

Octoniones: construcción, geometría y aplicaciones

Octonions: construction, geometry and applications

Andrés Ricardo Moreno Garzón^{1,a},
Diana Andrea Toquica Arenas^{1,b}

Resumen. Los octoniones son el álgebra de división normada con mayor dimensión. Su construcción abarca propiedades algebraicas, su geometría y la relación con ramas de la matemática como el álgebra abstracta y la geometría diferencial. En este trabajo se mostrarán las diferentes construcciones realizadas a lo largo de la historia, así como la geometría de este conjunto de la cual surgen relaciones con la física en la relatividad especial y la física cuántica.

Palabras claves: octoniones, álgebra de división normada, geometría proyectiva.

Abstract. Octonions are the largest normed division algebra. Its construction covers the algebraic properties, its geometry and the relationship with branches of mathematic such as abstract algebra and differential geometry. In this work, we will study some made constructions through history, as well as the geometry of this set from which relationships with physics arise in special relativity and quantum physics.

Keywords: octonions, normed division algebra, projective geometry.

Mathematics Subject Classification: 11R52; 53A20.

Recibido: abril de 2019

Aceptado: junio de 2020

1. Introducción

En 1835, el matemático William Rowan Hamilton descubrió cómo tratar a los números complejos como parejas de números reales, hecho que relacionó a \mathbb{C} con el plano y por ello, durante muchos años buscó inventar un álgebra más grande que pudiera relacionarse con la geometría tridimensional [17]. Así, en 1843 descubrió la regla principal de los cuaterniones

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,$$

¹Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia

^aarmorenog@unal.edu.co

^bdatoquicaa@unal.edu.co

y el resto de su vida la dedicó a estudiarlos junto con sus aplicaciones a la geometría. Compartió su descubrimiento con John T. Graves por medio de una carta de 8 páginas, en la que describía todo sobre los cuaterniones. En diciembre del mismo año, Graves respondió a la carta con una en la que mostraba el comportamiento del álgebra 8-dimensional, la cual llamaba “*octaves*”. Allí demostró que esta era un álgebra de división normada y lo usó para expresar el producto de dos sumas de ocho cuadrados perfectos como otra suma de ocho cuadrados perfectos (lo que se conoce como el teorema de los 8 cuadrados, que previamente había sido descubierto por el matemático danés Carl Ferdinand Degen). Para entrar en detalle ver [1].

En enero de 1844, Graves consideró la idea de formar los “ 2^m -iones” e intentó construir un álgebra de división normada de dimensión 16, pero tuvo dudas de si esto era realmente posible. También en este año Hamilton considera la no asociatividad de los octoniones (de hecho, Hamilton usa por primera vez el término *asociativo* y los octoniones son pieza clave en el desarrollo de este concepto) [1].

Por otro lado, Arthur Cayley venía trabajando en los cuaterniones desde que Hamilton anunció su existencia y empezó a profundizar en la relación con las funciones hiperelípticas y es en marzo de 1845 cuando publica un paper en el *Philosophical Magazine* con sus resultados y como soporte de ellos, da una breve descripción de los octoniones y a partir de esto, los octoniones se conocen como los números de Cayley [1].

Los octoniones (\mathbb{O}) se obtienen de duplicar los cuaterniones (\mathbb{H}), es decir, $\mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ y a su vez los cuaterniones al duplicar los complejos $\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$. Luego pueden considerarse como 8-tuplas de números reales, donde cada octonión es una combinación lineal sobre \mathbb{R} de las llamadas *unidades del octonión* $\{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$, donde e_0 es la unidad escalar y puede identificarse con el 1, y las reglas de suma y multiplicación pueden derivarse de las mismas operaciones para cuaterniones. De esta forma se obtienen 480 posibles definiciones para la multiplicación de octoniones, aunque las álgebras resultantes son isomorfas entre ellas y realmente no es importante mirar qué regla de multiplicación se utiliza. Para mayor detalle ver [4].

Así definidos, los octoniones resultan ser un álgebra de división no conmutativa ni asociativa, de hecho, junto con \mathbb{R}, \mathbb{C} y \mathbb{H} resultan ser las únicas álgebras de división de dimensión finita (teorema de Hurwitz) y cuentan con propiedades interesantes de analizar y estudiar [1]. Aunque pasaron desapercibidos durante muchos años por su aparente falta de aplicación y relación con la física y la geometría, últimamente se han encontrado relaciones con los grupos de Lie, la teoría de cuerdas, la relatividad especial, la lógica cuántica e incluso en el procesamiento de señales (relacionado con series de Fourier), lo que los ha vuelto más populares en las áreas de estudio de la matemática. Estas aplicaciones pueden ser vistas con mayor detalle en [2, 5, 7, 11].

A continuación se desarrollarán tres secciones en las cuales se hará un acercamiento a los octoniones como extensión de los cuaterniones y álgebra de división normada. Para ello, en la primera sección se estudiará la construcción

del álgebra y algunas propiedades que se deducen de esta, después se trabajará en la geometría proyectiva propia de los octoniones y finalmente algunas aplicaciones en física cuántica.

2. Construcción de \mathbb{O}

Para presentar las construcciones realizadas de los octoniones, es necesario exhibir algunos conceptos que serán de utilidad a lo largo de esta sección.

2.1. Preliminares

En 1898, el matemático Adolf Hurwitz probó que las únicas álgebras de división normada sobre \mathbb{R} de dimensión finita resultan ser los números reales \mathbb{R} (de dimensión 1 como \mathbb{R} -espacio vectorial), los números complejos \mathbb{C} (de dimensión 2 como \mathbb{R} -espacio vectorial), los cuaterniones \mathbb{H} (de dimensión 4 como \mathbb{R} -espacio vectorial) y los octoniones \mathbb{O} que resultan ser la más grande de todas (con dimensión 8 como \mathbb{R} -espacio vectorial) [1]. A continuación se desglosa la definición de álgebra de división normada [1].

En primer lugar se define el concepto de espacio vectorial normado, tal que para un espacio vectorial \mathbf{V} sobre \mathbb{R} se define un módulo que se dice normado si sobre él se puede definir una norma, es decir, una función $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{K}$ que satisface:

1. Para todo $x \in V$, $\|x\| > 0$ y $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$.
2. Para todo $x \in V$ y $k \in \mathbb{K}$, $\|kx\| = |k|\|x\|$ donde $|k|$ denota el módulo de k .
3. Para todo $x, y \in V$ se tiene que $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Ahora, un **álgebra \mathbf{A}** es un espacio vectorial que está dotado de una función bilineal $m : A \times A \rightarrow A$ llamada multiplicación y un elemento 1 distinto de cero llamado **unidad** tal que $m(1, a) = m(a, 1) = a$. Se notará $m(a, b) = ab$. Específicamente, dado \mathbf{A} un álgebra de dimensión finita sobre \mathbb{R} , se dice álgebra de división si dados $a, b \in A$ con $ab = 0$ se tiene que $a = 0$ ó $b = 0$; esto es equivalente a decir que \mathbf{A} es álgebra de división si la operación de multiplicación a izquierda y derecha es invertible. Siguiendo con lo anterior, se tiene entonces que \mathbf{A} es álgebra de división normada si es un espacio vectorial normado tal que $\|ab\| = \|a\|\|b\|$. Lo cual implica que \mathbf{A} es a su vez álgebra de división y que $\|1\| = 1$.

Por otro lado, es importante resaltar que existen tres niveles de asociatividad. Un álgebra es fuertemente asociativa si el subálgebra generada por cualquier elemento es asociativa. Es alternativa si el subálgebra generada por cualesquiera dos elementos es asociativa. Finalmente, es asociativa si el subálgebra generada por cualesquiera tres elementos es asociativa. Los octoniones resultan ser no asociativos y la razón se expondrá más adelante.

2.1.1. Álgebra de octoniones

Los elementos de \mathbb{O} son expresiones de la forma

$$x = x_\infty + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 + x_5e_5 + x_6e_6 + x_7e_7 \quad (1)$$

con $x_t \in \mathbb{R}$ para $0 \leq t \leq 7$ y $x_\infty = \text{Re}(x)$, el cual constituye el álgebra sobre los reales generados por unidades e_1, \dots, e_7 que satisfacen

$$\begin{aligned} e_i^2 &= -1 \\ e_i e_j &= -e_j e_i, \\ (e_i e_j) e_k &= -e_i (e_j e_k), \end{aligned}$$

para $1 \leq i \leq 7$ y todos los índices en módulo 7.

Por otro lado, el conjugado de un octonión x está dado por

$$\bar{x} = x_\infty - x_1e_1 - x_2e_2 - x_3e_3 - x_4e_4 - x_5e_5 - x_6e_6 - x_7e_7 \quad (2)$$

y dados dos octoniones x y y es sencillo comprobar que $\overline{xy} = \bar{y} \bar{x}$. También es posible definir su módulo

$$|x|^2 = x\bar{x} = x_\infty^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2. \quad (3)$$

Usualmente los octoniones son considerados como vectores en \mathbb{R}^8 . Dado que la norma de un octonión coincide con su módulo se puede obtener también un producto interno. Este producto interno $\vec{v} \cdot \vec{w}$ puede ser despejado de la siguiente igualdad para vectores en \mathbb{R}^n ,

$$|\vec{v} + \vec{w}|^2 = |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 + 2\vec{v} \cdot \vec{w}$$

de modo que aplicando (3) se tiene que para $x, y \in \mathbb{O}$ el producto punto está dado por

$$x \cdot y = \frac{1}{2}(|x+y|^2 - |x|^2 - |y|^2) = \frac{1}{2}((x+y)\overline{(x+y)} - x\bar{x} - y\bar{y}) = \frac{1}{2}(x\bar{y} + y\bar{x}). \quad (4)$$

Además, dado un octonión x distinto de cero, se define su inverso (que resulta ser único),

$$x^{-1} = \frac{\bar{x}}{|x|^2} \quad (5)$$

(Ver [6] pag. 17 y pag. 8 del presente trabajo).

