las características estructurales de este y de la estructura propiamente dicha. El análisis se realiza practicando un modelo mecánico de la estructura —tal como estamos procediendo en este caso— y no a la propia estructura considerada [10]. La definición de un modelo adecuado se realiza de acuerdo con el tipo de estructura que se quiera analizar, de manera que se obtienen unas relaciones entre acciones y respuesta que describan un modelo matemático del problema descrito [9].

El modelo matemático que se obtenga se puede resolver usando muchos métodos, pero en nuestro caso, tal como se describe en la ecuación (11), se desarrolla un modelo numérico de análisis sencillo. Sin embargo, conlleva a una información básica para modelamientos de respuestas de estructuras, bajo consideraciones de amortiguamientos forzados. De todas maneras, la respuesta obtenida depende de la certeza con que se formulen los modelos y no del método seleccionado [4]. Para diferentes valores de frecuencias se tiene la gráfica de la fig. 2.

Al realizar la gráfica del factor de penetración contra la razón de frecuencias, para valores específicos y fijos del factor de amortiguamiento  $\frac{b}{b_{cr}}$ , se observa que en valores del factor de amortiguamiento  $b < b_{cr}$  el factor de penetración presenta una gráfica en forma de campana con un máximo. A medida que el coeficiente de amortiguamiento es muy pequeño, comparado con el crítico ( $b \ll b_{cr}$ ), el punto máximo de penetración se hace muy grande, de tal manera que en el límite  $\frac{b}{b_{cr}} \rightarrow 0$  el factor de penetración



se hace infinito. Mientras que para el caso contrario, es decir, cuando el coeficiente de amortiguamiento se hace muy grande respecto al crítico ( $b \gg b_{cr}$ ) el factor de penetración tiende al valor límite de 1.



**Figura. 2. Factor de penetración: la gráfica muestra la variación del factor de penetración cuando  $b/b_{cr} = 1/8$ , en función de la razón de frecuencias  $w/w_0$ .**

Fuente: Elaborado por los autores

Este tipo de análisis sísmicos se soportan, por ejemplo, en los modelos de [11]. Otra metodología usada es un sismo de aceleración pico efectiva de diseño en edificaciones en tierra apisonada, propuesta por [12], mediante un análisis sísmico de edificaciones que relaciona el índice de vulnerabilidad con el índice de daño en función de un evento sísmico determinado.

#### 4. CONCLUSIONES

La solución del problema de vibración forzada amortiguada por analogía en la dinámica de estructuras permite entender de manera más profunda el comportamiento de las variables dinámicas del sistema, tales como desplazamiento, velocidad, fuerza transmitida y el factor de penetración. No solo es posible determinar valores máximos y amplitudes, sino que se puede obtener la respuesta del sistema en el tiempo, lo que permite analizar desfases entre la carga aplicada y la transmitida, así como el amortiguamiento de las cargas dinámicas aplicadas.

Los porcentajes de variación entre los resultados teóricos que se obtienen para el caso particular de transmisibilidad tratado en este artículo demuestran una excelente confiabilidad para realizar una modelación numérica en el caso de estructuras dinámicas sometidas a cargas sísmicas.

Por su parte, los resultados gráficos demuestran los comportamientos esperados, como lo son el amortiguamiento de la fuerza aplicada, el desfase entre la carga aplicada y la transmitida, así como el efecto de oscilación transitorio presente en, aproximadamente, los primeros segundos del fenómeno vibratorio.

La modelación de las dinámicas de estructuras muestra ser una alternativa eficiente para la solución de problemas de vibraciones sísmicas en general, utilizando analogía mecánica. Si bien esto no es muy común, el problema solucionado muestra la gran versatilidad de este tipo de herramientas a la hora de obtener una caracterización completa de un fenómeno sísmico.

El estudio de la transmisibilidad tiene un valor práctico muy importante, ya que una se obtiene la fuerza o la carga transmitida esta se puede emplear para diseñar de forma adecuada la fundación que soporta una estructura.

## **AGRADECIMIENTOS**

Un especial agradecimiento a la Universidad del Atlántico de Barranquilla por intermedio de la Facultad de Ciencias Básicas, y en especial al Departamento de Física por permitir desarrollar mis investigaciones con los docentes de la Universidad Libre de Barranquilla.

Un especial agradecimiento también a la Universidad de Libre, seccional Barranquilla, por intermedio de la Facultad de Ingeniería, por permitir desarrollar mis investigaciones con los docentes de la Universidad del Atlántico.

## **REFERENCIAS**

- [1] J. K. Arros, "Dynamics of structures", en *Earthquake engineering handbook*, Oakland, CA, EE. UU.: CRC Press LLC, 2003, cap. 3.
- [2] F. P. Beer, *Mecánica vectorial para ingenieros*. McGraw-Hill, 1998.
- [3] R. Calero y J. A. Carta, *Fundamentos de mecanismos y máquinas para ingenieros*. McGraw-Hill, 1999.
- [4] A. K. Chopra, "Theory and application", *Dynamics of structures*. Prentice Hall, University of California at Berkeley, 1995, pp. 74-86.
- [5] C. Guerra, M. Carrola y J. de J. Villalobos, *Fundamentos de las Vibraciones mecánicas*. FIME UANL, 2005.
- [6] H. Den, *Mecánica de las vibraciones*. Cecsa, 1982.
- [7] A. G. Erdman, *Diseño de mecanismos: análisis y síntesis*. Prentice-Hall, 1997.
- [8] A. P. French, *Vibraciones y ondas*. Reverté, 1974.
- [9] M. Geradin y O. Rixen, *Mechanical vibrations*. Wiley, 1997.
- [10] F. Gerald, F. y O. Wheatley, *Análisis numérico con aplicaciones*. Pearson, 1999.
- [11] J. M. Goicolea, *Análisis sísmico de estructuras*. Universidad Politécnica de Madrid, 2003.
- [12] R. E. Maldonado y G. Chio Cho, *Análisis sísmico de edificaciones*. Bucaramanga: Ediciones Universidad Industrial de Santander, 2004.