A continuación se presentarán algunas construcciones de \mathbb{O} hechas por diferentes autores que usan los cuaterniones \mathbb{H} y algunos argumentos geométricos y algebraicos. Ver [1, 4, 5].

2.2. Como extensión de \mathbb{H}

Los octoniones se definen como una extensión de \mathbb{H} tal que dada $\{1, q_2, q_3, q_4\}$ una base de \mathbb{H} en la que, para $i, j, k = 1, 2, 3$

- $1q_i = q_i1 = q_i,$
- $q_i^2 = q_j^2 = q_k^2 = -1,$
- $q_iq_j = -q_jq_i,$
- $(q_iq_j)q_k = q_i(q_jq_k),$
- $q_iq_{i+1} = q_{i+2}.$

Para visualizar el comportamiento de estos elementos se presenta la siguiente tabla (tomada de [5]) en la que el elemento de la intersección de la m -ésima fila con la n -ésima columna es el resultado de multiplicar el elemento de la m -ésima fila con la n -ésima columna, para $m, n = 1, \dots, 4.$

\cdot	1	q₁	q₂	q₃
1	1	q_1	q_2	q_3
q₁	q_1	-1	q_3	$-q_2$
q₂	q_2	$-q_3$	-1	q_1
q₃	q_3	$-q_2$	$-q_1$	-1

Tabla 1: Tabla de multiplicación en \mathbb{H} tomada de [5]. El elemento ubicado en la intersección de la fila m -ésima y la columna n -ésima con $m, n = 1, \dots, 4$ es el resultado de multiplicar el elemento de la fila m -ésima y la columna n -ésima.

Sea $e_i = q_i$ para $i = 1, 2, 3$ y un nuevo elemento e_7 tal que $e_7e_i = -e_ie_7$ para todo i y $e_7^2 = -1.$ Ahora, se definen tres nuevos elementos de la siguiente forma

$$e_4 = e_1e_7, e_5 = e_2e_7 \text{ y } e_6 = e_3e_7.$$

Sea \mathbb{O} el álgebra generada por $e_1, e_2, e_3, \dots, e_7$ tal que

$$\{q_1 \rightarrow e_a, q_2 \rightarrow e_b, q_3 \rightarrow e_c\}$$

define una inyección de \mathbb{H} en \mathbb{O} para

$$(a, b, c) = (1, 2, 3), (1, 7, 4), (1, 6, 5), (2, 7, 5), (2, 4, 6), (3, 7, 6), (3, 5, 4) \tag{6}$$

es decir que, por ejemplo, se tiene

$$e_1(e_7e_5) = e_1e_2 = e_3 = -(-e_3) = -e_4e_5 = -(e_1e_7)e_5.$$

Luego el álgebra \mathbb{O} generada por e_j para $j = 1, 2, \dots, 7$ no es asociativa, a diferencia de $\mathbb{H}.$ Para entrar en más detalle, ver [5].

Usando lo anterior, la multiplicación en \mathbb{O} se presenta en la Tabla 2, en la cual el elemento de la intersección de la fila m -ésima y la columna n -ésima es el resultado de multiplicar el elemento de la fila m -ésima y la columna n -ésima para $m, n = 1, 2, \dots, 7$.

\cdot	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
1	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_2$	$-e_7$	$-e_6$	e_5	e_4
e_2	e_2	$-e_3$	-1	e_1	e_6	$-e_7$	$-e_4$	e_5
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	-1	$-e_5$	e_4	$-e_7$	e_6
e_4	e_4	e_7	$-e_6$	e_5	-1	$-e_3$	e_2	$-e_1$
e_5	e_5	e_6	e_7	$-e_4$	e_3	-1	$-e_1$	$-e_2$
e_6	e_6	$-e_5$	e_4	e_7	$-e_2$	e_1	-1	$-e_3$
e_7	e_7	$-e_4$	$-e_5$	$-e_6$	e_1	e_2	e_3	-1

Tabla 2: Tabla de multiplicación en \mathbb{O} realizada siguiendo la inyección dada en (6). El elemento de la intersección de la fila m -ésima y la columna n -ésima es el resultado de multiplicar el elemento de la fila m -ésima y la columna n -ésima para $m, n = 1, 2, \dots, 7$.

De la Tabla 2 se pueden inferir algunas propiedades interesantes:

- e_j con $j = 1, 2, \dots, 7$ son raíces cuadradas de -1 .
- Si $e_i e_j = e_k$ entonces $e_{2j} e_{2k} = e_{2i}$.

2.3. Plano de Fano

Como se vió anteriormente, \mathbb{H} tiene como identidad multiplicativa a 1 y los elementos e_1, e_2, e_3 son raíces cuadradas de -1 . Además $e_1 e_2 = e_3$, $e_2 e_1 = -e_3$, usando la permutación cíclica (e_1, e_2, e_3) que puede ser graficada como lo muestra la Figura 1 tomada de [1]

De la Figura 1 se observa que al multiplicar dos elementos en el sentido de las manecillas del reloj, se obtiene el siguiente elemento del ciclo, por ejemplo $e_i e_j = e_k$ y cuando se multiplican dos en el sentido contrario de las manecillas del reloj se obtiene el elemento siguiente pero negativo, por ejemplo $e_i e_k = -e_j$. Para más detalle ver [1].

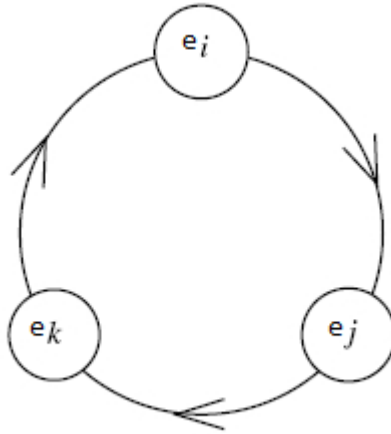


Figura 1: Permutación cíclica de \mathbb{H} . Al multiplicar dos elementos de $\{e_1, e_2, e_3\}$ en el sentido de las manecillas del reloj, se obtiene el siguiente elemento del ciclo, por ejemplo $e_i e_j = e_k$ y cuando se multiplican dos en el sentido contrario de las manecillas del reloj se obtiene el elemento siguiente pero negativo, por ejemplo $e_i e_k = -e_j$. Ver [1]

\cdot	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
1	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	-1	e_4	e_7	$-e_2$	e_6	$-e_5$	$-e_3$
e_2	e_2	$-e_4$	-1	e_5	e_1	$-e_3$	e_7	$-e_6$
e_3	e_3	$-e_7$	$-e_5$	-1	e_6	e_2	$-e_4$	e_1
e_4	e_4	e_2	$-e_1$	$-e_6$	-1	e_7	e_3	$-e_5$
e_5	e_5	$-e_6$	e_3	$-e_2$	$-e_7$	-1	e_1	e_4
e_6	e_6	e_5	$-e_7$	e_4	$-e_3$	$-e_1$	-1	e_2
e_7	e_7	e_3	e_6	$-e_1$	e_5	$-e_4$	$-e_2$	-1

Tabla 3: Tabla de multiplicación de \mathbb{O} usando la regla de multiplicación $e_i e_{i+1} = e_{i+3}$, para $1 \leq i \leq 7$.

Ahora, el plano de Fano resulta ser un grafo de 7 vértices y 7 aristas (correspondientes a 3 lados de un triángulo, sus 3 alturas y el círculo formado por los puntos medios del triángulo en cuestión) en el cual cada par de puntos distintos se encuentran en una única arista y cada arista contiene tres puntos que tienen un comportamiento cíclico como se muestra en la Figura 2, tomada de [1]. Para ello, el autor utiliza otra regla cíclica de multiplicación en \mathbb{O} :

$$e_i e_{i+1} = e_{i+3},$$

para $1 \leq i \leq 7$, de la cual se obtiene la Tabla 3.

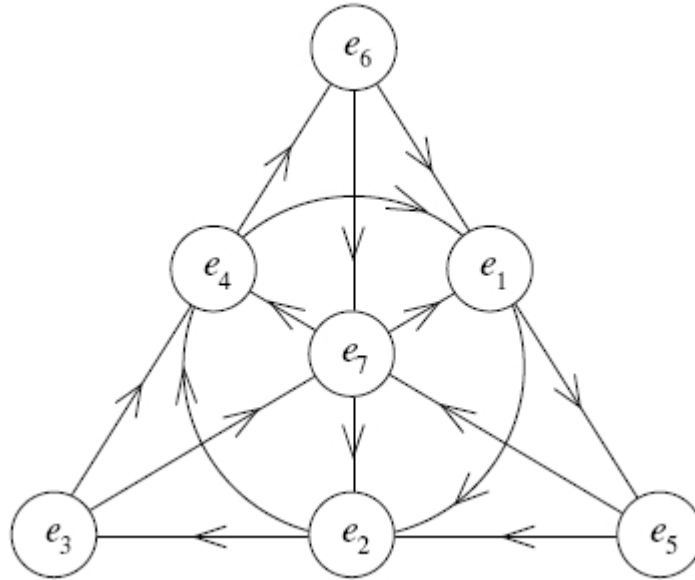


Figura 2: Plano de Fano. Grafo de 7 vértices y 7 aristas. Se forma un triángulo con sus 3 alturas y un círculo que es tangente a los puntos medios de cada lado del triángulo. En este grafo cada par de puntos se encuentran en una única arista y cada una contiene tres puntos que describen un comportamiento cíclico. Por ejemplo, $e_3e_4 = e_6$ y $e_6e_7 = e_2$. Para más detalle ver [1].

El plano de Fano resulta ser el más pequeño de los planos proyectivos [12] sobre los elementos del cuerpo \mathbb{Z}_2 . Es decir, como cada línea contiene un elemento distinto de cero, el plano de Fano es el plano que contiene los elementos de \mathbb{Z}_2^3 y, haciendo corresponder el origen a la identidad multiplicativa de \mathbb{O} , se tiene esta otra representación de \mathbb{O} . Ver [1].

De la figura 3 se puede deducir que los planos que pasan a través del origen de este espacio vectorial dan un álgebra isomorfa a \mathbb{H} , las líneas que pasan por el origen resultan ser isomorfas a \mathbb{C} y el origen en sí mismo da una subálgebra isomorfa a \mathbb{R} . Para profundizar en ello, consultar [1].

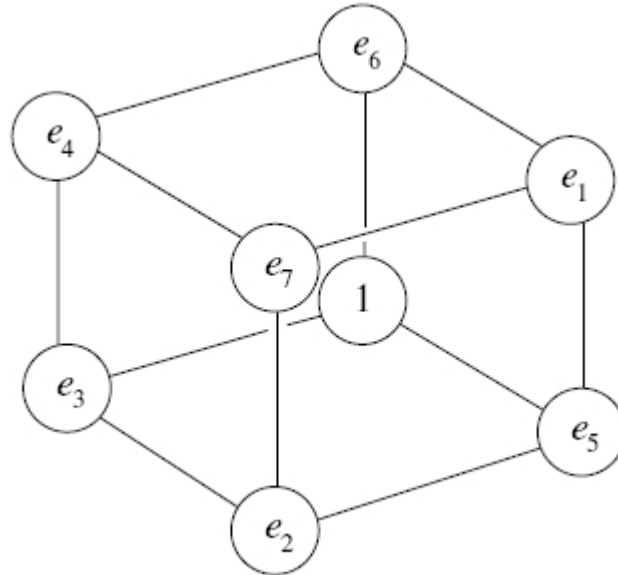


Figura 3: \mathbb{Z}_2^3 . Representación alterna de los octoniones en la que cada línea del cubo contiene un elemento distinto de cero. Además al hacer corresponder el vértice etiquetado por 1 (la identidad multiplicativa en \mathbb{Z}_3) al origen del plano tridimensional, cada plano que pasa por este resulta ser un álgebra isomorfa a los cuaterniones, las líneas que pasan por el origen son álgebras isomorfas a los complejos y el origen en sí mismo es una subálgebra isomorfa a \mathbb{R} . Para más detalles ver [1].

2.4. Construcción de Cayley-Dickson

La idea general en esta subsección es presentar el proceso en el cual se construye un álgebra A' a partir de otra álgebra A , viendo los elementos de A' como parejas ordenadas de elementos de A y en la cual A' tiene el doble de dimensión de A . Con este proceso se verifica la existencia y unicidad de las 4 álgebras de división normada y las propiedades de cada una de ellas [13].

Como se sabe, el número complejo $a+bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$ se puede definir como el par ordenado (a, b) de números reales y las operaciones de suma, multiplicación y conjugación se definen respecto a las componentes. Ahora, teniendo \mathbb{C} como el conjunto de todos estos pares ordenados, se puede definir \mathbb{H} de una forma similar, en donde un cuaternión es una pareja de números complejos. Así mismo, es posible definir \mathbb{O} como el conjunto de todos los pares ordenados (c, d) tal que $c, d \in \mathbb{H}$.

A este proceso de obtener nuevas álgebras usando anteriores, se le denomina la construcción de Cayley-Dickson. Sin embargo, cada vez que se aplica el proceso, se van perdiendo propiedades del álgebra anterior; por ejemplo en \mathbb{R}

cada elemento es su propio conjugado pero en \mathbb{C} esto ya no se tiene. En \mathbb{H} la multiplicación no es conmutativa lo que si se tiene en \mathbb{C} . Para \mathbb{O} ya no se tiene la asociatividad que si se tenía en \mathbb{H} . Finalmente al construir los sedeniones (álgebra de dimensión 16) se pierde la propiedad de ser álgebra de división que claramente se tiene en \mathbb{O} . Ver [1].

Un álgebra A se dice $*$ -álgebra si está dotada con una función real $*$: $A \rightarrow A$ tal que $a^{**} = a$ y $(ab)^* = b^*a^*$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$. Se dice que una $*$ -álgebra es real si $a = a^*$ para cada elemento a en el álgebra. Además un $*$ -álgebra A está adecuadamente normada si $a + a^* \in \mathbb{R}$ y $aa^* = a^*a > 0$ para todo $a \in A$ distinto de cero.

Si A está adecuadamente normada, $\text{Re}(a) = (a + a^*)/2$ e $\text{Im}(a) = (a - a^*)/2$ y se define la norma sobre A como $\|a\|^2 = aa^*$. Además, A tiene inversos multiplicativos dados por $a^{-1} = a^*/\|a\|^2$. Para mayor detalle sobre lo anterior, ver [1].

Si A está adecuadamente normado y es alternativo (como se vió en los preliminares, A es un subálgebra generada por dos elementos y es asociativa), A es un álgebra de división normada. Para ver esto, note que para cualesquiera $a, b \in A$, los elementos a, b, a^*, b^* pertenecen al álgebra generada por $\text{Im}(a)$ e $\text{Im}(b)$, tal que

$$\|ab\|^2 = (ab)(ab)^* = ab(b^*a^*) = a(bb^*)a^* = \|a\|^*\|b\|^*.$$

En la construcción de Cayley-Dickson por cada $*$ -álgebra A se obtiene una nueva $*$ -álgebra A' . Los elementos de A' son parejas $(a, b) \in A^2$. Las siguientes proposiciones muestran el efecto de aplicar repetidamente la construcción de Cayley-Dickson, ver [1]:

Proposición 2.1. *A es conmutativo y asociativo si y sólo si A' es asociativo.*

Proposición 2.2. *A es real si y sólo si A' es conmutativo.*

Proposición 2.3. *A es asociativo y está adecuadamente normado si y sólo si A' es alternado y está adecuadamente normado.*

Proposición 2.4. *A' nunca es real.*

Proposición 2.5. *A está adecuadamente normado si y sólo si A' está adecuadamente normado.*

De estas proposiciones se sigue que, como \mathbb{R} es un $*$ -álgebra real, conmutativa, asociativa y adecuadamente normada entonces \mathbb{C} es $*$ -álgebra conmutativa, asociativa y está adecuadamente normada. A su vez, por lo anterior \mathbb{H} es un $*$ -álgebra asociativa adecuadamente normada y por lo tanto, \mathbb{O} es un $*$ -álgebra adecuadamente normada. Es decir, \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{H} y \mathbb{O} son álgebras de división normada. También se infiere que los octoniones no son ni reales, ni conmutativos, ni asociativos. Para profundizar en lo anterior, ver [1].

La construcción de Cayley-Dickson brinda una interesante forma de obtener la secuencia \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{H} , \mathbb{O} y las propiedades básicas de estas álgebras. Para entender el significado de esta construcción, se define A' como el álgebra formada al adjuntar un elemento i a A tal que $i^2 = -1$ junto con las relaciones:

$$a(ib) = i(a*b), \quad (ai)b = (ab*)i, \quad (ia)(bi^{-1}) = (ab)^* \quad (7)$$

para todo $a, b \in A$. Es decir, es posible expresar la operación $*$ en A como la conjugación por i . En particular,

$$a^* = (ia)i^{-1} = i(ai^{-1})$$

para todo $a \in A$. Note que cuando A' es asociativa, cualquiera de las relaciones en (6) implica las otras dos, de modo contrario se requieren las tres relaciones.

Esta interpretación de la construcción de Cayley-Dickson hace más evidente lo que pasa cuando se aplica repetidamente la construcción empezando con \mathbb{R} . En \mathbb{R} la operación $*$ no tiene ninguna acción en los elementos de esta álgebra dado que el conjugado de cualquier elemento es el mismo elemento. Como \mathbb{R} es conmutativo, $\mathbb{C} = \mathbb{R}'$ es conmutativo y dado que \mathbb{C} no es real, $i^* = -i$. Como \mathbb{C} es conmutativo, la operación $*$ en \mathbb{C} es un automorfismo α y dado que es un álgebra asociativa, se puede extender \mathbb{C} adjuntando un elemento invertible x tal que $\alpha(a) = xax^{-1}$ para todo $a \in \mathbb{C}$. Dada la asociatividad de \mathbb{C} , $\mathbb{C}' = \mathbb{H}$ es asociativo. Pero como \mathbb{C} no es real, \mathbb{H} no puede ser conmutativo y además la conjugación por el elemento i añadido recientemente tendrá un efecto no trivial.

Finalmente, aplicando la construcción de Cayley-Dickson a \mathbb{H} , como este no es conmutativo, $*$ no es un automorfismo en \mathbb{H} sino un antiautomorfismo; esto significa que no se puede expresar la conjugación por un elemento de un álgebra más grande. Luego $\mathbb{H}' = \mathbb{O}$ debe ser no asociativo. Tal como se ha venido mencionando en la sección. Ver [1].

2.5. Álgebras de Clifford

Las álgebras de Clifford fueron propuestas por William K. Clifford en 1878-1882 cuando introdujo una nueva regla de multiplicación en el álgebra exterior $\bigwedge \mathbb{R}^n$ en la cual usaba una base ortonormal (e_1, e_2, \dots, e_n) de \mathbb{R}^n . Clifford clasificó sus álgebras en cuatro clases de acuerdo a los signos en $(e_1 e_2 \dots e_n)^2 = \pm 1$ y $(e_1 e_2 \dots e_n) e_i = \pm e_i (e_1 e_2 \dots e_n)$. En el caso especial de $n = 3$, la construcción de Clifford coincide con la definición de los cuaterniones de Hamilton [9].

Uno de los logros al usar las álgebras de Clifford es explicar cómo las rotaciones en \mathbb{R}^n son inducidas por la acción de cierto grupo, $\mathbf{Spin}(n)$, sobre \mathbb{R}^n . De modo que se generalice la acción de los números complejos unitarios, $\mathbf{U}(1)$, sobre \mathbb{R}^2 y la acción de los cuaterniones unitarios $\mathbf{SU}(2)$ sobre \mathbb{R}^3 (es decir, la acción está definida en términos de la multiplicación en una álgebra más grande conteniendo tanto a $\mathbf{Spin}(n)$ como a \mathbb{R}^n). El grupo $\mathbf{Spin}(n)$, llamado *grupo spinor* se define como un subgrupo unitario de un álgebra, $\mathbf{Cliff}(n)$, el álgebra de Clifford asociada a \mathbb{R}^n . Para más detalle, ver [9].

En la teoría que se presentará a continuación hay un sustento teórico relacionado con las formas bilineales, el producto exterior (que puede ser visto en detalle en [8]) y los operadores definidos para las rotaciones del espacio (cuya relación con lo anterior puede verse en [9]).

Dado un espacio V con producto interno real $\langle \cdot, \cdot \rangle$, el álgebra de Clifford $\text{Cliff}(V)$ es el álgebra asociativa libremente generada por V módulo la relación

$$\langle v \rangle^2 = -\|v\|^2$$

para todo $v \in V$. Equivalentemente, es el álgebra asociativa libremente generada por V módulo la relación

$$\langle vw \rangle + \langle wv \rangle = -2\langle v, w \rangle$$

para todo $v, w \in V$. Si $V = \mathbb{R}^n$ con su producto interno usual, llamamos a esta álgebra de Clifford $\mathbf{Cliff}(n)$ [1]. Específicamente, esta es el álgebra asociativa libremente generada por n raíces cuadradas de -1 que anticonmutan. Por lo tanto

$$\text{Cliff}(0) = \mathbb{R}, \quad \text{Cliff}(1) = \mathbb{C}, \quad \text{Cliff}(2) = \mathbb{H}.$$

Es notoria la relación entre las álgebras de Clifford y las álgebras de división normada (dado que \mathbb{O} no es asociativa, no tiene asociada un álgebra de Clifford) lo que permitirá entender la geometría de los octoniones. Para ver esta relación, primero supóngase \mathbb{K} un álgebra de división normada. La multiplicación a izquierda por cualquier elemento $a \in \mathbb{K}$ da un operador

$$L_a : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, \\ x \mapsto ax.$$

Si $\|a\| = 1$, el operador L_a preserva la norma y por lo tanto la imagen de la esfera unitaria de \mathbb{K} es ella misma. Como \mathbb{K} es un álgebra de división, es posible encontrar un operador de esta forma que mapee cualquier punto sobre la esfera unitaria a cualquier otro punto. La única forma en que la esfera unitaria de \mathbb{K} pueda tener tanta simetría es si la norma sobre \mathbb{K} resulta ser un producto interno [1]. Aún mejor, este producto interno es único, luego se puede usar la identidad de polarización

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$$

tal como se quería. Ver [1].

Usando este producto interno, se dice que un elemento $a \in \mathbb{K}$ es imaginario si es ortogonal al elemento 1, e $\text{Im}(\mathbb{K})$ es el espacio de elementos imaginarios de \mathbb{K} que también puede ser visto como el espacio tangente a la esfera unitaria de \mathbb{K} en el punto 1, ver [1]. Esto trae una agradable consecuencia: la imagen de la esfera unitaria de \mathbb{K} bajo $a \mapsto L_a$ es el grupo de Lie de transformaciones ortogonales de \mathbb{K} . Por lo tanto, L_a es un adjunto torcido siempre que a sea imaginario. Para más detalle ver [1].

La relación con las álgebras de Clifford aparece cuando se calcula el cuadrado de L_a para $a \in \text{Im}(\mathbb{K})$, lo cual puede hacerse más fácil cuando $\|a\| = 1$. Entonces L_a es ortogonal y adjunto torcido. Para cualquier transformación ortogonal, podemos encontrar una base ortonormal en la cual su matriz es diagonal en bloques con bloques de tamaño 2×2 que lucen de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Tal transformación puede ser adjunta torcida si esta consta solamente de bloques 2×2 de esta forma:

$$\pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En este caso, su cuadrado es -1 . Entonces se tiene $L_a^2 = -1$ cuando $a \in \text{Im}(\mathbb{K})$ con $\|a\| = 1$. Luego $L_a^2 = -\|a\|^2$ para todo $a \in \text{Im}(\mathbb{K})$. Así se obtiene una representación del álgebra de Clifford $\text{Cliff}(\text{Im}(\mathbb{K}))$ sobre \mathbb{K} . Cualquier álgebra de división normada n -dimensional da una n -representación de $\text{Cliff}(n-1)$.

Usando el hecho anterior y la teoría en la cual las álgebras de Clifford obedecen a cierta peridicidad (para más detalle de esta afirmación, ver [1, 9]) se sigue que las álgebras de división normadas solo son posibles en dimensiones 1, 2, 4 y 8. Para probar que estas son únicas, se usa fuertemente la relación entre las álgebras de división normadas y la construcción de Cayley-Dickson. Sea \mathbb{K} un álgebra de división normada, existe un único operador lineal $*$: $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ tal que $1^* = 1$ y $a^* = -a$ para $a \in \text{Im}(\mathbb{K})$, con lo cual se tiene que \mathbb{K} resulta ser una $*$ -álgebra muy bien normada.

Ahora, supóngase que \mathbb{K}_0 es cualquier subálgebra del álgebra de división normada \mathbb{K} , la cual resulta ser un $*$ -álgebra muy bien normada. Si \mathbb{K}_0 no es todo \mathbb{K} , es posible encontrar un elemento $i \in \mathbb{K}$ que es ortogonal a cada elemento de \mathbb{K}_0 . Sin pérdida de generalidad, se asume que este elemento tiene norma 1 y por su ortogonalidad, resulta ser imaginario. De la definición del operador $*$ se sigue que $i^* = -i$ y de los resultados previos se tiene que $i^2 = -1$, Además se tiene que

$$a(ia') = i(a^*a'), \quad (ai)a' = (aa'^*i), \quad (ia)(a'i^{-1}) = (aa')^*$$

que es muy similar a (6) definiendo así la construcción de Cayley-Dickson. Con un corto análisis, se sigue que el subálgebra de \mathbb{K} generado por \mathbb{K}_0 e i es isomorfo (como $*$ -álgebra) a \mathbb{K}_0 , el álgebra obtenida usando la construcción de Cayley-Dickson. Ver [1].

Entonces, dado un álgebra de división normada \mathbb{K} , es posible encontrar una cadena de subálgebras $\mathbb{R} = \mathbb{K}_0 \subset \mathbb{K}_1 \subset \dots \subset \mathbb{K}_n = \mathbb{K}$ tal que $\mathbb{K}_{i+1} \cong \mathbb{K}_i$. Para construir \mathbb{K}_{i+1} solo se debe escoger un elemento de norma 1 en \mathbb{K} que sea ortogonal a cada elemento de \mathbb{K}_i . Por lo tanto las únicas álgebras de división normadas de dimensión 1, 2, 4 y 8 son \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{H} y \mathbb{O} . Ver [1].

2.6. Spinors y trialidades

La dualidad es un concepto importante en el álgebra lineal en el que dados dos espacios vectoriales V_1, V_2 , la dualidad es una función bilineal

$$f : V_1 \times V_2 \rightarrow \mathbb{R}$$

que si deja fijo cualquier argumento en un valor distinto de cero (no degenerada), el funcional lineal inducido en el otro espacio vectorial es distinto de cero.

Similarmente, se define el concepto de trialidad que hace más natural el concepto de álgebra de división no asociativa. Sean V_1, V_2, V_3 espacios vectoriales, una trialidad es una función trilineal

$$t : V_1 \times V_2 \times V_3 \rightarrow \mathbb{R}$$

que es no degenerada en el sentido que si fija cualesquiera dos argumentos a valores distintos de cero, el funcional lineal inducido en el tercer espacio vectorial es distinto de cero.

Las dualidades son sencillas de obtener. Mientras que las trialidades son un poco más complicadas. Supóngase que se tiene una trialidad

$$t : V_1 \times V_2 \times V_3 \rightarrow \mathbb{R}$$

en la que dualizando (usando el espacio dual del espacio vectorial en cuestión, en este caso V_3), se puede convertir en una función bilineal

$$V_1 \times V_2 \rightarrow V_3^*$$

la cual se llamará multiplicación. Para ver la construcción completa de esta dualidad (ver [9] pag. 300). Por la no degeneración de la trialidad, la multiplicación a izquierda (derecha) por cualquier elemento distinto de cero de V_1 (V_2) define un isomorfismo de V_2 (V_1) a V_3^* (V_3^*). Si se escogen elementos no nulos $e_1 \in V_1$ y $e_2 \in V_2$, se pueden identificar los tres espacios vectoriales como uno sólo V , de donde $e_1 e_2 \in V_3^*$ y $e \in V$. Entonces se obtiene el producto

$$m : V \times V \rightarrow V$$

para el cual e es la unidad a derecha e izquierda. Como la multiplicación a izquierda y derecha por cualquier elemento no nulo es un isomorfismo, V es un álgebra de división. A la inversa, cualquier álgebra de división define una trialidad. Y por lo estudiado anteriormente, las trialidades sólo ocurren en dimensiones 1, 2, 4 u 8 [1].

Por otro lado, una trialidad normada consiste en los productos internos de los espacios vectoriales V_1, V_2, V_3 equipados con una función trilineal $t : V_1 \times V_2 \times V_3 \rightarrow \mathbb{R}$ con

$$|t(v_1, v_2, v_3)| \leq \|v_1\| \|v_2\| \|v_3\|,$$

tal que para todo v_1, v_2 existe $v_3 \neq 0$ en el cual se tiene la igualdad y similarmente para las permutaciones cíclicas de 1, 2, 3. Dada una triadidad normada, escogiendo los vectores unitarios en cualesquiera dos de los espacios V_i nos permiten identificar todos los tres espacios y obtener un álgebra de división normada. A la inversa, cualquier álgebra de división normada da una triadidad normada [1].

Las triadidades normadas provienen de la teoría de spinors. Las representaciones de $\text{Cliff}(n-1)$ dan ciertas representaciones de $\text{Spin}(n)$, la doble cubierta del grupo de rotación en n dimensiones. Estas son llamadas “spinors” [9]. Se observará que la relación entre los spinors y los vectores brinda una buena forma de construir triadidades normadas en dimensiones 1, 2, 4 y 8. Para poder entender esto, se define $\text{Pin}(n)$ como el grupo ubicado dentro de $\text{Cliff}(n)$ que consta de todos los productos de vectores unitarios en \mathbb{R}^n . Este grupo es una doble cubierta del grupo ortogonal $O(n)$, donde cualquier vector unitario $v \in \mathbb{R}^n$ mapea $\pm v \in \text{Pin}(n)$ al elemento de $O(n)$ que refleja a través del hiperplano perpendicular a v . Como cada elemento de $O(n)$ es un producto de reflexiones, este homomorfismo es necesariamente sobre [1].

Sea ahora $\text{Spin}(n) \subset \text{Pin}(n)$ el subgrupo que consta de todos los elementos que son un producto de un número par de vectores unitarios en \mathbb{R}^n . Un elemento de $O(n)$ tiene determinante 1 si y sólo si es el producto de un número par de reflexiones, así como $\text{Pin}(n)$ es una doble cubierta de $O(n)$, $\text{Spin}(n)$ es una doble cubierta de $\text{SO}(n)$. Para más detalle, ver [1].

Como $\text{Pin}(n)$ está dentro de $\text{Cliff}(n)$, las representaciones irreducibles de $\text{Cliff}(n)$ se restringen a las representaciones de $\text{Pin}(n)$, que resultan ser también irreducibles y son llamados **pinors**. Similarmente, $\text{Spin}(n)$ está dentro de la subálgebra

$$\text{Cliff}_0(n) \subset \text{Cliff}(n)$$

que consta de todas las combinaciones lineales de productos de un número par de vectores en \mathbb{R}^n . Luego las representaciones irreducibles de $\text{Cliff}_0(n)$ se restringen a las representaciones de $\text{Spin}(n)$, que resultan ser irreducibles y son llamados **spinors**. Para más detalle, ver [9].

De hecho, existe un isomorfismo

$$\phi : \text{Cliff}(n-1) \rightarrow \text{Cliff}_0(n)$$

tal que $\phi(e_i) = e_i e_n$, $1 \leq i \leq n-1$, donde e_i es una base ortonormal para \mathbb{R}^n . Entonces los spinors en n dimensiones son los mismos pinors en $n-1$ dimensiones.

Sea S_n^+ y S_n^- las representaciones de spinors derechas e izquierdas. Todas las representaciones de spinor aquí serán auto-duales, luego se pueden dualizar las funciones dadas a continuación y reinterpretarlas como funciones trilineales

$$\begin{cases} t_n : V_n \times S_n^+ \times S_n^- \rightarrow \mathbb{R} & n \equiv 0, 4 \pmod{8} \\ t_n : V_n \times S_n \times S_n \rightarrow \mathbb{R} & \text{de otra forma,} \end{cases}$$

que son candidatas a ser trialidades. Pero pueden serlo cuando la dimensión de las representaciones vectoriales concuerde con la representación del spinor relevante. Estas funciones trilineales resultan ser

$$\begin{aligned} t_1 : V_1 \times S_1 \times S_1 &\rightarrow \mathbb{R} \quad \text{da } \mathbb{R}. \\ t_2 : V_2 \times S_2 \times S_2 &\rightarrow \mathbb{R} \quad \text{da } \mathbb{C}. \\ t_4 : V_4 \times S_4^+ \times S_4^- &\rightarrow \mathbb{R} \quad \text{da } \mathbb{H}. \\ t_8 : V_8 \times S_8^+ \times S_8^- &\rightarrow \mathbb{R} \quad \text{da } \mathbb{O}. \end{aligned}$$

En dimensiones más grandes, la representación de spinor se vuelve más grande que la representación vectorial, luego no existen más trialidades [1].

De las cuatro trialidades normadas, t_8 tiene propiedades interesantes. Para conocer estas propiedades, se debe prestar mucha atención a la diferencia entre una trialidad normada y un álgebra de división normada [1]. Para construir un álgebra \mathbb{K} de división normada de la trialidad normada $t : V_1 \times V_2 \times V_3 \rightarrow \mathbb{R}$, se deben escoger arbitrariamente vectores unitarios en dos de los tres espacios, tal que el grupo de simetría de \mathbb{K} sea más pequeño que el de t . Más precisamente, se define un automorfismo de la trialidad normada t para que sea una tripla de la función que preserva la norma $f_i : V_i \rightarrow V_i$ tal que

$$t(f_1(v_1), f_2(v_2), f_3(v_3)) = t(v_1, v_2, v_3),$$

para todo $v_i \in V_i$. Estos automorfismos forman el grupo $\text{Aut}(t)$. Si se construye el álgebra de división normada \mathbb{K} de t escogiendo vectores unitarios $e_1 \in V_1$, $e_2 \in V_2$, se tiene

$$\text{Aut}(\mathbb{K}) \cong \{(f_1, f_2, f_3) \in \text{Aut}(t) : f_1(e_1) = e_1, f_2(e_2) = e_2\}.$$

En particular, se tiene que

$$\begin{aligned} 1 &\cong \text{Aut}(\mathbb{R}) \subset \text{Aut}(t_1) \cong \{(g_1, g_2, g_3) \in \text{O}(1)^3 : g_1 g_2 g_3 = 1\} \\ \mathbb{Z}_2 &\cong \text{Aut}(\mathbb{C}) \subset \text{Aut}(t_2) \cong \{(g_1, g_2, g_3) \in \text{U}(1)^3 : g_1 g_2 g_3 = 1\} \times \mathbb{Z}_2 \\ \mathbb{S}\mathbb{O}_3 &\cong \text{Aut}(\mathbb{H}) \subset \text{Aut}(t_4) \cong \text{Sp}(1)^3 \setminus \{\pm(1, 1, 1)\} \\ \text{G}_2 &\cong \text{Aut}(\mathbb{O}) \subset \text{Aut}(t_8) \cong \text{Spin}(8) \end{aligned}$$

donde

$$\text{O}(1) \cong \mathbb{Z}_2, \quad \text{U}(1) \cong \mathcal{S}\mathcal{O}(2), \quad \text{Sp}(1) \cong \text{SU}(2),$$

son las esferas unitarias en \mathbb{R} , \mathbb{O} y \mathbb{H} respectivamente, y las únicas esferas que están en grupos de Lie. G_2 es el mismo grupo de automorfismos de los octoniones. El grupo más grande, $\text{Spin}(8)$, actúa como automorfismo de la trialidad que da \mathbb{O} y lo hace de una forma interesante. Dado un elemento $g \in \text{Spin}(8)$, existen elementos únicos $g_{\pm} \in \text{Spin}(8)$ tal que

$$t(g(v_1), g_+(v_2), g_-(v_3)) = t(v_1, v_2, v_3)$$

para todo $v_1 \in V_8$, $v_2 \in S_8^+$ y $v_3 \in S_8^-$. Incluso, las funciones

$$\alpha_{\pm} : g \rightarrow g_{\pm}$$

son automorfismos externos que tienen el efecto de permutar las representaciones vectoriales, del spinor izquierdo y del derecho como cualquier otro; α_+ y α_- están entre ellos. Para más detalle, ver [1].

3. Geometría

3.1. Octoniones como vectores en \mathbb{R}^7 y \mathbb{R}^8 .

Para un octonión x de la forma (1), puede definirse de manera análoga a los complejos $\text{Re}(x) = 1/2(x + \bar{x})$ y $\text{Im}(x) = 1/2(x - \bar{x})$, donde $\text{Re}(x) = x_{\infty}$, pero en este caso $\text{Im}(x)$ no corresponde a un real, pues se tienen siete grados de libertad para la parte imaginaria y puede considerarse como un vector en \mathbb{R}^7 [6]. En adelante notaremos por $\text{Im}(\mathbb{O})$ al conjunto de octoniones imaginarios.

En \mathbb{O} se tiene que $\pm e_1, \dots, \pm e_7$ no son las únicas raíces de -1 (Esto también se tiene en los cuaterniones \mathbb{H}).

Teorema 3.1. *Dado $\hat{s} \in \text{Im}(\mathbb{O})$ tal que $|\hat{s}| = 1$, entonces \hat{s} es raíz de -1 .*

Demostración. Dado que $\hat{s} \in \text{Im}(\mathbb{O})$, usando (2) tenemos $\bar{\hat{s}} = -\hat{s}$, luego, usando (5), $\hat{s}^{-1} = -\hat{s} \Leftrightarrow \hat{s}^2 = -1$. □

Los octoniones imaginarios de modulo uno, forman una 6-esfera en un espacio 7-dimensional de los octoniones imaginarios [6].

Para $x, y \in \text{Im}(\mathbb{O})$ ortogonales ($x \cdot y = 0$), de (2) y (4), $x \cdot y = 0 = x\bar{y} + y\bar{x} = -xy - yx$, entonces, $x \cdot y = 0 \Leftrightarrow xy = -yx$. Así, para octoniones imaginarios, ortogonalidad resulta ser equivalente a anticonmutatividad, se puede considerar entonces un producto cruz en $\text{Im}(\mathbb{O})$ 7-dimensional, bilineal y anticonmutativo, análogo al producto cruz en tres dimensiones, que cumple dos propiedades geométricas importantes (7) y (8) del producto cruz en 2 o 3 dimensiones.

$$\|x \times y\|^2 = \|x\|^2 \|y\|^2 - (x \cdot y)^2 \tag{8}$$

$$\|x \times y\| = |\text{sen}(\theta)| \|x\| \|y\| \tag{9}$$

Donde θ es el ángulo entre x e y . Las ecuaciones (8) y (9) son equivalentes, conocidas como igualdad de Lagrange; se puede obtener una expresión para el producto cruz de dos octoniones imaginarios en términos de su multiplicación y su producto punto $x \times y = xy + (x \cdot y)$ ([1] pag 38.) Existe otro producto cruzado generalizado de más de dos vectores, a saber, un producto de tres vectores en \mathbb{R}^8 , que también está relacionado con los octoniones, definido por $x \times y \times z = \frac{1}{2}(x(\bar{y}z) - z(\bar{y}x))$ para octoniones x, y y z (Para estos conceptos vea e.g., el libro [6]).

De manera análoga a la forma exponencial de los complejos, escogiendo un octonión arbitrario \hat{s} unitario, dado $x \in \mathbb{O}$, podemos escribirlo de la siguiente forma.

$$x = r e^{\hat{s}\theta} = r(\cos\theta + \hat{s}\text{sen}\theta) \text{ donde } |x| = r \quad (10)$$

Puede construirse una subálgebra compleja de \mathbb{O} , denotada y definida por $\mathbf{C} = \{a + b\hat{s}\}$ (por su analogía con \mathbb{C}) con $a, b \in \mathbb{R}$. Tomando otro octonión imaginario \hat{t} de modulo uno, en dirección distinta a \hat{s} , se puede construir una subálgebra cuaterniónica de \mathbb{O} , llamamos esta \mathbf{H} , que estará dada por $\mathbf{H} = \{a + b\hat{s} + c\hat{t} + d\hat{s}\hat{t}\}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ([6] pag 19).

3.1.1. Grupos Ortogonales, Octoniones y el Grupo \mathcal{SO}_8

En general un Grupo Ortogonal \mathcal{GO}_n es el conjunto de todas las isometrías (aplicación entre dos espacios métricos que conserva la distancia entre puntos) de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n que fijan el origen. (ver [4] pag 6.)

Teorema 3.2. *Dado $\alpha \in \mathcal{GO}_n$ que fija un subespacio k -dimensional, puede ser escrito como el producto de a lo más $n-k$ reflexiones.*

Demostración. Tome un vector \vec{v} no fijo por α , es decir $\alpha(\vec{v}) = \vec{w}$ con $\vec{v} \neq \vec{w}$. Entonces la reflexión $\vec{v} - \vec{w}$ devuelve \vec{w} a \vec{v} , donde es fijado algún vector \vec{u} por α . \square

Como $\alpha \in \mathcal{GO}_n$ fija el origen, subespacio de dimensión cero, recordemos que el determinante de una reflexión es -1, entonces el determinante de α arbitrario será ± 1 , dependiendo si la dimensión del subespacio que fija es par o impar.

El subgrupo de elementos de \mathcal{GO}_n con determinante +1 se denomina el Grupo Ortogonal Especial \mathcal{SO}_n , que sera el subgrupo de rotaciones simples (ver [4] pag 6.). El propósito de los resultados siguientes es mostrar que la multiplicación por octoniones unitarios genera \mathcal{SO}_8 (siguiendo la idea de [4], además el mismo resultado se tiene para los unitarios de los complejos que generan \mathcal{SO}_2 y de los cuaterniones que generan \mathcal{SO}_4).

Teorema 3.3. *Si $x(ry) = (xr)y$ para todos par de octoniones x, y , entonces r es real.*

Demostración. Dado que $(i_1 i_0) i_2 = -i_1 (i_0 i_2)$, entonces $(i_1 r) i_2 = i_1 (r i_2)$ el coeficiente de i_0 en r debe ser 0, lo mismo ocurrirá para i_n con $0 \leq n \leq 6$ por $(i_{n+1} i_n) i_{n+2} = -i_{n+1} (i_n i_{n+2})$. \square

Para poder continuar con el siguiente teorema, se define una isotopía como una tripla de funciones invertibles que preservan la propiedad de ser invertibles. Hay dos notaciones apropiadas para describir esta definición, $(\alpha, \beta | \gamma)$ que implica $x^\alpha y^\beta = (xy)^\gamma$ que es la forma en dupla, y (α, β, γ) la forma en tripla que implica $xyz = 1$ entonces $x^\alpha y^\beta z^\gamma = 1$. Una monotopía sera una de las funciones de una isotopía, un par de compañeros de una monotopía γ son un par x, y tales que $xy = z$ implica $x^\alpha y^\beta = z^\gamma$ [4].

Teorema 3.4. *Si a, b octoniones son un par de compañeros para la monotopía γ , entonces existe otro par de la forma $ar, r^{-1}b$ donde r es real.*

La demostración de este teorema puede consultarse en [4] pag. 90.

Dado que los octoniones no son asociativos bajo la multiplicación, se definen los operadores de multiplicación a izquierda L_x , multiplicación a derecha R_x y bi-multiplicación B_x , por $L_x : y \rightarrow xy$, $R_x : y \rightarrow yx$, y $B_x : y \rightarrow xyx$ (para ampliar estos conceptos vea e.g., [4] pag 72 a 74).

Teorema 3.5. *Si γ es un elemento de \mathcal{SO}_8 , existen α y β en \mathcal{SO}_8 para los cuales $(\alpha, \beta|\gamma)$ es una isotopía (entonces γ es una monotopía). Mas aún, α, β están definidos de manera única excepto por el signo, es decir, el único par adicional que cumple el teorema es $-\alpha, -\beta$.*

Para probar este teorema necesitaremos el siguiente lema.

Lema 3.6. *Las operaciones $ref(l)ref(a)$ y $ref(a)ref(1)$ son bi-multiplicaciones para octoniones unitarios.*

Demostración. Estas operaciones no se ven afectadas si re-escalamos a para que quede de norma uno. Entonces para la primera operación encontramos que coincide con el operador B_a y la segunda resulta ser la inversa $B_a^{-1} = B_{\bar{a}}$. Que como están definidas resultan ser bi-multiplicaciones para octoniones unitarios.

Demostración teorema 5. Podemos escribir γ como el siguiente producto de un número par de reflexiones

$$\gamma = ref(a_1)ref(b_1)ref(a_2)ref(b_2) \cdots ref(a_{2n})ref(b_{2n})$$

Ahora, por el Lema 3.6.

$$ref(a_i)ref(b_i) = ref(a_i)ref(1)ref(1)ref(b_i)$$

es el producto por dos bi-multiplicaciones de octoniones unitarios, entonces γ es el producto de $2n$ bi-multiplicaciones de octoniones unitarios $B_{C_1}B_{C_2} \cdots B_{C_{2n}}$. Entonces

$$(\alpha, \beta|\gamma) = (L_{C_1}L_{C_2} \cdots L_{C_{2n}}, R_{C_1}R_{C_2} \cdots R_{C_{2n}}|B_{C_1}B_{C_2} \cdots B_{C_{2n}})$$

Es la isotopía deseada. (Dado que C_1, \dots, C_{2n} son octoniones unitarios, entonces α y β estan en \mathcal{SO}_8) Pero también sabemos que α y β son únicos bajo la multiplicación escalar, y el único escalar no trivial que los mantiene en \mathcal{SO}_8 es -1 , por lo que la única otra isotopía es

$$(-\alpha, -\beta|\gamma) = (\alpha, \beta|\gamma).$$

□

La operación $ref(\alpha)$ es simplemente la reflexión en un vector α . Estos resultados, en particular la demostración del teorema 5, implican el resultado al que se quería llegar, la multiplicación de octoniones unitarios generan el grupo \mathcal{SO}_8 [4].

3.2. Geometría Projectiva Octoniónica

La geometría proyectiva consiste en una modificación de la geometría euclidiana, basada en conjuntos de puntos y rectas con una relación de contenencia que satisface los siguientes axiomas:

\mathcal{P}_1 . Para dos puntos distintos, hay una única recta en la que ambos se encuentran.

\mathcal{P}_2 . Para dos rectas distintas, hay un único punto en el que ambas se encuentran.

\mathcal{P}_3 . Existen cuatro puntos, tres de los cuales no se encuentran en la misma recta.

\mathcal{P}_4 . Existen cuatro rectas, de las cuales tres no tienen el mismo punto.

Una estructura que satisface estos axiomas se denomina plano proyectivo y un ejemplo de esto es el Plano Fano estudiado anteriormente (3.2.2). Para dimensiones superiores se define un espacio proyectivo dado por los siguientes axiomas (ver [1] pag 17 y 18):

\mathcal{P}_1^n . Para dos puntos distintos p, q , hay una única recta pq en la que ambos están contenidos.

\mathcal{P}_2^n . Para cualquier recta, hay al menos tres puntos distintos en esta.

\mathcal{P}_3^n . Si a, b, c, d son puntos distintos y hay un punto en común entre ab y cd , entonces hay un punto en común entre ac y bd .

La dimensión de un espacio proyectivo se define como una menos que la cardinalidad mínima de un conjunto que abarca todo el espacio. Si dado \mathcal{K} cualquier campo, existe un espacio proyectivo n -dimensional llamado $\mathcal{K}\mathcal{P}^n$ donde los puntos son rectas que pasan por el origen en \mathcal{K}^{n+1} , y las rectas son planos a través del origen en \mathcal{K}^{n+1} . De hecho, esta construcción funciona incluso cuando \mathcal{K} es un campo sesgado: un anillo tal que todo elemento distinto de cero tiene un inverso multiplicativo de izquierda y derecha. Solo se debe ser cuidadosos al definir rectas y planos a través del origen en \mathcal{K}^{n+1} . Para esto, tomamos una recta a través del origen para ser algún conjunto $\mathcal{L} = \{\alpha x : \alpha \in \mathcal{K}\}$ donde $x \in \mathcal{K}^{n+1}$ diferente de 0, y tomamos el plano a través del origen para ser algún conjunto $\mathcal{P} = \{\alpha x + \beta y : \alpha, \beta \in \mathcal{K}\}$ donde $x, y \in \mathcal{K}^{n+1}$ son elementos tales que $\alpha x + \beta y = 0$ implica, $\alpha, \beta = 0$ (ver [1] pag 18 y 19).

En 1933 Ruth Moufang construyó un ejemplo notable de un plano proyectivo no desarguesiano (que no cumple el axioma de Desargues, ver [1] pag. 19) utilizando los octoniones. Más tarde, en 1949, Jordan descubrió que a partir de un álgebra excepcional de Jordan $h_3(\mathbb{O})$, se puede hacer una construcción para obtener el plano proyectivo descubierto por Moufang; este plano proyectivo fue notado $\mathbb{O}\mathcal{P}^2$ [1].

Si bien no se profundizará en la descripción y construcción de $h_3(\mathbb{O})$ y $\mathbb{O}\mathcal{P}^2$ si hay algunos elementos que vale la pena mencionar.

Un álgebra de Jordan es un álgebra sobre un cuerpo (no necesariamente asociativa) cuya multiplicación es conmutativa y satisface $(xy)(xx) = x(y(xx))$ (que se conoce como identidad de Jordan). Un elemento de $h_3(\mathbb{O})$ consiste de 3 octoniones y 3 números reales.

$$\begin{pmatrix} \alpha & z^* & y^* \\ z & \beta & x \\ y & x^* & \gamma \end{pmatrix} \rightarrow ((\alpha, \beta, \gamma), x, y, z)$$
 donde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ y $x, y, z \in \mathbb{O}$ (Ver [1] pag 31).

Usando los automorfismos del subgrupo \mathcal{S}_9 o Spin (9) (doble cubierta del grupo de rotación en 9 dimensiones. Ver [1].), se puede diagonalizar cualquier elemento a de $h_3(\mathbb{O})$ y llevarlo a una forma donde x, y, z sean reales. Finalmente a se diagonaliza conjugandola con una matriz de $O(3)$ (Grupo ortogonal de 3 elementos). Cada proyección de $h_3(\mathbb{O})$ se parece a uno de estos cuatro:

$$p_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Ver [1] pag 31).

Las propiedades de $h_3(\mathbb{O})$ permiten generar de diferentes formas el que se denomina el plano proyectivo octoniónico $\mathbb{O}\mathcal{P}^2$, como plano proyectivo del determinante de $h_3(\mathbb{O})$. Las rectas y puntos de $\mathbb{O}\mathcal{P}^2$ como clases de equivalencia de $h_3(\mathbb{O})$, los puntos de $\mathbb{O}\mathcal{P}^2$ como proyecciones de traza 1 y las rectas proyecciones con traza 2 en $h_3(\mathbb{O})$. El álgebra excepcional de Jordan $h_3(\mathbb{O})$ tiene variadas e interesantes propiedades entre las cuales se puede mencionar que la traza de una matriz en $h_3(\mathbb{O})$ es invariante bajo automorfismos como estructura de álgebra de Jordan y que sus grupos de simetrías resultan ser grupos de Lie excepcionales. Así mismo estas propiedades dotan a $\mathbb{O}\mathcal{P}^2$ de propiedades importantes y con una gran cantidad de posibles aplicaciones y conexiones con otras áreas (Ver [1] pag 32). $\mathbb{O}\mathcal{P}^2$ resulta ser auto-dual, es decir, existe una transformación de 'dualidad' que mapea los puntos a las rectas y viceversa, mientras se preserve la relación de contención. La transformación que cambia puntos y rectas tiene conexión con la lógica cuántica donde corresponde al postulado de la negación de las proposiciones. Como variedad, $\mathbb{O}\mathcal{P}^2$ es de 16 dimensiones. Las rectas en $\mathbb{O}\mathcal{P}^2$ son copias de $\mathbb{O}\mathcal{P}^1$, y por lo tanto 8-esferas. Para dos puntos distintos en $\mathbb{O}\mathcal{P}^2$, hay una recta única en la que ambos se encuentran. Para cualquiera dos rectas distintas, hay un punto único en el que se encuentran ambas (Ver [1] pag 32).

4. Aplicaciones

Las aplicaciones de la teoría de octoniones que se pueden observar en la literatura y publicaciones científicas permiten observar que hay un creciente interés desde inicio de siglo por esta álgebra de división normada, sus propiedades y consecuencias. En otras áreas de las matemáticas se han realizado conexiones y estudiado a mayor profundidad, parte de esto puede ser observado en el presente trabajo, su estructura y relación con las álgebras de Lie, desde su forma polinomial y vectorial, las geometrías asociadas, sus grupos de simetrías, etc (ver [6] cap. 10 y 11). Un ejemplo concreto lo podemos encontrar en [14], donde se estudia una representación matricial para los octoniones, ya que estos no son

isomorfos a ningún álgebra matricial, pues no es asociativa sobre \mathbb{R} , entonces se estudian algunas representaciones matriciales pseudo-reales de octoniones a través de representaciones en matrices reales de cuaterniones. Como estos, podemos encontrar un amplio número de trabajos en matemáticas.

El gran campo de aplicación de los octoniones, debido principalmente a su geometría, se da en la física contemporánea, física moderna y física cuántica. Varios trabajos en teoría de cuerdas, relatividad especial, lógica cuántica, procesamiento de señales, etc, dan cuenta de cómo las propiedades que tienen los octoniones y las geometrías asociadas a estos causan gran interés y buscan utilizarlos para llegar a resultados importantes. (Ver [2, 7, 3], [6] cap. 14, [5] cap. 4, [1] pag. 29).

En [2], se utiliza en gran medida el grupo \mathcal{SO}_8 y su relación con los octoniones, presenta la construcción de un líquido de Hall cuántico de ocho dimensiones cuya estructura fundamental es el álgebra de división de los octoniones. En particular, el fluido está compuesto de partículas que interactúan con un campo de medición que de fondo utiliza el grupo \mathcal{SO}_8 dependiendo de si las partículas están en su representación vectorial o de Spin. El líquido vive en un espacio de configuración múltiple que es de 20 o 14 dimensiones. El espacio de configuración total del líquido está compuesto por el espacio con base inicial de ocho dimensiones en el que viven las partículas más el espacio de configuración del giro de la partícula. Como tal, el espacio de configuración interna también deposita la densidad de energía de la misma manera que \mathcal{SO}_8 , pero las ecuaciones de movimiento de las partículas involucran que el espacio de configuración total sea de seis dimensiones.

La existencia de solo cuatro álgebras de división $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ esta realacionada a la existencia de tan solo cuatro fibraciones de esferas (Hopf) (Para este concepto vea e.g., [10]) sobre espacios esféricos: $\mathcal{S}^1 \xrightarrow{\mathcal{Z}_2} \mathcal{S}^1$ para \mathbb{R} , $\mathcal{S}^3 \xrightarrow{\mathcal{S}^1} \mathcal{S}^2$ para \mathbb{C} , $\mathcal{S}^7 \xrightarrow{\mathcal{S}^3} \mathcal{S}^4$ para \mathbb{H} y $\mathcal{S}^{15} \xrightarrow{\mathcal{S}^7} \mathcal{S}^8$ para \mathbb{O} (ver [2]).

Por otro lado, la construcción de álgebras de división a partir de trialidades (estudiado en la sección 2.6 del presente trabajo) tiene vínculos con la física. En el modelo estándar de partículas físicas, todas las partículas son también llamadas Bosón de Gauge y sirven para transmitir la fuerza en el modelo estándar. Las partículas spinor son también llamadas fermiones y corresponden a las formas básicas de la materia: quarks y leptons. La interacción entre la materia y la fuerza está descrita por una función trilineal que involucra dos spinors y un vector. Esta función es representada con el diagrama de Feynmann que es una representación gráfica de las trayectorias de las partículas en las fases intermedias de un proceso de colisión para resolver de manera eficaz los cálculos implicados en dicho proceso, procedentes de la teoría cuántica de campos [16]. En la figura 4 se puede ver la interacción de un fermión (línea con sentido hacia afuera del diagrama) y un antifermión (línea con sentido hacia dentro del diagrama) que al colisionar producen un bosón de Gauge, al asignarle una carga a las dos partículas se tendría la interacción entre un electrón y un positrón que al colisionar liberan a un fotón.

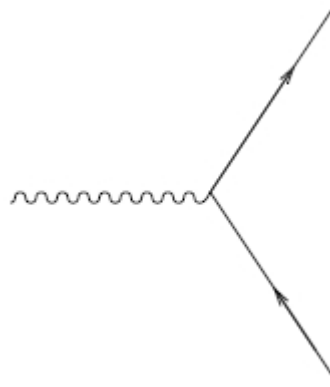


Figura 4: Diagrama de Feynmann, tomado de [1] pag. 29. Las líneas rectas representan los spinors (que resultan ser un fermión representado con la línea con sentido hacia afuera del diagrama y un antifermión representado con la línea con sentido hacia dentro del diagrama) y la ondulada representa un vector (el resultado de la colisión de las dos partículas, un bosón de Gauge).

Tal como los octoniones dan una representación del spinor de $\text{Spin}(8)$, los pares de octoniones dan una representación del spinor de $\text{Spin}(9, 1)$. Esta es una razón por la cual muchas teorías físicas como la teoría de superanillos, la teoría de campo de Gauge o teoría de recalibración y la extensión de Geoffrey Dixon del modelo estándar basado en el álgebra $\mathbb{C} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{O}$ en el cual las 3 fuerzas surgen naturalmente de los tres factores de este producto tensorial funcionan mejor cuando el espacio es 10-dimensional (Ver [1] pag. 17 y 29).

Por otro lado, una aplicación adicional importante de mencionar es la ecuación de Dirac, que en física es una relación fundamental de la mecánica cuántica y describe el movimiento de una partícula spin $\frac{1}{2}$ libre (por ejemplo un electrón o un neutrino). Forma parte de la estructura elemental en la descripción actual del electromagnetismo (ver [7]).

La ecuación de Dirac está dada originalmente por

$$\left(\beta mc^2 + c \left(\sum_{n=1}^3 \alpha_n p_n \right) \right) \psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \quad (11)$$

donde $\psi = \psi(x, t)$ es la función de onda para el electrón en reposo con masa m y con coordenadas x, t . Las componentes p_1, p_2, p_3 del momento, entendidas como el momento del operador en la ecuación de Schrödinger. También c es la velocidad de la luz y \hbar es la constante de Planck dividida por 2π , las cuales son fundamentales en la relatividad especial y la mecánica cuántica. Los elementos α_k y β resultan ser matrices 4×4 hermitianas, cuyo cuadrado es la matriz identidad I_4 y anticonmutan mutuamente[15].

Usando las relaciones dadas del álgebra de Clifford sobre un espacio 4 dimensional, que es llamada hoy en día álgebra de Dirac, la ecuación de Dirac puede ser descrita en forma simple como un producto de octoniones hiperbólicos (o cuateroctoniones), que son una subálgebra de sedeniones cónicos, álgebra no conmutativa y no asociativa de 16 dimensiones sobre los reales que se obtiene aplicando la construcción de Cayley-Dickson (2.4) a los octoniones, y como tal, los octoniones resultan ser un subcampo de los sedeniones (ver [6, 7]). En la nueva forma, la masa en reposo es proporcional al valor propio del operador del 4-momento, la constante de proporcionalidad es la velocidad de la luz de forma que:

$$P_{op}\psi = mc\psi,$$

donde P es el operador del 4-momento. Para más detalles, ver [15]

Ahora, usando la notación de slash de Feynmann para factores covariantes, $\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$, donde cada γ es una de las matrices involucradas en la ecuación de Dirac (llamadas matrices gamma) y ∂ es el cuarto gradiente (análogo al gradiente de cálculo vectorial) y que es usado en mecánica cuántica para describir las propiedades y relaciones entre los distintos 4-vectores (un objeto con cuatro componentes) y los tensores; (11) está dada por

$$i\hbar\not{\partial}\psi - mc\psi = 0.$$

En la práctica, los físicos suelen usar unidades de medida tal que $\hbar = c = 1$, conocidas como unidades naturales. De manera que la ecuación toma la siguiente forma más simple:

$$\psi(i\not{\partial} - m) = 0.$$

Este resultado, es un ejemplo de cómo los hipernúmeros (extensiones de los reales) podrían ayudar aún más a la descripción matemática de la ley física, mediante la transición entre diferentes geometrías a través de la rotación genuina del hipernúmero [7].

5. Conclusión

Los octoniones, aunque no comparten todas las propiedades como extensión del cuerpo de los complejos y siendo una de las álgebras de división normada junto a \mathbb{R} , \mathbb{C} y \mathbb{H} , tienen consecuencias importantes de estudiar y profundizar que no deberían pasar desapercibidas en la matemática actual.

Lo trabajado en este documento y lo que hizo falta por profundizar, amplía el espectro de la matemática hacia un conjunto de reciente interés que involucra áreas de investigación en las que aún hay mucho por trabajar y con las recientes aplicaciones que se hacen desde la física moderna, los octoniones resultan tener un papel importante en el avance de este estudio.

Este trabajo resulta ser un motivante para el quehacer profesional de los autores en la medida en que todo lo aprendido durante la carrera toma un

papel fundamental al leer e intentar comprender artículos científicos o libros sobre este tema y con ello surge el interés de trabajar en áreas de investigación relacionadas con el tema.

Referencias

- [1] J. C. Baez, *The octonions*, Bulletin of American Mathematical Society **39** (2002), 145–205.
- [2] B. A. Bernevig, J. Hu, N. Toumbas, and S. Ch. Zhang, *Eight-Dimensional Quantum Hall Effect and Octonions*, Physical Review Letters **96** (2006), 10–17.
- [3] L. Borsten, D. Dahanayake, M. J. Duff, H. Ebrahima, and W. Rubens, *Black holes, qubits and octonions*, Elsevier B.V. Physics Reports (2009).
- [4] J. H. Conway and D. A. Smith, *On Quaternions and Octonions: Their Geometry, Arithmetic, and Symmetry*, 1 ed., vol. 1, Sales, and Customer Service Office, 2003.
- [5] G. M. Dixon, *Division Algebras: Octonions, Quaternions, Complex Numbers and the Algebraic Design of Physics*, 1 ed., Mathematics and Its Applications 290, vol. 1, Springer US, 1994.
- [6] T. Dray and C. A. Manogue, *The Geometry of the Octonions*, 1 ed., vol. 1, World Scientific Publishing, 2015.
- [7] J. Koplinger, *Dirac equation on hyperbolic octonions*, Applied Mathematics and Computation **182** (2006), no. 1, 443–446.
- [8] O. Lezama, *Algebra Lineal*, Cuadernos de clase, 2018.
- [9] P. Lounesto, *Clifford Algebras and Spinors*, 2 ed., vol. 1, Cambridge University Press, 2001.
- [10] D. W. Lyons, *An Elementary Introduction to the Hopf Fibration*, Lebanon Valley College **76** (2003).
- [11] Quanta Magazine, *The peculiar math that could underlie the laws of nature*.
- [12] Mathworld, *Projective plane*.
- [13] Encyclopedia of Mathematics, *Cayley-dickson algebra*.
- [14] Y. Tian, *Matrix representations of octonions and their applications*, Advances in Applied Clifford Algebras, Birkhäuser Basel **10** (2000), no. 6, 61–90.

- [15] Wikipedia, *Dirac equation*.
- [16] ———, *Feynman diagram*.
- [17] Wikipedia, *Octonions*.